

Betriebsfestigkeit und Berechnung der Lebensdauer mit einer allgemeineren Darstellung der Wöhlerlinie

S. Koczyk

Zur Bestimmung der zu erwartenden Lebensdauer schwingend belasteter Bauteile wird die veränderliche Dauerfestigkeit als wesentliche Kenngröße eingeführt. Die Lebensdauerberechnung kann damit auf einer genaueren mathematischen Formulierung der Wöhlerlinie aufbauen. Es wird weiter vorausgesetzt, daß die Wöhlerlinien des geschädigten Materials in der gleichen Weise mit veränderten Parametern dargestellt werden können. Das Versagen erfolgt, wenn die gerade vorhandene Oberspannung größer oder gleich dem aktuellen Wert einer Versagensspannung (Bruchspannung) ist. Damit können sowohl der Einfluß der Reihenfolge als auch unterschiedliche Mittelspannungen berücksichtigt werden.

1 Problemstellung

Die Abschätzung der Lebensdauer beliebig wechselnd beanspruchter Bauteile erfolgt im allgemeinen durch Verfahren, die auf der Grundlage der Hypothese der linearen Schadensakkumulation von Palmgreen und Miner sowie durch Erweiterungen und zusätzliche Annahmen hinsichtlich des Materialverhaltens und der Wirkung unterschiedlicher Lastkollektive entwickelt wurden. Betriebsfestigkeitsberechnungen bilden inzwischen einen wesentlichen Bestandteil bei der Beurteilung schwingend beanspruchter Bauteile und werden auch in letzter Zeit immer mehr ausgebaut, wie die Arbeiten von Heuler und Schütz (1988), Nowack (1988) sowie Vormwald und Seeger (1988) zeigen. Trotzdem bleiben noch viele Fragen, die die theoretische Begründung der verwendeten Konzepte zur Bestimmung der Schädigung und des Versagens betreffen, offen. Die auf Palmgreen und Miner zurückgehende Definition der Schädigung eines schwingend belasteten Bauteils durch

$$D = \frac{n}{N} \quad (1)$$

ist insofern nicht besonders zweckmäßig, weil die Zahl der Schwingspiele n , die mit der Spannungsamplitude σ_a das Bauteil belasten und die auf diesem Spannungshorizont ertragbare Schwingenspielzahl N , keine material-spezifischen Größen sind. Man braucht aber, um zu allgemeineren Aussagen zu kommen, solche Parameter, die den Zustand des Materials und insbesondere die Schädigung desselben beschreiben, unabhängig davon, auf welche Weise dieser Zustand erreicht wurde. Die Schädigung des Materials ist zudem eine sehr komplexe Größe, die nicht oder nur näherungsweise durch einen einzigen Parameter charakterisiert werden kann. Es ist weiter zu beachten, daß der Vorgang des Versagens eines Bauteils bei wechselnder Belastung sehr schwierig analytisch zu erfassen ist, da eine Zunahme der Schädigung zunächst zur Bildung von Mikrorissen führt, deren weitere Vergrößerung mit bruchmechanischen Methoden verfolgt werden muß. Da der Übergang vom geschädigten zum angerissenen Kontinuum im Verlauf des Belastungsvorganges nicht genau lokalisiert werden kann, sind verschiedene Verfahren entwickelt worden, die entweder die Existenz eines Risses schon voraussetzen, oder die Ausbreitung desselben selbst als Prozeß der Schädigung auffassen. Die letzte Betrachtungsweise liegt im allgemeinen den Verfahren zugrunde, die die experimentell gewonnene Wöhlerlinie als Grundlage der Berechnung benutzen. Es stellt sich aber auch hier die Frage nach der Einführung zweckmäßiger Kenngrößen zur Beschreibung der Schädigung. Als eine solche Größe wurde bereits in früheren Arbeiten (Koczyk, 1993) die veränderliche Dauerfestigkeit σ_D eingeführt. In zahlreichen Arbeiten, so von Franke (1985a, 1985b), Günther (1973), Haibach (1989), Schott (1985, 1992, 1993) u. a. wird darauf hingewiesen, daß diese ausgehend von einem spezifischen Anfangswert σ_{D0} mit zunehmender Schädigung abnimmt. Die Verminderung der Dauerfestigkeit wird auch in den meisten Berechnungsverfahren berücksichtigt. Zusammenfassende Darstellungen dieser Verfahren mit unterschiedlichen Anwendungen finden sich bei Buxbaum (1988), Cottin und Puls (1992), Gnilke (1980), Haibach (1989) und Zammert (1985). Sieht man den Parameter D nach Gleichung (1) als wesentliche, die Schädigung kennzeichnende Größe an, so ist es schwierig, einen Zusammenhang zwischen D und σ_D herzustellen. Kritikwürdig erweist sich auch hier der alleinige Bezug auf die auf Basquin zurückge-

hende spezielle mathematische Form der Wöhlerlinie, die zwar durch ihre Einfachheit besticht, aber gegenüber genaueren mathematischen Darstellungen erhebliche Nachteile besitzt, da sie die wirkliche Wöhlerlinie nur im mittleren Teil hinreichend genau annähert. Ein weiterer Nachteil dieser Formulierung ist, daß sie keine Vorstellung über den Vorgang des Versagens vermittelt. Aufgrund dieser unzureichenden Voraussetzungen ergeben sich Einschränkungen in der Anwendbarkeit der darauf aufbauenden Berechnungsmethoden, die durch zusätzliche Annahmen, die aus der experimentellen Überprüfung resultieren, korrigiert werden müssen.

