

Numerische Berechnung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und der periodischen Schwingungen in Kurvengetrieben mit elastischer Stößelstange

Nguyen Van Khang, Vu Van Khiem

In der vorliegenden Arbeit werden die Differentialgleichungen der Schwingungen in Kurvengetrieben unter Berücksichtigung des Kontinuumsverhaltens der Stößelstange hergeleitet. Danach wird ein Iterationsverfahren zur Bestimmung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und der periodischen Schwingungen von Kurvengetrieben behandelt.

1 Einleitung

Die Tendenz zu hohen Drehzahlen in vielen Bereichen des Maschinenbaus stellt die dynamischen Kräfte immer mehr in den Vordergrund und zwingt zur Analyse des dynamischen Verhaltens der Maschinen. Dabei gewinnt die Berücksichtigung der Elastizität der Maschinenteile immer mehr an Bedeutung. In den letzten Jahren wurden zahlreiche Untersuchungen über die Schwingungen in elastischen Kurvengetrieben durchgeführt (siehe z.B. Volmer, 1976; Dresig und Vulfson, 1989; Nguyen Van Khang, 1986, 1995; Pasin, 1974, 1983).

Für die Schwingungsberechnung muß ein möglichst einfaches Modell des Kurvengetriebes gefunden werden, das trotz der Vereinfachungen das Schwingungsverhalten des Getriebes ausreichend widerspiegelt. Im allgemeinen ist als Modell ein Ersatzsystem ausreichend, das aus masselosen Federn und starren Körpern besteht, obwohl die Getriebeglieder ein Kontinuum darstellen (Volmer, 1976; Dresig und Vulfson, 1989). Zur Berechnung der Eigenfrequenzen der Schwingungen elastischer Kurvengetriebe wurde in der Arbeit von Pasin (1974) ein Modell benutzt, das statt der zwei masselosen Federn eine massebehaftete Feder und einen elastischen Stab enthält. In der vorliegenden Arbeit wird die numerische Berechnung der periodischen Schwingungen in Kurvengetrieben unter Berücksichtigung des Kontinuumsverhaltens der Stößelstange behandelt.

2 Aufstellung von Schwingungsgleichungen

Bild 1 zeigt ein dynamisches Modell des Kurvengetriebes. Es besteht aus einem elastischen Stab mit konstantem Querschnitt, der hauptsächlich die Stößelstange repräsentiert, und einem starren Kurvenkörper mit elastischem Antrieb. Zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen für dieses System ist es günstig, das Gesamtsystem, die Struktur, nach dem Schnittprinzip am Kurven gelenk zu teilen. Es entstehen dabei zwei Substrukturen mit der Kopplungskraft Z (Bild 2a und 2b). Mit Hilfe der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen 2. Art erhält man die folgenden Bewegungsgleichungen für die Substruktur 2a:

$$J_0 \ddot{\varphi}_0 + b_1 \dot{\varphi}_0 - b_1 \dot{\varphi}_1 + c_1 \varphi_0 - c_1 \varphi_1 = M(t) \quad (1)$$

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 - b_1 \dot{\varphi}_0 + b_1 \dot{\varphi}_1 - c_1 \varphi_0 + c_1 \varphi_1 = -ZU'(\varphi_1) \quad (2)$$