Im folgenden wird eine allgemeinere mathematische Formulierung der Wöhlerlinie zugrunde gelegt, wobei vorausgesetzt wird, daß auch die Folgewöhlerlinien des geschädigten Materials in dieser Weise mit veränderten Koeffizienten dargestellt werden können. Diese werden als Funktionen charakteristischer, die Schädigung kennzeichnende Parameter aufgefaßt. Es wird weiterhin versucht, durch ein spezielles Kriterium den Vorgang des Versagens nachzuvollziehen. Dadurch ist es möglich, das Belastungsprogramm detailliert abzuarbeiten und den Einfluß der Reihenfolge der Schwingspiele sowie die veränderliche Mittelspannung zu berücksichtigen.

2 Phänomenologische Darstellung der Wöhlerlinie

2.1 Darstellung der Wöhlerlinie nach Basquin

Die Wöhlerlinie bildet die Grundlage der Lebensdauerberechnung beliebig schwingend beanspruchter Bauteile, so daß ihre genaue mathematische Formulierung wünschenswert erscheint. Diese wird aber einmal durch den hohen Streubereich der Versuchswerte, die zur Bestimmung der Wöhlerlinie berücksichtigt werden müssen, erschwert, zum anderen aber auch dadurch, daß eine Beschreibung der Vorgänge im Mikrobereich, die zur Zunahme der Schädigung führen, bislang noch nicht auf der Grundlage makroskopischer Größen in einer solchen Weise realisiert wurde, daß sie als mathematische Basis zur Formulierung der Wöhlerlinie und entsprechender Folgewöhlerlinien des geschädigten Materials dienen kann. Obwohl sich hierzu in letzter Zeit entsprechende Ansätze, z.B. bei Lemaitre (1992), finden, gehen die meisten Berechnungsverfahren noch immer von der Darstellung der Wöhlerlinie nach Basquin aus, die diese in der doppellogarithmischen Darstellung im Zeitfestigkeitsbereich als Gerade approximiert.

$$N = N_0 \left(\frac{\sigma_{D0}}{\sigma_a} \right)^\kappa \quad (\sigma_{D0} < \sigma_a) \quad (2)$$

Es bezeichnen σ_a die Spannungsamplitude, N die ertragbare Schwingspielzahl und σ_{D0} den Anfangswert der Dauerfestigkeit. N_0 und κ sind weitere Parameter, welche experimentell bestimmt werden. Diese Formulierung besticht zwar durch ihre Einfachheit, besitzt aber den Nachteil, daß sie die wirkliche Wöhlerlinie nur im Zeitfestigkeitsbereich hinreichend genau annähert. Für ein bereits geschädigtes Material benutzt man die gleiche Formulierung allerdings mit modifizierten Parametern N_0 , σ_{D0} und κ . Zur Änderung von N_0 und σ_{D0} finden sich entsprechende Hinweise bei Haibach (1989), Schott (1990) u. a.. Ein entsprechendes Verfahren, welches die mit zunehmender Schädigung abnehmende Dauerfestigkeit selbst als Parameter benutzt, wurde von Koczyk (1993) entwickelt. Es zeigt sich aber, daß sich auch der Exponent κ mit zunehmender Schädigung verändert, und daß diese Änderung innerhalb einer realistischen Lebensdauerberechnung zu berücksichtigen ist. Entsprechende Verfahren wurden von Schott (1992) sowie Zenner und Liu (1992) entwickelt.

2.2 Darstellung der Wöhlerlinie nach Stüssi

Die Identifikation der veränderlichen Dauerfestigkeit als wesentliche Größe zur Bestimmung der Schädigung erlaubt die Verwendung einer allgemeineren mathematischen Formulierung der Wöhlerlinie als Grundlage der Lebensdauerberechnung. Eine derartige Verallgemeinerung ist die von Stüssi vorgeschlagene Darstellung der Wöhlerlinie, die auch von Günther (1973) u. a. verwendet wird.

$$N = \bar{N}_0 \left(\frac{R_{m0} - \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_{D0}} \right)^\kappa \quad (\sigma_{D0} < \sigma_a < R_{m0}) \quad (3)$$

Hier bezeichnet R_{m0} den Anfangswert einer maximal ertragbaren Spannung, wobei dieser Wert nicht mit der Zugfestigkeit identisch sein muß, da diese auf den Ausgangsquerschnitt eines Probestabes bezogen wird, so daß die wirkliche Bruchspannung im Versagensfall wesentlich höher sein kann. Für ein spezielles Bauteil sind R_{m0}

und σ_{D0} durch die bauteilspezifischen Werte zu ersetzen. Die Größen N_0 und κ unterscheiden sich in Gleichung (2) und Gleichung (3) und sind demzufolge in Gleichung (3) durch einen Querstrich gekennzeichnet. Auch hier müssen die Parameter von Gleichung (3) experimentell bestimmt werden. Man kann sie aber, falls die entsprechenden Größen in Gleichung (2) bekannt sind, so bestimmen, daß sich eine möglichst gute Übereinstimmung im Bereich der Zeitfestigkeit ergibt. Es ist klar, daß beide Kurven mindestens einen gemeinsamen Punkt besitzen müssen, d. h. für eine bestimmte Spannungsamplitude $\sigma_a = \sigma_a^{(1)}$ müssen die entsprechenden Werte für N übereinstimmen. Setzt man weiter voraus, daß die Neigungen $\frac{dN}{d\sigma_a}$ und die Krümmungen, d. h. hier die zweiten Ableitungen $\frac{d^2N}{d\sigma_a^2}$ beider Kurven in diesem Punkt übereinstimmen, so erhält man

$$\sigma_a^{(1)} = \sqrt{R_{m0} \sigma_{D0}} \quad (4)$$

$$\bar{\kappa} = \kappa \frac{(R_{m0} - \sigma_a^{(1)})(\sigma_a^{(1)} - \sigma_{D0})}{\sigma_a^{(1)} (R_{m0} - \sigma_{D0})} \quad (5)$$

$$\bar{N}_0 = N_0 \left(\frac{\sigma_{D0}}{\sigma_a^{(1)}} \right)^\kappa \left(\frac{\sigma_a^{(1)} - \sigma_{D0}}{R_{m0} - \sigma_a^{(1)}} \right)^{\bar{\kappa}} \quad (6)$$

Für ein spezielles Zahlenbeispiel mit $\sigma_{D0} = 200 \text{ N/mm}^2$, $R_{m0} = 800 \text{ N/mm}^2$, $\kappa = 5$ und $N_0 = 2 \cdot 10^6$ ergibt sich demnach

$$\sigma_a^{(1)} = 400 \text{ N/mm}^2, \quad \bar{\kappa} = 1,667 \quad \text{und} \quad \bar{N}_0 = 19686.$$

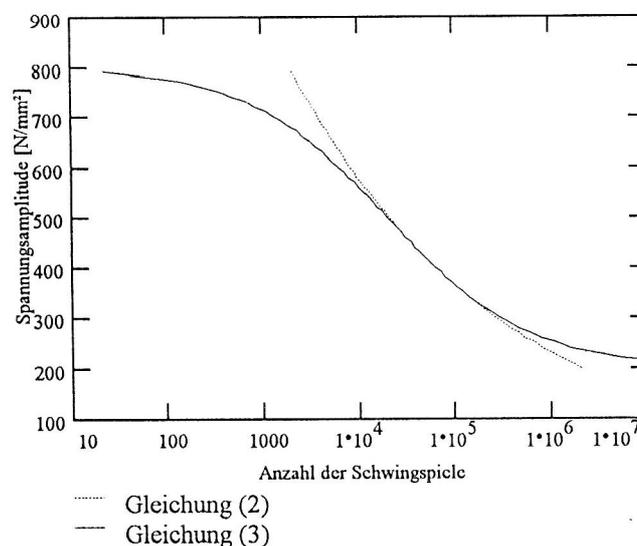


Bild 1. Wöhlerlinien entsprechend Gleichung (2) und Gleichung (3)

Beide Wöhlerlinien sind in Bild 1 dargestellt. Diese Näherung hat den Nachteil, daß sie den Übergang vom Bereich der Zeitfestigkeit in die horizontale Gerade der Dauerfestigkeit festschreibt, was zu erheblichen Differenzen in den Schwingspielzahlen bis zum Versagen des Bauteils führen kann.

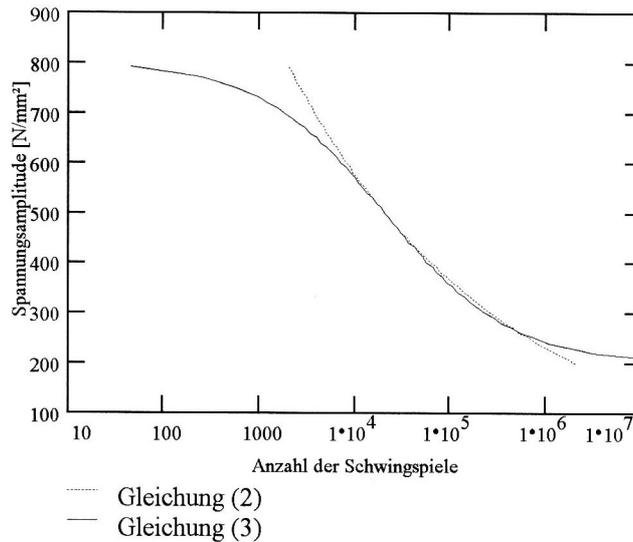


Bild 2. Wöhlerlinien bei veränderter Bezugsspannung

Es kann daher günstiger sein, die Bezugsspannung $\sigma_a^{(1)}$ nicht durch Gleichung (4), sondern durch

$$\sigma_a^{(1)} = \frac{R_{m0} + \sigma_{D0}}{2} \quad (7)$$

festzulegen. Die daraus resultierende Wöhlerlinie ist für das gegebene Beispiel mit $\bar{\kappa} = 1,5$ und $\bar{N}_0 = 20480$ in Bild 2 dargestellt.

Eine dritte Möglichkeit der Approximation besteht in der Festlegung zweier gemeinsamer Punkte der Gleichungen (2) und (3). Damit kann eine bessere Übereinstimmung im Bereich kleiner Spannungsamplituden erzielt werden. Für die Spannungswerte $\sigma_{a1} = 235 \text{ N/mm}^2$ und $\sigma_{a2} = 400 \text{ N/mm}^2$ erhält man $\bar{\kappa} = 1,273$ und $\bar{N}_0 = 25850$. Die daraus resultierende Wöhlerlinie ist in Bild 3 dargestellt.