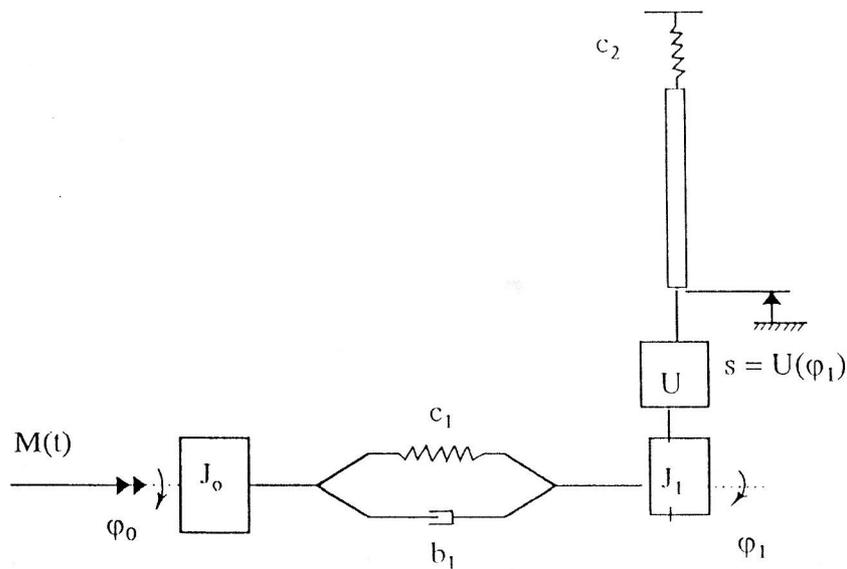


Bild 1. Dynamisches Modell eines Kurvengetriebes

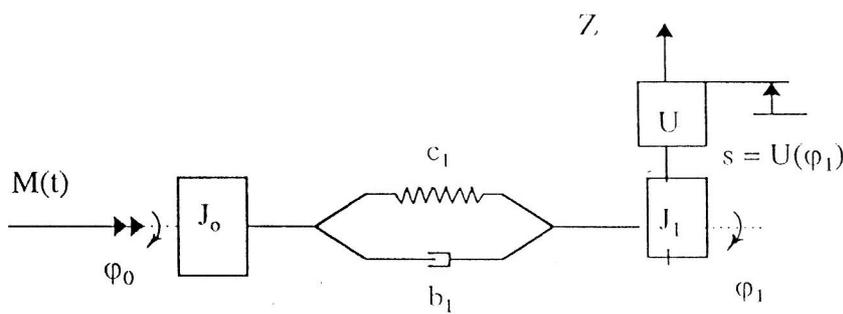


Bild 2a. Substruktur 1

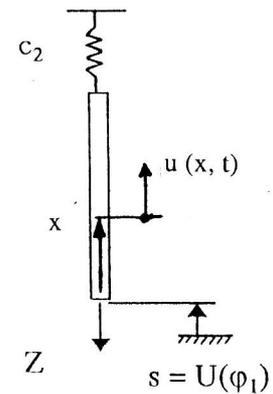


Bild 2b. Substruktur 2

Für die Längsschwingungen des elastischen geraden Stabes mit konstantem Querschnitt in der Substruktur 2b erhält man im stabfesten Koordinatensystem die partielle Differentialgleichung (siehe Hagedorn, 1989)

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{d^2 s}{dt^2} \quad (3)$$

mit

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad (4)$$

Dabei sind E der Elastizitätsmodul und ρ die Dichte des Stabmaterials. Die Randbedingungen lauten

$$u(0, t) = 0 \quad (5)$$

$$EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = -c_2 [u(l, t) + s + \delta] \quad (6)$$

mit δ als statischer Verkürzung der Feder mit der Steifigkeit c_2 .

Es werden nun die Kopplungsbedingungen zwischen der Substruktur 2a und der Substruktur 2b formuliert. Hierbei wird davon ausgegangen, daß an dem Kopplungsknoten sowohl die Verschiebung als auch die Kraft für beide Substrukturen übereinstimmen müssen. Für das dynamische Modell 2 lauten die Kopplungsbedingungen

$$u(0, t) = 0 \quad (7)$$

$$EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} = -Z \quad (8)$$

Die Bedingung (7) wurde als Randbedingung (5) schon berücksichtigt. Deshalb interessieren wir uns nur für die Kopplungsbedingung (8).