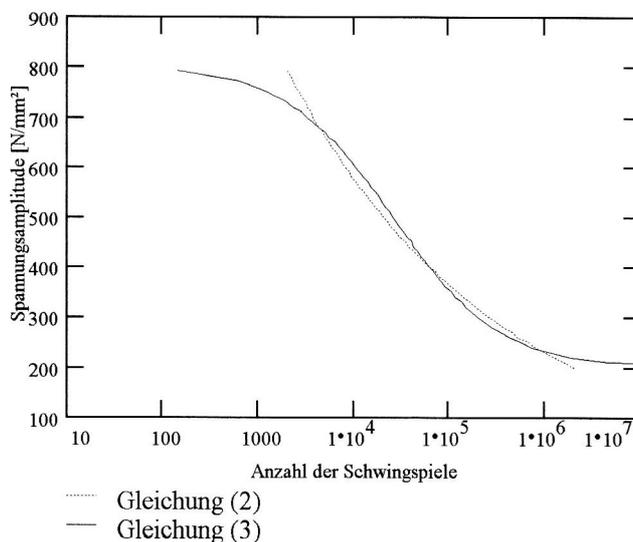


Bild 3. Übereinstimmung der Wöhlerlinien in 3 Punkten

Die Bezugnahme auf die Darstellung der Wöhlerlinie nach Stüssi erfordert daher nicht unbedingt eine erneute experimentelle Verifikation. Es ist aber anzustreben, die Parameter von Gleichung (3) direkt aus experimentellen Untersuchungen zu bestimmen, da Gleichung (2) auch nur eine sehr einfache Näherung der Wöhlerlinie darstellt. Voraussetzung zur Anwendung von Gleichung (3) ist, daß R_{m0} genau genug angegeben werden kann.

2.3 Folgewöhlerlinien

Zur phänomenologischen Beschreibung der Wöhlerlinie des geschädigten Materials ist es sinnvoll, diese in der gleichen Weise wie die des ungeschädigten Materials mathematisch zu formulieren, so daß sich nur die in den jeweiligen Ausgangsgleichungen enthaltenen Parameter ändern. Diese Annahme erscheint zunächst sehr einschränkend. Sie beinhaltet allerdings schon bei einer relativ geringen Zahl von Parametern zahlreiche Variationen, deren experimentelle Überprüfung nur mit entsprechend großem Aufwand realisiert werden kann. Entscheidend ist, wie sich diese Parameter mit zunehmender Schädigung ändern. In Koczyk (1993) wurde der aktuelle Wert der Dauerfestigkeit σ_D als der die Schädigung kennzeichnende Parameter gewählt. Es ist möglich, auch einen anderen formalen Parameter D einzuführen. Eine solche Wahl erfordert aber andererseits die Formulierung eines Zusammenhangs zwischen D und σ_D , was wiederum Probleme aufwerfen kann, da D nicht als materialspezifische Größe eingeführt wurde. Setzt man σ_D als konstant voraus, wie dies bei der Original-Miner-Regel der Fall ist, so hat das zur Folge, daß alle Schwingspiele mit Spannungsamplituden unterhalb σ_{D0} keinen Einfluß auf die Lebensdauer des betreffenden Bauteils haben. Es ist aber inzwischen erwiesen, daß dies nicht der Fall ist und daß sich der Einfluß dieser Schwingspiele mit zunehmender Schädigung verstärkt. Die Wahl von σ_D als kennzeichnende Größe der Schädigung erscheint somit gerechtfertigt. Geht man von Gleichung (2) aus, so gilt für die Folgewöhlerlinie

$$N = N_0(\sigma_D) \left(\frac{\sigma_D}{\sigma_a} \right)^{\kappa(\sigma_D)} \quad (\sigma_D < \sigma_a) \quad (8)$$

Setzt man den Exponenten κ als konstant voraus, so führt die weitere Rechnung wieder auf die Miner-Regel, allerdings mit dem Unterschied, daß die Schwingspiele, deren Spannungsamplituden zunächst noch unterhalb σ_{D0} liegen, erst dann einen weiteren Beitrag zur Schädigung leisten, wenn $\sigma_D < \sigma_a$ wird. Es folgt weiter, daß die Reihenfolge der Schwingspiele mit $\sigma_a > \sigma_{D0}$ keinen Einfluß auf die Schädigung hat. Dies entspricht aber nicht der Erfahrung, wie die zitierten Arbeiten zeigen. Eine weitere Verbesserung des Konzeptes entsprechend Gleichung (7) kann erreicht werden, wenn man auch den Exponenten κ als variable Größe voraussetzt. Ein solches Konzept wird in neueren Arbeiten, so z. B. von Schott (1990, 1992) sowie Zenner und Liu (1992) verfolgt.

In gleicher Weise kann man eine Verallgemeinerung des Stüssischen Konzeptes nach Gleichung (3) vornehmen.

$$N = \bar{N}_0(\sigma_D) \left(\frac{R_m(\sigma_D) - \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_D} \right)^{\bar{\kappa}(\sigma_D)} \quad (\sigma_D < \sigma_a < R_m) \quad (9)$$

Im folgenden werden \bar{N}_0 und $\bar{\kappa}$ als konstant vorausgesetzt, so daß nur R_m neben σ_D selbst als variable Größe verbleibt. Die maximal ertragbare Spannung R_m eines vorgeschädigten Bauteils oder Probekörpers ist vergleichsweise einfach experimentell zu ermitteln. Man kann, abgesehen von Einschwingvorgängen, annehmen, daß sich auch R_m mit zunehmender Schädigung vermindert. Dies kann im einfachsten Fall durch eine lineare Funktion realisiert werden.

$$R_m = R_{m0} \frac{\sigma_D}{\sigma_{D0}} \quad (10)$$

Die Festlegung der aktuellen Bruchspannung nach Gleichung (10) bewirkt, daß die Neigung der Folgewöhlerlinien im Bereich der Zeitfestigkeit mit der der Anfangswöhlerlinie übereinstimmt. Dies folgt aus den Gleichungen (4) und (5), wenn man R_{m0} und σ_{D0} durch die aktuellen Werte R_m und σ_D ersetzt. Durch Gleichung (10) entsteht also ein System von Folgewöhlerlinien entsprechend dem aus Gleichung (8) bei konstantem κ . Die Erfahrungen von Schott und Zenner deuten jedoch darauf hin, daß sich der Anstieg der Wöhlerlinie zunächst etwas vergrößert. Das bedeutet, daß der Abfall von R_m zunächst langsamer erfolgt als durch Gleichung (10) vorgeschrieben. Eine qualitative Erklärung dieses Sachverhaltes folgt aus den zwei Phasen der Schädigung. In der ersten Phase bis zur Bildung eines Anrisses bleibt R_m in etwa konstant und vermindert sich anschließend mit zunehmendem Rißwachstum. Es ist prinzipiell möglich, R_m zunächst näherungsweise als konstant anzunehmen. Dies erfordert allerdings eine gewisse Modifikation im Konzept der Lebensdauerberechnung.

3. Die Berechnung der Lebensdauer

3.1 Schädigung und Versagen

Im folgenden wird zunächst eine schwingende Beanspruchung mit einer konstanten Spannungsamplitude betrachtet. Die Schwingspielzahl bis zum Versagen ist dann durch Gleichung (3) gegeben. Für das gleiche vorgeschädigte Material bestimmt man die entsprechende Zahl der Schwingspiele nach Gleichung (9) mit konstan-

ten Parametern \bar{N}_0 und \bar{k} , während für R_m Gleichung (10) als gültig vorausgesetzt wird. Die Zahl n der Schwingspiele bis zu diesem Grad der Schädigung ist dann

$$n = \bar{N}_0 \left[\left(\frac{R_{m0} - \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_{D0}} \right)^{\bar{k}} - \left(\frac{R_m - \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_D} \right)^{\bar{k}} \right] \quad (\sigma_{D0} < \sigma_a < R_{m0}) \quad (11)$$

Das Versagen erfolgt, wenn R_m auf den Wert von σ_a gefallen ist, so daß im letzten Schwingspiel der abschließende Gewalt- oder Restbruch erfolgt. Eine solche Vorgehensweise ist nicht möglich, falls R_m als konstant angenommen wird. Es ist dann notwendig, ein anderes Kriterium für das Versagen des Materials zu formulieren. Das gleiche Problem tritt übrigens auch auf, wenn man von der Formulierung nach Basquin für die Wöhlerlinie ausgeht, da dort eine maximale Bruch- oder Grenzspannung gar nicht vorkommt, was eine zusätzlich Annahme erfordert. In diesem Fall ist ein unterer Grenzwert $\sigma_D = \sigma_{DG}$ als Versagenskriterium festzulegen, der allerdings schwierig zu ermitteln ist, so daß man denselben oft gleich Null setzen wird. Die Festlegung $R_m = \sigma_a$ führt demgegenüber unmittelbar wieder auf Gleichung (3) der Wöhlerlinie und entspricht auch qualitativ dem Bruchverhalten eines Bauteils.

Nach n Schwingspielen mit der Spannungsamplitude σ_a bestimmt man den aktuellen Wert von σ_D aus Gleichung (10) und (11) zu

$$\sigma_D = \sigma_a \frac{C+1}{C + \frac{R_{m0}}{\sigma_{D0}}} \quad (12)$$

Hier bedeutet C

$$C = \left[\left(\frac{R_{m0} - \sigma_a}{\sigma_a - \sigma_{D0}} \right)^{\bar{k}} - \frac{n}{\bar{N}_0} \right]^{\frac{1}{\bar{k}}} \quad (13)$$

Zu dem neuen Wert für σ_D gehört ein neuer Wert für R_m gemäß Gleichung (10). Es ist zu überprüfen, ob R_m bereits unter σ_a gefallen ist. Wenn ja, so erfolgt das Versagen bereits bei einer Schwingspielzahl $< n$, und die tatsächliche Zahl der Schwingspiele $n_g = N$ ergibt sich aus Gleichung (3), da der zweite Term in Gleichung (11) verschwindet. Falls aber gilt $R_m > \sigma_a$, so sind R_m und σ_D die neuen Parameterwerte der Folgewöhlerlinie und man kann die Berechnung jetzt mit neuen Werten für n und σ_a fortsetzen. Auf diese Weise kann ein vorgegebenes Belastungsprogramm Schwingspiel für Schwingspiel bis zum Versagen des Bauteils abgearbeitet werden. Die Berechnungsvorschrift enthält formal auch den Fall der statischen Belastung, der eintritt, wenn bereits im ersten Schwingspiel R_{m0} erreicht wird.

3.2 Einfluß der Mittelspannung

Das vorgestellte Konzept erlaubt in einfacher Weise die Berücksichtigung von Schwingspielen bei unterschiedlichen Mittelspannungen σ_m . Für $\sigma_m > 0$ ist σ_a im Zähler von Gleichung (3) und (11) durch die vorhandene Oberspannung $\sigma_a + \sigma_m$ zu ersetzen. Den Einfluß der Mittelspannung auf σ_D berücksichtigt man näherungsweise durch die Mittelspannungsempfindlichkeit M , die hier als konstant vorausgesetzt wird.

$$\Delta\sigma_D = -M \cdot \sigma_m. \quad (14)$$

Damit erhält man die folgende Verallgemeinerung von Gleichung (10)

$$n = \bar{N}_0 \left[\left(\frac{R_{m0} - \sigma_m - \sigma_a}{\sigma_a - (\sigma_{D0} - M \cdot \sigma_m)} \right)^{\bar{k}} - \left(\frac{R_m - \sigma_m - \sigma_a}{\sigma_a - (\sigma_D - M \cdot \sigma_m)} \right)^{\bar{k}} \right] \quad (15)$$

mit $(\sigma_{D0} - M\sigma_m < \sigma_a < R_{m0} - \sigma_m)$.