Im folgenden betrachten wir den stationären Zustand, indem wir für den Antrieb eine konstante Winkelgeschwindigkeit Ω voraussetzen. Über die Antriebselastizität mit der Steifigkeit c_1 und die äquivalente Dämpfungskonstante b_1 wird das Kurvenglied mit dem Massenträgheitsmoment J_1 angetrieben. Die Bewegung erfährt dabei gegenüber der „idealen“ Bewegung Ωt eine Verfälschung q . Geht man von kleinen Schwingungen aus, so ändert sich die kinematische Übertragungsfunktion $s = U(\Omega t + q)$ vor allem mit Ωt und nur wenig mit q . Damit ist es möglich, die Verläufe der Übertragungsfunktion und ihrer Ableitung in eine Taylor-Reihe an der Stelle $q = 0$ zu entwickeln

$$U'(\Omega t + q) = \bar{U}' + \bar{U}''q + \dots \quad (9)$$

Dabei gilt

$$\bar{U}' = U'(\Omega t) \quad \bar{U}'' = U''(\Omega t) \quad \dots \quad (10)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Koordinate q klein ist, lautet die Schwingungsgleichung (2) in linearisierter Form

$$J_1 \ddot{q} + b_1 \dot{q} + (c_1 + Z\bar{U}'')q = -Z\bar{U}' \quad (11)$$

Dabei ist die Kopplungskraft Z eine Unbekannte. Unter Beachtung von

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi_1} \frac{d\varphi_1}{dt} = U'(\varphi_1) \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = U''(\varphi_1) \dot{\varphi}_1^2 + U'(\varphi_1) \ddot{\varphi}_1$$

erhält man den folgenden Näherungsausdruck:

$$\begin{aligned} \frac{d^2s}{dt^2} &= U''(\Omega t + q)(\Omega + \dot{q})^2 + U'(\Omega t + q)\ddot{q} \\ &\approx (\bar{U}'' + \bar{U}'''q)(\Omega^2 + 2\Omega\dot{q} + \dot{q}^2) + (\bar{U}' + \bar{U}''q)\ddot{q} \\ &\approx \Omega^2 \bar{U}'' + \Omega^2 \bar{U}'''q + 2\Omega \bar{U}''\dot{q} + \bar{U}'\ddot{q} \end{aligned} \quad (12)$$

Setzt man die Gleichung (12) in die Differentialgleichung (3) und die Gleichung (8) in die Differentialgleichung (11) ein, so erhält man die Schwingungsgleichungen für das Kurvengetriebe mit elastischer Stößelstange:

Die partielle Differentialgleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Omega^2 \bar{U}'' + \Omega^2 \bar{U}''' q + 2\Omega \bar{U}'' \dot{q} + \bar{U}' \ddot{q} \quad (13)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0, t) = 0 \quad (14)$$

$$EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l} = -c_2 [u(l, t) + s + \delta] \quad (15)$$

und die gewöhnliche Differentialgleichung

$$J_1 \ddot{q} + b_1 \dot{q} + \left[c_1 - EA \bar{U}'' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \right] q = EA \bar{U}' \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (16)$$

3 Lösungsansatz und Zurückführung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung

Eine exakte Lösung des gemischten Systems aus der partiellen Differentialgleichung (13) mit den Randbedingungen (14), (15) und der gewöhnlichen Differentialgleichung (16) zu finden, ist leider nicht möglich, so daß man gezwungen ist, sich mit einem Iterationsverfahren zu begnügen. Das Schema lautet

$$c^2 \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^{(i)}}{\partial t^2} = \Omega^2 \bar{U}'' + \Omega^2 \bar{U}''' q^{(i-1)} + 2\Omega \bar{U}'' \dot{q}^{(i-1)} + \bar{U}' \ddot{q}^{(i-1)} \quad (17)$$

$$u^{(i)}(0, t) = 0 \quad (18)$$

$$\left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} \right)_{x=l} = -\frac{c_2}{EA} [u^{(i)}(l, t) + s^{(i)} + \delta] \quad (19)$$

$$J_1 \ddot{q}^{(i)} + b_1 \dot{q}^{(i)} + (c_1 + Z^{(i)} \bar{U}'') q^{(i)} = -Z^{(i)} \bar{U}' \quad (20)$$

$$Z^{(i)} = -EA \left(\frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} \right)_{x=0}$$

Als die nullten Näherungswerte kann man die Werte $q^{(0)} = 0$, $\dot{q}^{(0)} = 0$, $\ddot{q}^{(0)} = 0$ wählen. In jedem Iterationsschritt haben wir zunächst die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(\Omega t) \quad (21)$$

mit den Randbedingungen

$$v(0, t) = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=l} = -\frac{c_2}{EA} [v(l, t) + s + \delta] \quad (23)$$

zu berechnen. Zur Vereinfachung der Darstellung ist hier die Variable $u^{(i)}$ durch die Variable v ersetzt. Dabei ist $f(\Omega t)$ eine periodische Funktion mit der Periode $T = 2\pi/\Omega$. Es sei vorausgesetzt, daß sich die periodische Funktion $f(\Omega t)$ in der folgenden Form darstellen läßt:

$$f(\Omega t) = \sum_{k=1}^K (f_k \cos k\Omega t + F_k \sin k\Omega t) \quad (24)$$

Nun findet man eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (21) mit Hilfe des Ansatzes

$$v(x, t) = X_0(x) + \sum_{k=1}^K (X_k(x)(a_k \cos k\Omega t + A_k \sin k\Omega t)) \quad (25)$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = X_0''(x) + \sum_{k=1}^K (X_k''(x)(a_k \cos k\Omega t + A_k \sin k\Omega t)) \quad (26)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = - \sum_{k=1}^K (k^2 \Omega^2 X_k(x)(a_k \cos k\Omega t + A_k \sin k\Omega t)) \quad (27)$$

Setzt man die Gleichungen (24) bis (27) in die Gleichung (21) ein, so erhält man

$$c^2 X_0'' + \sum_{k=1}^K (c^2 X_k'' + k^2 \Omega^2 X_k)(a_k \cos k\Omega t + A_k \sin k\Omega t) = \sum_{k=1}^K (f_k \cos k\Omega t + F_k \sin k\Omega t)$$

Daraus ergibt sich

$$c^2 X_0'' = 0 \quad (28)$$

$$(c^2 X_k'' + k^2 \Omega^2 X_k) a_k = f_k \quad (29)$$

$$(c^2 X_k'' + k^2 \Omega^2 X_k) A_k = F_k \quad (30)$$

Aus der Gleichung (28) findet man

$$X_0(x) = d_0 + D_0 x \quad (31)$$

Mit

$$\gamma_k = \frac{f_k}{a_k} = \frac{F_k}{A_k} \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (32)$$

erhält man aus den Gleichungen (29) und (30) die Differentialgleichungen

$$c^2 X_k'' + k^2 \Omega^2 X_k = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots, K) \quad (33)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$X_k(x) = \gamma_k \left[d_k \cos \frac{k\Omega}{c} x + D_k \sin \frac{k\Omega}{c} x + \frac{1}{k^2 \Omega^2} \right] \quad (34)$$

Durch Einsetzen der Lösungen (31) und (34) in den Ausdruck (25) folgt

$$v(x, t) = d_0 + D_0 x + \sum_{k=1}^K \left[d_k \cos \frac{k\Omega}{c} x + D_k \sin \frac{k\Omega}{c} x + \frac{1}{k^2 \Omega^2} \right] T_k(\Omega t) \quad (35)$$

mit

$$T_k(\Omega t) = f_k \cos k\Omega t + F_k \sin k\Omega t$$

Die Unbekannten d_k und D_k ($k = 0, 1, \dots, K$) lassen sich mit Hilfe der Randbedingungen (5) und (6) bestimmen. Aus der Randbedingung (5) findet man

$$d_0 = 0 \quad d_k = -\frac{1}{k^2 \Omega^2} \quad (k = 1, \dots, K) \quad (36)$$