Für n Schwingspiele mit der Spannungsamplitude σ_a und der Mittelspannung σ_m folgen dann analog zu den Gleichungen (10), (12) und (13) die Parameter σ_D und R_m der Folgewöhlerlinie und Versagen tritt auf für

$$\sigma_a + \sigma_m = R_m \quad (16)$$

Die hierfür erforderliche Schwingspielzahl kann dann aus Gleichung (15) bestimmt werden, da der zweite Ausdruck verschwindet. Es ist damit möglich, einen Belastungsvorgang mit einer stochastischen Verteilung der

Spannungsamplituden und Mittelspannungen zu bearbeiten, der in Form einer Rain-Flow-Matrix gegeben ist. Das Ergebnis hängt von der Reihenfolge der Schwingspiele ab, so daß sich eine obere und eine untere Grenze für die zu erwartende Lebensdauer ergibt, je nachdem ob die günstigste oder die ungünstigste Reihenfolge der Schwingspiele gewählt wurde.

3.3 Rechenprogramm, Einfluß der Reihenfolge

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß R_{m0} , σ_{D0} sowie \bar{N}_0 und \bar{k} für einen Probestab oder ein Bauteil bekannt sind. Gegeben sei ferner ein Belastungsprogramm als Folge von Schwingspielen: σ_{a1} , σ_{m1} , n_1 / σ_{a2} , σ_{m2} , n_2 / σ_{a3} , σ_{m3} , n_3 /

Diese werden in der vorgegebenen Reihenfolge abgearbeitet. Man erhält für den i -ten Zyklus

$$C_i = \left[\left(\frac{R_{m,i-1} - \sigma_{mi} - \sigma_{ai}}{\sigma_{ai} - (\sigma_{Di-1} - M \sigma_{mi})} \right)^{\bar{k}} - \frac{n_i}{\bar{N}_0} \right]^{\frac{1}{\bar{k}}} \quad (17)$$

und somit die Ausgangswerte für den nächsten Zyklus

$$\sigma_{Di} = \frac{\sigma_{ai} (1 + C_i) + \sigma_{mi} (1 + M C_i)}{C_i + \frac{R_{m,i-1}}{\sigma_{Di-1}}} \quad (18)$$

und

$$R_{mi} = \frac{R_{m,i-1}}{\sigma_{Di-1}} \sigma_{Di} \quad (19)$$

Diese Werte sind gültig, falls gilt: $R_{mi} > \sigma_{ai} + \sigma_{mi}$, sonst ergibt sich anstelle von n_i die restliche Zahl der Schwingspiele zu

$$n_r = \bar{N}_0 \left(\frac{R_{m,i-1} - \sigma_{mi} - \sigma_{ai}}{\sigma_{ai} - (\sigma_{Di-1} - M \sigma_{mi})} \right)^{\bar{k}} \quad (20)$$

3.4 Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen die Leistungsfähigkeit des entwickelten Berechnungsverfahrens demonstrieren. Es ist aber andererseits klar, daß das Ergebnis von der Genauigkeit der Anfangswerte und den getroffenen Annahmen abhängt.

3.4.1 Zweistufenversuch

Ein Bauteil mit den in Abschnitt 2.2 gegebenen Zahlenwerten sei das Belastungsprogramm durch $\sigma_{a1} = 400$ N/mm², $n_1 = 30000$ und $\sigma_{a2} = 300$ N/mm², $n_2 = 200000$ gegeben. Die Parameter der Wöhlerlinie nach Gleichung (3) wurden mittels der Gleichungen (4), (5) und (6) bestimmt. Arbeitet man dieses Programm in der Folge $\sigma_{a1} \Rightarrow \sigma_{a2}$ ab, so erfolgt der Bruch bei der Spannungsamplitude σ_{a2} nach 139866 Schwingspielen, so daß sich insgesamt eine Schwingspielzahl $n_{B1} = 169866$ bis zum Bruch ergibt. Bei Umkehr der Reihenfolge, d. h. zuerst die n_2 Schwingspiele mit der Spannungsamplitude σ_{a2} , verbleiben noch 20046 Schwingspiele mit σ_{a1} bis zum Bruch, so daß die Gesamtzahl der Schwingspiele bis zum Bruch $n_{B2} = 220046$ beträgt.

Zur Berechnung der Lebensdauer nach der Miner-Regel ergibt $n_{BM} = 185577$, wobei die Grenzwerte N_1 und N_2 der Schwingspiele nach Gleichung (2) bestimmt wurden.

Eine Verkürzung der Teilfolgen führt zu einer Annäherung beider Grenzwerte, entsprechend der folgenden Tabelle 1:

n_1	n_2	n_{B1}	n_{B2}
15000	100000	180352	217642
3000	20000	186167	204001
300	2000	193201	192954
30	200	192284	192270

Tabelle 1. Grenzschwingspielzahlen bei unterschiedlichen Teilfolgen

Mit Verkürzung der Teilfolgen, d. h. mit immer besserer Durchmischung nähern sich die Zahlen n_{B1} und n_{B2} der Schwingspiele einem Grenzwert. Dabei kann es sein, daß sich Ober- und Untergrenze „überschneiden“, je nachdem, ob $R_m = \sigma_{a1}$ oder $R_m = \sigma_{a2}$ als Abbruchkriterium infrage kommt. Der Grenzwert liegt hier deutlich über der Schwingspielzahl, die nach der Miner-Regel errechnet wurde. Dies ergibt sich daraus, daß die Wöhlerlinie Gleichung (3) mit den gewählten Parameterwerte im Bereich nahe der Dauerfestigkeit deutlich höhere Werte für N liefert (siehe auch Bild 1).