Mit der Voraussetzung über die Periode der Übertragungsfunktion ergibt sich aus Gleichung (24)

$$s = s_0 - \sum_{k=1}^K \left(\frac{1}{k^2 \Omega^2} \right) T_k \quad (37)$$

Damit nimmt die Randbedingung (19) die folgende Form an:

$$\begin{aligned} D_0 + \sum_{k=1}^K \frac{k\Omega}{c} \left[\frac{1}{k^2 \Omega^2} \sin \frac{k\Omega}{c} l + D_k \cos \frac{k\Omega}{c} l \right] T_k(\Omega t) \\ = -\frac{c_2}{EA} \left\{ D_0 l + s_0 + \delta + \sum_{k=1}^K \left[-\frac{1}{k^2 \Omega^2} \cos \frac{k\Omega}{c} l + D_k \sin \frac{k\Omega}{c} l \right] T_k(\Omega t) \right\} \end{aligned} \quad (38)$$

Daraus ergibt sich

$$D_0 = -\frac{c_2 (s_0 + \delta)}{EA + c_2 l} \quad D_k = \frac{1}{k^2 \Omega^2} \xi_k \quad (39)$$

mit

$$\xi_k = \frac{\frac{c_2}{EA} \cos \frac{k\Omega}{c} l - \frac{k\Omega}{c} \sin \frac{k\Omega}{c} l}{\frac{k\Omega}{c} \cos \frac{k\Omega}{c} l + \frac{c_2}{EA} \sin \frac{k\Omega}{c} l} \quad (40)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke (36), (39) und (40) in den Ausdruck (35) erhält man

$$v(x, t) = -\frac{c_2 (s_0 + \delta)}{EA + c_2 l} x + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k^2 \Omega^2} \left(1 - \cos \frac{k\Omega}{c} x + \xi_k \sin \frac{k\Omega}{c} x \right) T_k(\Omega t) \quad (41)$$

Danach ist die periodische Lösung der linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten

$$J_1 \ddot{q} + b_1 \dot{q} + c_1^*(\Omega t) q = h(\Omega t) \quad (42)$$

mit

$$c_1^*(\Omega t) = c_1 - EA \bar{U}'' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} \quad h(\Omega t) = EA \bar{U}' \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0}$$

zu berechnen.

Die numerische Berechnung der periodischen Lösung der Differentialgleichung (42) wurde in der Arbeit von Nguyen Van Khang (1982, 1986) ausführlich behandelt.

4 Beispiel

Mit dem in Abschnitt 3 dargestellten Verfahren wurde an der Technischen Universität Hanoi ein Rechenprogramm zur dynamischen Analyse des Kurvengetriebes für Personalcomputer (PC) in der Programmiersprache FORTRAN entwickelt. Damit können auch die periodischen Schwingungen des Kurvengetriebes unter Berücksichtigung des Kontinuumsverhaltens der Stößelstange berechnet werden.

Die kinematische Übertragungsfunktion erster Ordnung $U'(\varphi)$ läßt sich in der Form

$$U'(\varphi) = \sum_{k=1}^K (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

darstellen.

Für die Zahlenrechnung gelten die folgenden Daten der kinetischen Parameter des Getriebes:

$$n = 240 \text{ min}^{-1} \quad J_1 = 1,11 \text{ kgm}^2 \quad b_1 = 18,5 \text{ Nms} \quad c_1 = 7692 \text{ Nm} \quad E = 2,0 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$A = 0,0006 \text{ m}^2 \quad c_2 = 2000 \text{ Nm} \quad \delta = 0,001 \text{ m} \quad l = 2 \text{ m}$$

Außerdem sind die Werte der Koeffizienten des trigonometrischen Polynoms für $U'(\varphi)$ in Tabelle 1 angegeben ($b_k = 0$).

	Variante 1	Variante 2
a_1	0,22165	0,22060
a_2	0	0
a_3	0,05560	0,08539
a_4	0	0
a_5	-0,01706	-0,00518
a_6	0	0
a_7	0	-0,00373
a_8	0	0
a_9	0	0,00345
a_{10}	0	0
a_{11}	0	-0,00182
a_{12}	0	0

Tabelle 1. Daten der Koeffizienten a_k

Die erhaltenen Berechnungsergebnisse werden in Tabelle 2 sowie in den Bildern 3 bis 8 dargestellt. Die Tabelle 2 enthält die betragsmäßig größte Wurzel der charakteristischen Gleichung für verschiedene Werte der Drehzahl für Variante 2.

$n \text{ (min}^{-1}\text{)}$	ρ_{\max}
120	0,0155039
240	0,1245146

Tabelle 2. Betragsmäßig größte Wurzel der charakteristischen Gleichung

Das Getriebe ist dynamisch stabil, weil $\rho_{\max} < 1$. Die Bilder 3 und 4 zeigen den Zeitverlauf der Koordinate q . Die Bilder 5 und 6 enthalten die Verläufe von q und \dot{q} in der Phasenebene. Die Bilder 7 und 8 zeigen als Beispiel aus allen Darstellungen den Verlauf der elastischen Verformung der Stößelstange in den Schnitten $x = l/2$ und $x = l$.

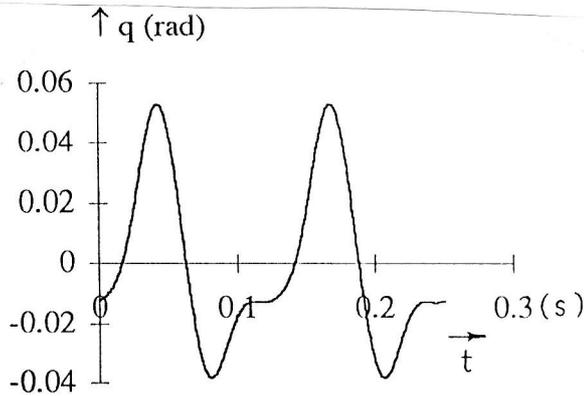


Bild 3. Verlauf der Verfälschung q (Variante 1)

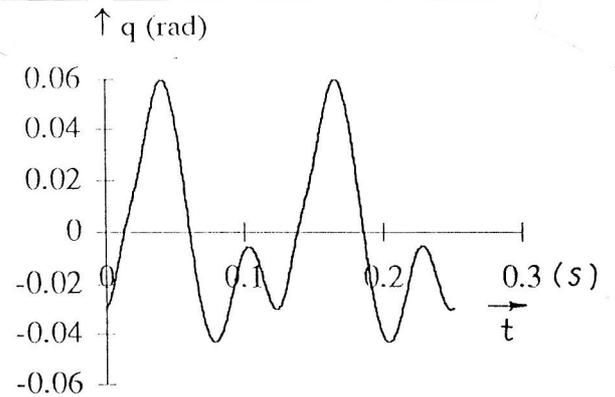


Bild 4. Verlauf der Verfälschung q (Variante 2)

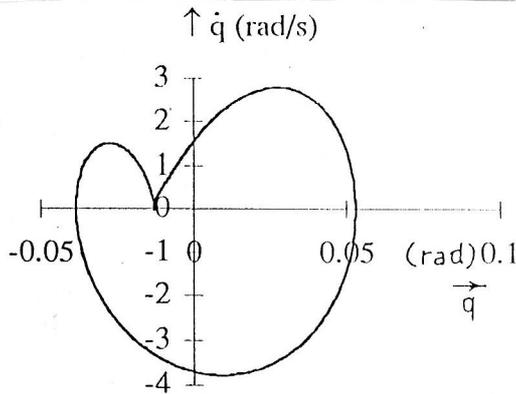


Bild 5. Phasenbild q, \dot{q} (Variante 1)

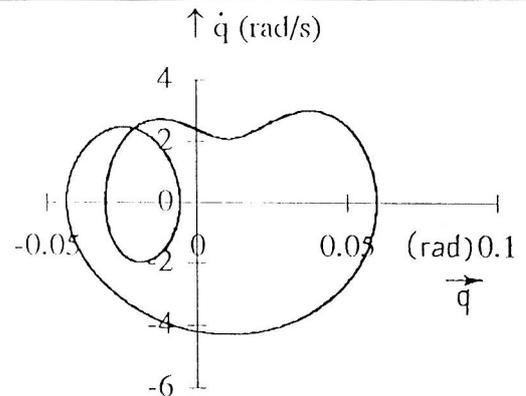


Bild 6. Phasenbild q, \dot{q} (Variante 2)