3.4.2 Blockprogrammversuch

Dem folgenden Beispiel liegt eine Normalverteilung der Spannungsamplituden zugrunde, die u. a. von Haibach (1989) für Betriebsfestigkeitsberechnungen verwendet wird (Tabelle 2). Diese Verteilung wurde ausgehend von den höchsten Spannungswerten in einem Block zweimal durchlaufen.

σ_a N/mm ²	300	285	255	217.5	172.5	127.5	82.5	37.5
n_i	1	8	140	1360	10000	46000	140000	302500

Tabelle 2. Spannungsverteilung und Häufigkeit

Da aufgrund der gegebenen Häufigkeitsverteilung die wesentlichen Anteile der Schädigung bei Spannungsamplituden zu erwarten sind, die in der Größe von σ_{D0} liegen, wurde, um vergleichbare Ergebnisse zu erhalten, die Wöhlerlinie nach Gleichung (3) bei Verwendung der Ausgangsgrößen von Abschnitt 2.2 durch die folgenden Parameter festgelegt: $\bar{\kappa} = 1,615$, $\bar{N}_0 = 2810$, $\sigma_{D0} = 100$ N/mm² und $R_m = 800$ N/mm². Diese Festlegung entspricht einer Wöhlerlinie nach Gleichung (2) bei $N_0 = 10^6$ und $\kappa = 4$. Die daraus resultierenden Wöhlerlinien sind in Bild 4 dargestellt.

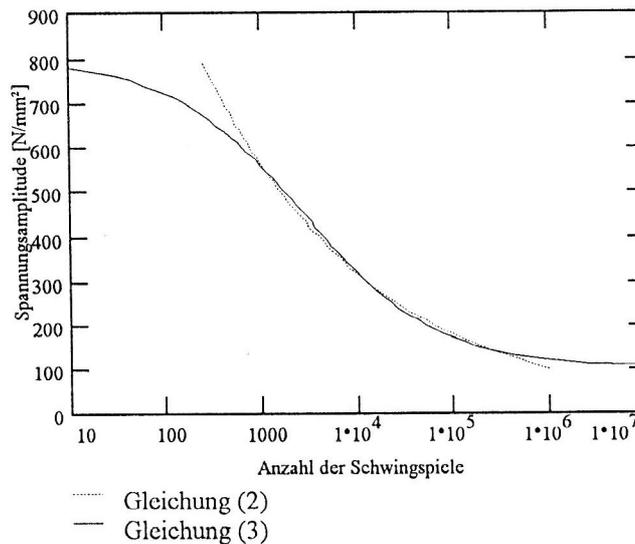


Bild 4. Verbesserte Approximation der Wöhlerlinie

Die Berechnung der Gesamtzahl der Schwingspiele wurde in der gegebenen Reihenfolge und in auf- und absteigender Reihenfolge innerhalb eines Blocks durchgeführt. Desgleichen wurde bei sonst gleichem Verhältnis der Amplituden und Häufigkeiten die maximale Spannung verändert. Je nach Reihenfolge ergeben sich unterschiedliche Werte der Lebensdauer. Diese sind in Tabelle 3 dargestellt. Sie differieren in Abhängigkeit von der Reihenfolge der Schwingspiele relativ stark für größere $\sigma_{a\max}$, während dieser Einfluß für kleinere $\sigma_{a\max}$ immer mehr zurückgeht, da die Blöcke mehrfach abgearbeitet werden.

$\sigma_{a\max}$ N/mm ²	$N [h \rightarrow l]$	N [Eingabe]	$N [l \rightarrow h]$
400	32 978	71 352	977 637
300	1 075 541	1 530 729	2 711 784
250	5 011 276	5 051 013	5 998 668
200	27 046 560	27 526 080	28 974 530

Tabelle 3. Lebensdauer bei unterschiedlicher Reihenfolge

Man kann ferner eine sehr gute Übereinstimmung mit Resultaten von Haibach (1989) im Bereich mittlerer Werte von $\sigma_{a\max}$ feststellen, während sich für kleinere $\sigma_{a\max}$ höhere und für größere $\sigma_{a\max}$ geringere Lebensdauerwerte ergeben. Dies ist einmal darauf zurückzuführen, daß der Übergang der Wöhlerlinie in die horizontale Dauerfestigkeitsgerade im Bereich kleiner Spannungswerte berücksichtigt wird, und zum anderen macht sich bei größeren Spannungsamplituden der Einfluß der Bruchspannung bemerkbar.

3.4.3 Einfluß der Mittelspannung

Im folgenden Beispiel enthält das Belastungsprogramm auch Schwingspiele mit veränderlicher Mittelspannung entsprechend Tabelle 4. Das vollständige Programm enthält diese Schwingspiele nochmals in umgekehrter Reihenfolge. Die Kennwerte des Materials entsprechen denen des vorhergehenden Beispiels, wobei die Mittelspannungsempfindlichkeit $M = 0,1$ angenommen wurde.

i	σ_a N/mm ²	σ_m N/mm ²	n_i
1	300	0	10
2	200	50	60
3	250	100	230
4	100	150	700
5	250	0	800
6	100	50	3000
7	150	100	5200
8	100	0	20000
9	50	50	30000
10	100	-50	20000

Tabelle 4. Veränderliche Mittelspannung

Die berechnete Lebensdauer ist wiederum von der Reihenfolge abhängig, in der die einzelnen Zyklen des Belastungsprogramms abgearbeitet werden. Das Versagen erfolgt, wenn die Oberspannung eines Schwingspiels den aktuellen Wert von R_m erreicht oder überschreitet, so daß dieses Versagen bei unterschiedlichen Werten für R_m eintreten kann. Die Gesamtzahl N der Schwingspiele ist $N = 645736$, wenn diese in der Reihenfolge der Eingabe abgearbeitet werden. Sie beträgt $N = 640001$, wenn das Belastungsprogramm zuvor nach der Größe der Oberspannungen in absteigender Folge geordnet wird und $N = 787234$ bei aufsteigender Folge der Oberspannungen.