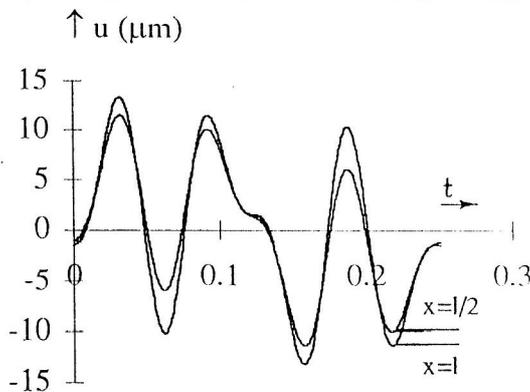


Bild 7. Elastische Verformung der Stößelstange (Variante 1)

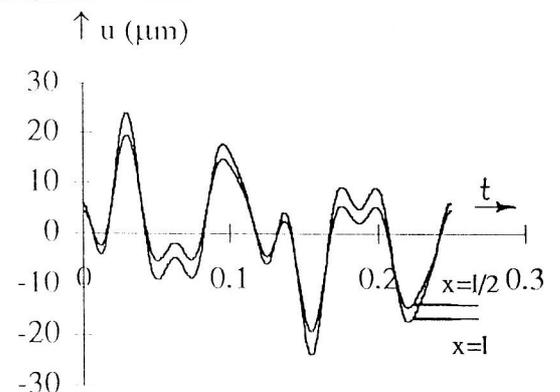


Bild 8. Elastische Verformung der Stößelstange (Variante 2)

5 Zusammenfassung

Bei der Schwingungsanalyse kann ein Kurvengetriebe mit starren und elastischen Gliedern in mehrere Substrukturen zerlegt werden. Damit erhält man die Bewegungsdifferentialgleichungen der Kurvengetriebe unter Berücksichtigung des Kontinuumsverhaltens der Stößelstange als ein gemischtes System gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. Zur Berechnung der periodischen Lösungen dieser Differentialgleichungen wurde ein Iterationsverfahren herangezogen. Ein Rechenprogramm zur Analyse der stationären Bewegung des Kurvengetriebes wurde an der Technischen Universität Hanoi entwickelt.

Literatur

1. Dresig, H.; Vul'fon, I.I.: Dynamik der Mechanismen, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, (1989).
2. Hagedorn, P.: Technische Schwingungslehre, Band 2, Springer-Verlag, Berlin, (1989).
3. Nguyen Van Khang: Numerische Bestimmung der dynamischen Stabilitätsbedingungen und periodischen Schwingungen in Mechanismen, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl. 27, 4, (1982), 495-507.
4. Nguyen Van Khang: Dynamische Stabilität und periodische Schwingungen in Mechanismen, Diss. B, TH Karl-Marx-Stadt, (1986).
5. Nguyen Van Khang: Anwendung der Substrukturtechnik bei der dynamischen Analyse ebener Mechanismen mit elastischen Gliedern. ZAMM 75, Supplement 1, (1995), 119-120.
6. Pasin, F.: Über die Berechnung der Eigenfrequenzen von Schwingungen bei Kurvenmechanismen, Mechanism and Machine Theory, 9, (1974), 231-238.
7. Pasin, F.: Über die kinetische Stabilität der Stößelstange in Kurvengetrieben, Mechanism and Machine Theory, 18, 2, (1983), 151-155.
8. Volmer, J. u.a.: Getriebetechnik/ Kurvengetriebe, Verlag Technik, Berlin, (1976).

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Van Khang, Dipl.-Ing. Vu Van Khiem, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Hanoi, 1 Dai Co Viet, Hanoi, Vietnam