4. Zusammenfassung

Durch die Einführung materialspezifischer Kenngrößen zur Kennzeichnung der Schädigung anstelle eines formalen Parameters kann die Berechnung der Lebensdauer schwingend beanspruchter Bauteile verbessert werden. Es gelingt ferner, die Beschränkung auf eine spezielle mathematische Darstellung der Wöhlerlinie aufzuheben und durch Einführung eines speziellen Kriteriums den Vorgang des Versagens besser entsprechend dem wirklichen Verlauf zu modellieren. Damit wird es möglich, sowohl die Reihenfolge, in der die Schwingspiele das Bauteil belasten, als auch eine von Null verschiedenen Mittelspannung zu berücksichtigen, so daß ein Belastungsvorgang, der durch eine Rainflow-Matrix gegeben ist, in verschiedener Weise abgearbeitet werden kann. Das vorgeschlagene Versagenkriterium setzt die Kenntnis des Zusammenhangs zwischen dem aktuellen Wert der Dauerfestigkeit und der gleichfalls veränderlichen Bruchspannung voraus. Hier wurde als einfachste Möglichkeit eine lineare Abhängigkeit gewählt. Obwohl man diese Annahme durchaus nicht als gesichert ansehen kann, ergeben sich in bestimmten Bereichen bemerkenswerte Übereinstimmungen mit anderen Berechnungsverfahren. Plastische Verformungen bei entsprechend großen Oberspannungen und die damit verbundenen Eigenspannungszustände bei nachfolgender Entlastung können zu einer Veränderung der Lebensdauer gegenüber den berechneten Werten führen. Dieser Fall tritt bei inhomogenen Spannungszuständen z. B. in gekerbten Bauteilen auf. Eine Erweiterung der Theorie in dieser Hinsicht als auch im Hinblick auf mehrachsige Spannungszustände sollte zu einer weiteren Verbesserung in der Vorhersage der zu erwartenden Lebensdauer führen.

Literatur

1. Buxbaum, O.: Betriebsfestigkeit - Sichere und wirtschaftliche Bemessung schwingbruchgefährdeter Bauteile, Verlag Stahleisen, Düsseldorf, (1988)
2. Cottin, D.; Puls, E.: Angewandte Betriebsfestigkeit, Carl Hanser Verlag, München Wien, (1992)
3. Franke, L.: Schadensakkumulationsregel für dynamisch beanspruchte Werkstoffe und Bauteile, Bauingenieur, 60, (1985a)
4. Franke, L.: Voraussage der Betriebsfestigkeit von Werkstoffen und Bauteilen unter besonderer Berücksichtigung der Schwinganteile unterhalb der Dauerfestigkeit, Bauingenieur, 60, (1985b)
5. Gnille, W.: Lebensdauerberechnung der Maschinenelemente, Verlag Technik, Berlin, (1980)
6. Günther, W.: Schwingfestigkeit, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, (1973)
7. Haibach, E.: Betriebsfestigkeit - Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung, VDI-Verlag, Düsseldorf, (1989)
8. Heuler, P.; Schütz, W.: Grundsätzliche Probleme der Lebensdauervorhersage für schwingend beanspruchte Bauteile, 14. Vortragsveranstaltung des DMV-Arbeitskreises Betriebsfestigkeit, Berlin, (1988)
9. Koczyk, S.: Zur Verwendung der Dauerfestigkeit als Schädigungskriterium bei Betriebsfestigkeitsuntersuchungen, Bauingenieur, 68, (1993)
10. Lemaitre, J.: A Course on Damage Mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, (1992)
11. Nowack, H.: Instrumentarium des analytischen Betriebsfestigkeitsnachweises, 14. Vortragsveranstaltung des DMV-Arbeitskreises Betriebsfestigkeit, Berlin, (1988)
12. Schütz, W.; Zenner, H.: Schadensakkumulationshypothesen zur Lebensdauervorhersage bei schwingender Beanspruchung - ein kritischer Überblick, Zeitschr. f. Werkstofftechnik, 4, (1973)
13. Schott, G.: Werkstoffermüdung, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, (1985)
14. Schott, G.: Lebensdauerberechnung mit Werkstoffermüdungsfunktionen, Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig, (1990)
15. Schott, G.: Lebensdauerberechnung bei veränderlicher Mittelspannung nach dem FWK-Konzept, Zeitschr. f. Materialwiss. u. Werkstofftech., 23, (1992)
16. Vormwald, M.; Seeger, T.: Betriebsfestigkeitsnachweise in verschiedenen Technikbereichen - Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Entwicklungen, 14. Vortragsveranstaltung des DMV-Arbeitskreises Betriebsfestigkeit, Berlin, (1988)
17. Zammert, W.-U.: Betriebsfestigkeitsberechnung, Verlag F. Vieweg & Sohn, Braunschweig/Wiesbaden, (1985)
18. Zenner, H.; Liu, J.: Vorschlag zur Verbesserung der Lebensdauerabschätzung nach dem Nennspannungskonzept, Konstruktion, 44, (1992)

Anschrift: Dozent Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg