

# Ein räumlich gekrümmtes Balkenelement

## Teil I: Theoretische Grundlagen

S. Koczyk, G. Fritzsche, W. Lenz

*Zur Berechnung des Spannungs- und Verformungszustandes räumlich gekrümmter und verwundener Balken und Drähte wird ein räumlich gekrümmtes und verwundenes Balkenelement entwickelt. Die Gestalt dieses Elementes ist in einem lokalen Koordinatensystem durch Polynome 3. Grades gegeben, die durch die Winkel der gekrümmten Stabachse an den Stabendknoten mit der Verbindungsgeraden dieser Knotenpunkte bestimmt sind. Durch diese geometrische Konzeption läßt sich ein beliebig gekrümmter Balken schon mit einer geringen Zahl von Elementen modellieren, während eine wesentlich größere Zahl gewählt werden muß, wenn man den gekrümmten Balken durch gerade Balkenelemente approximiert. Zum anderen bietet dieses Element aber auch die Möglichkeit, durch Aktualisierung der Geometrie bei schrittweiser Belastung große Verformungen des betrachteten Balkens zu bestimmen.*

### 1 Allgemeines

Gekrümmte Balken und Träger werden in vielen technischen Bereichen als Bauteile verwendet. Man zählt hierzu auch Drähte deren Querschnittsabmessungen gegenüber ihrer Länge sehr klein sind und die auf Grund ihrer geringen Biegesteifigkeit in Litzen und Drahtseilen als biegsame Elemente zur Kraftübertragung Verwendung finden. Bei der rechnerischen Behandlung derartiger Elemente muß man berücksichtigen, daß sie normalerweise schon im unbelasteten Ausgangszustand in räumlich gekrümmter Form vorliegen und natürlich auch bei Belastung räumlich gekrümmt sind. Dieser Umstand erschwert ihre Analyse mit der Methode der Finiten Elemente, so daß in vielen Arbeiten noch immer die analytische Methode zur Spannungs- und Verformungsanalyse räumlich gekrümmter Stäbe bevorzugt wird (Möhlenkamp, 1977; Bourgat u.a., 1980; Jaklin, 1981; Panayotounakos und Theocaris, 1981; Stein, 1983; Wolf, 1984; Swetlinskij, 1978, 1987, 1989). Während der gerade Stab und der gerade Balken die klassischen Objekte der FE - Analyse darstellen (Zienkiewicz, 1989), benutzt man zur Behandlung räumlich gekrümmter Drähte oft Elementformulierungen, die schon die Ausgangsgeometrie stark vereinfachen. Im einfachsten Fall ersetzt man den räumlich gekrümmten Draht oder Balken durch eine große Zahl gerader Elemente. Auf diese Vereinfachung muß man zurückgreifen, wenn das verwendete Programmsystem keine gekrümmten Elemente bereitstellt. Eine weitere, verbesserte Modellierung ist mit eben gekrümmten Elementen möglich. Dabei wird die räumliche Krümmung durch ebene gekrümmte Elemente angenähert, die in den Knotenpunkten gegeneinander verdreht sind, so daß sich die Windung der so modellierten Raumkurve unstetig ändert. In letzter Zeit sind Arbeiten bekannt geworden (Wolf, 1986), die schraubenlinienförmige Elemente konstanter Krümmung und Windung verwenden und damit eine Raumkurve wesentlich besser darstellen können. Das im folgenden vorgeschlagene Element zeichnet sich durch eine stetige Änderung von Krümmung und Windung aus und ist damit besser in der Lage, die bei großen räumlichen Verformungen entstehende Geometrie anzunähern.

### 2 Elementformulierung

#### 2.1 Geometrie des Balkens

Es wird ein räumlich gekrümmter Balken betrachtet (Bild 1). Die gestreckte Länge des Balkens sei  $L$ . Die Endpunkte des Balkens sind im lokalen Koordinatensystem die Knoten 1 und 2. Im Knoten 1 wird ein kartesisches Koordinatensystem etabliert, dessen  $z$ -Achse in der Verbindungsgeraden 1 - 2 liegt. Der Abstand der beiden Knoten auf der  $z$ -Achse werde mit  $L_z$  bezeichnet. Die Achsen  $x$  und  $y$  sind zunächst noch nicht in einer bestimmten Weise fixiert. Es wird weiter vorausgesetzt, daß der betrachtete Balken nur an den Knoten 1 und 2 belastet ist. Zwischen den Knoten 1 und 2 sei die Form des gekrümmten Balkens als Funktion 3. Grades der Koordinate  $z$  gegeben.

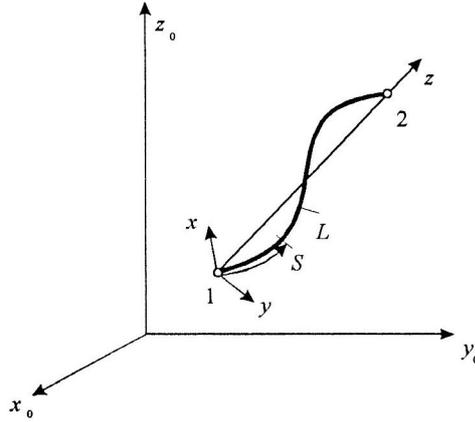


Bild 1. Der räumlich gekrümmte Balken

Die Projektionen der Balkenmittellinie in die  $x$ - $z$  bzw. in die  $y$ - $z$  Ebene bilden mit der  $z$ -Achse die Winkel  $\varphi_x$  und  $\varphi_y$ . Damit liegt die Form der gekrümmten Stabachse fest. Man kann diese in Bezug auf das kartesische Koordinatensystem folgendermaßen beschreiben, wobei die hochgestellten Indizes auf die Knoten 1 und 2 verweisen:

$$x = L_z \left[ \left( \frac{z}{L_z} \right) \tan \varphi_x^{(1)} - \left( \frac{z}{L_z} \right)^2 \left( 2 \tan \varphi_x^{(1)} + \tan \varphi_x^{(2)} \right) + \left( \frac{z}{L_z} \right)^3 \left( \tan \varphi_x^{(1)} + \tan \varphi_x^{(2)} \right) \right] \quad (1)$$

$$y = L_z \left[ \left( \frac{z}{L_z} \right) \tan \varphi_y^{(1)} - \left( \frac{z}{L_z} \right)^2 \left( 2 \tan \varphi_y^{(1)} + \tan \varphi_y^{(2)} \right) + \left( \frac{z}{L_z} \right)^3 \left( \tan \varphi_y^{(1)} + \tan \varphi_y^{(2)} \right) \right] \quad (2)$$

Die Ableitungen von  $x$  und  $y$  nach  $z$  sind:

$$\frac{dx}{dz} = \tan \varphi_x^{(1)} - 2 \left( \frac{z}{L_z} \right) \left( 2 \tan \varphi_x^{(1)} + \tan \varphi_x^{(2)} \right) + 3 \left( \frac{z}{L_z} \right)^2 \left( \tan \varphi_x^{(1)} + \tan \varphi_x^{(2)} \right) \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dz} = \tan \varphi_y^{(1)} - 2 \left( \frac{z}{L_z} \right) \left( 2 \tan \varphi_y^{(1)} + \tan \varphi_y^{(2)} \right) + 3 \left( \frac{z}{L_z} \right)^2 \left( \tan \varphi_y^{(1)} + \tan \varphi_y^{(2)} \right) \quad (4)$$

Die gesamte Bogenlänge  $L$  folgt durch Integration zu :

$$L = \int_0^{L_z} \sqrt{1 + \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2} dz \quad (5)$$

Mit der gekrümmten Stabachse ist ein querschnittsbezogenes Koordinatensystem verbunden. Die beiden senkrecht zur Tangente orientierten Achsen  $x_1$  und  $y_1$  entsprechen den Achsen des Stabquerschnitts und sind normalerweise seine Hauptachsen. Die Orientierung dieses begleitenden Dreibeins  $x_1, y_1, z_1$  ist gegenüber dem Bezugssystem  $x, y, z$  durch einen weiteren Winkel  $\psi_1$  festgelegt (Bild 2). Dieser Winkel wird als lineare Funktion der Koordinate  $z$  angesehen, so daß mit seinen Werten an den Knoten 1 und 2 die geometrische Form des Stabes vollständig bestimmt ist.

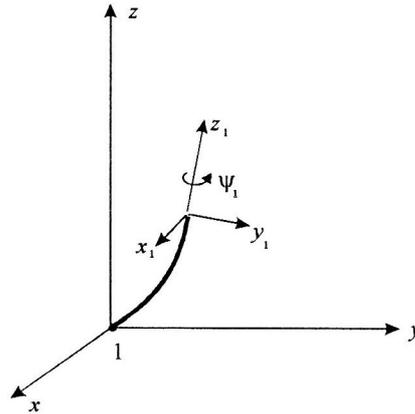


Bild 2. Orientierung des begleitenden Dreieins

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß der Balken diese Geometrie auch bei Belastung beibehält. Die Geometrie des belasteten Balkens ist damit durch die Verschiebungen und Verdrehungen der beiden Knoten gegeben und kann bei schrittweiser Lastfolge von Schritt zu Schritt aktualisiert werden. In einer allgemeineren Betrachtungsweise kann der Winkel  $\psi_1$  als quadratische Funktion von  $z$  angenommen werden. Dies erfordert einen weiteren Stützwert in der Mitte des gekrümmten Stabelementes.

## 2.2 Transformation der Koordinatensysteme

Die Herleitung der Steifigkeitsmatrix erfolgt in Bezug auf ein lokales Koordinatensystem, dessen  $z$ -Achse durch die Gerade zwischen den beiden Knoten 1 und 2 des gekrümmten Stabes gegeben ist. Die Transformation dieses Systems auf das raumfeste Bezugssystem  $x_0, y_0, z_0$  erfolgt durch drei Drehungen um die Winkel  $\varphi_0, \vartheta_0$  und  $\psi_0$ . Die Winkel  $\varphi_0$  und  $\vartheta_0$  sind durch die Orientierung der Geraden zwischen den Knoten 1 und 2 gegeben, während der Winkel  $\psi_0$  noch nicht eindeutig festliegt und willkürlich zu  $\psi_0 = 0$  gewählt werden kann. Man kann andererseits davon ausgehen, daß die Position des lokalen Systems  $x_1, y_1, z_1$  in Bezug auf das globale System  $x_0, y_0, z_0$  in den beiden Knoten bekannt ist, so daß man da die entsprechenden Winkel  $\varphi_{01}, \vartheta_{01}$  und  $\psi_{01}$  des Stabes angeben kann. Zwischen beiden Koordinatensystemen bestehen dann bis auf jeweils eine Konstante die Beziehungen:

$$x_1 = x_0 (\cos \varphi_{01} \cos \vartheta_{01} \cos \psi_{01} - \sin \varphi_{01} \sin \psi_{01}) + y_0 (\sin \varphi_{01} \cos \vartheta_{01} \cos \psi_{01} + \cos \varphi_{01} \sin \psi_{01}) - z_0 \sin \vartheta_{01} \cos \psi_{01} \quad (6)$$

$$y_1 = -x_0 (\cos \varphi_{01} \cos \vartheta_{01} \sin \psi_{01} + \sin \varphi_{01} \cos \psi_{01}) - y_0 (\sin \varphi_{01} \cos \vartheta_{01} \sin \psi_{01} - \cos \varphi_{01} \cos \psi_{01}) + z_0 \sin \vartheta_{01} \sin \psi_{01} \quad (7)$$

$$z_1 = x_0 \cos \varphi_0 \sin \vartheta_0 + y_0 \sin \varphi_0 \sin \vartheta_0 + z_0 \cos \vartheta_0 \quad (8)$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{A} \mathbf{X}_0 \quad (9)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt für die Basisvektoren. Zwischen dem System  $x, y, z$  und dem globalen Koordinatensystem besteht eine analoge Transformationsbeziehung

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{X}_0 \quad (10)$$

mit den Winkeln  $\varphi_0, \vartheta_0$  und  $\psi_0 = 0$ . Diese Winkel kann man folgendermaßen bestimmen. Die Richtungskosinus der Verbindungsgeraden der Knoten 1 und 2 berechnet man mit

$$L_z = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (11)$$

zu

$$\cos \alpha_{x_0} = \frac{1}{L_z} (x_2 - x_1) \quad \cos \alpha_{y_0} = \frac{1}{L_z} (y_2 - y_1) \quad \cos \alpha_{z_0} = \frac{1}{L_z} (z_2 - z_1) \quad (12)$$

Die Winkel  $\varphi_0, \vartheta_0$  ergeben sich dann aus

$$\vartheta_0 = \alpha_{z_0} \quad (13)$$

$$\cos \varphi_0 = \frac{\cos \alpha_{x_0}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_{x_0} + \cos^2 \alpha_{y_0}}} \quad \sin \varphi_0 = \frac{\cos \alpha_{y_0}}{\sqrt{\cos^2 \alpha_{x_0} + \cos^2 \alpha_{y_0}}} \quad (14)$$

so daß man damit auch die Transformationsmatrix **B** angeben kann.

Es sind schließlich noch die Transformationsbeziehungen zwischen dem lokalen System  $x, y, z$  und dem begleitenden Dreibein  $x_1, y_1, z_1$  anzugeben. Analog gilt

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{C} \mathbf{X} \quad (15)$$

Zwischen den Transformationsmatrizen besteht somit der Zusammenhang:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \quad (16)$$

Diese Matrixgleichungen gelten gesondert für jeden der beiden Knoten eines Stabes, und man kann somit auch die Winkel,  $\varphi_x^{(1)}, \varphi_y^{(1)}, \varphi_x^{(2)}$  und  $\varphi_y^{(2)}$  angeben.

$$\begin{aligned} \tan \varphi_x^{(1)} &= \frac{c_{31}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} & \tan \varphi_y^{(1)} &= \frac{c_{32}^{(1)}}{c_{33}^{(1)}} \\ \tan \varphi_x^{(2)} &= \frac{c_{31}^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} & \tan \varphi_y^{(2)} &= \frac{c_{32}^{(2)}}{c_{33}^{(2)}} \end{aligned} \quad (17)$$

Der Definitionsbereich der  $\varphi_x^{(i)}$  und  $\varphi_y^{(i)}$  ist durch  $-\frac{\pi}{2} < \varphi_x^{(i)}, \varphi_y^{(i)} < +\frac{\pi}{2}$  gegeben, wobei allerdings gilt

$$|\varphi_x^{(i)}|, |\varphi_y^{(i)}| \ll \frac{\pi}{2}.$$

Den Winkel  $\psi^{(i)}$  berechnet man gleichfalls aus den Koeffizienten der Matrix **C**, wobei man die Drehungen des Systems  $x, y, z$  in der folgenden Weise realisiert (Bild 3):

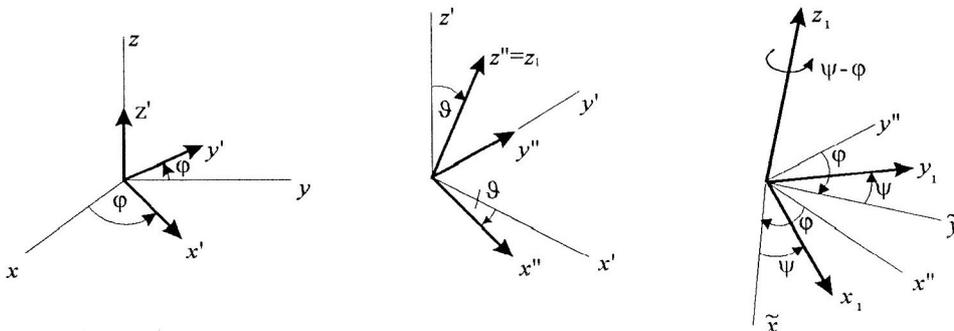


Bild 3. Übergang zwischen den Systemen  $x, y, z$  und  $x_1, y_1, z_1$

Nach den Drehungen um die Winkel  $\varphi^{(i)}$  und  $\vartheta^{(i)}$ , die zur Überführung des Systems  $x, y, z$  in seine neue Position ausgeführt werden, erfolgt eine Rückdrehung um den Winkel  $\varphi^{(i)}$  und anschließend die Drehung um den Winkel  $\psi^{(i)}$  jeweils um die Achse  $z_1$ . Auf diese Weise wird eine sprunghafte Änderung des Winkels  $\varphi^{(i)}$  vermieden und der Winkel  $\psi^{(i)}$  geht für  $\vartheta^{(i)} \rightarrow 0$  stetig in den für den geraden Stab vorgegebenen Wert über.

Für einen beliebigen Punkt des Stabes erhält man explizit für die Matrixgleichung (15) mit  $\bar{\psi}_1 = \psi_1 - \varphi_1$

$$x_1 = x[\cos\varphi_1 \cos\vartheta_1 \cos\bar{\psi}_1 - \sin\varphi_1 \sin\bar{\psi}_1] + y[\sin\varphi_1 \cos\vartheta_1 \cos\bar{\psi}_1 + \cos\varphi_1 \sin\bar{\psi}_1] - z \sin\vartheta_1 \cos\bar{\psi}_1 \quad (18)$$

$$y_1 = -x[\cos\varphi_1 \cos\vartheta_1 \sin\bar{\psi}_1 + \sin\varphi_1 \cos\bar{\psi}_1] - y[\sin\varphi_1 \cos\vartheta_1 \sin\bar{\psi}_1 - \cos\varphi_1 \cos\bar{\psi}_1] + z \sin\vartheta_1 \sin\bar{\psi}_1 \quad (19)$$

$$z_1 = x \cos\varphi_1 \sin\vartheta_1 + y \sin\varphi_1 \sin\vartheta_1 + z \cos\vartheta_1 \quad (20)$$

Damit bestimmt man den Winkel  $\psi_1$  aus

$$\begin{aligned} c_{31} \cdot \cos\psi_1 + c_{32} \cdot \sin\psi_1 &= -c_{13} \\ -c_{32} \cdot \cos\psi_1 + c_{31} \cdot \sin\psi_1 &= c_{23} \end{aligned} \quad (21)$$

Dies gilt ebenso für die Winkel  $\psi_1^{(i)}$  an den beiden Knotenpunkten.

### 2.3 Die Steifigkeitsmatrix des gekrümmten Balkens

Zur Herleitung der Steifigkeitsmatrix betrachtet man den Balken am Knoten 1 durch Kräfte und Momente belastet und am Knoten 2 eingespannt (Bild 4). Es wird weiter vorausgesetzt, daß die Verschiebungen und Verdrehungen, die durch diese Kräfte und Momente entstehen, hinreichend klein sind. Damit kann man bei der Berechnung der Schnittgrößen auf die Ausgangskonfiguration Bezug nehmen.

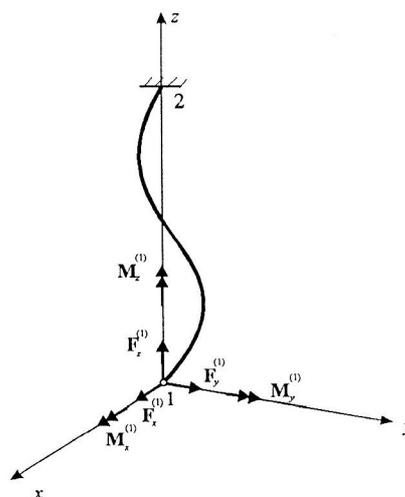


Bild 4. Der am Knoten 2 eingespannte Balken

Es werden ferner die Verformungen infolge der Querkräfte vernachlässigt, so daß nur die Biegemomente, das Torsionsmoment und die Längskraft als wesentliche Schnittgrößen verbleiben. Die Bestimmung der

Verschiebungen und Verdrehungen am Knoten 1 erfolgt mit Hilfe des zweiten Satzes von Castigliano. Bezogen auf das  $x, y, z$  - System gilt

$$M_x = -M_x^{(1)} + F_z^{(1)} y - F_y^{(1)} z \quad (22)$$

$$M_y = -M_y^{(1)} + F_x^{(1)} z - F_z^{(1)} x \quad (23)$$

$$M_z = -M_z^{(1)} + F_y^{(1)} x - F_x^{(1)} y \quad (24)$$

und für die Längskraft  $F_L$  erhält man

$$F_L = -F_x^{(1)} \frac{dx}{ds} - F_y^{(1)} \frac{dy}{ds} - F_z^{(1)} \frac{dz}{ds} \quad (25)$$

mit

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} dz \quad (26)$$

Durch eine Transformation mit der Matrix  $\mathbf{C}$  auf das begleitende Dreibein (Bild 2) erhält man schließlich die querschnittsbezogenen Schnittgrößen.

$$\begin{bmatrix} M_{bx1} \\ M_{by1} \\ M_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (27)$$

Setzt man zunächst voraus, daß die Achsen  $x_1$  und  $y_1$  die Hauptachsen des Querschnitts sind, so geht die Hookesche Matrix  $\mathbf{H}$  in eine Diagonalmatrix über.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{1}{EA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{EI_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{EI_{yy}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{GI_t} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Die Trägheitsmomente  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  sowie  $I_t$  verändern sich bei stark gekrümmten Balken gegenüber den Werten des geraden Balkens (Wolf, 1986). Für schwach gekrümmte Balken oder Drähte kann man diese Änderung jedoch vernachlässigen.

Die Transformationsbeziehung (27) wird durch hinzufügen der Längskraft um eine Zeile und Spalte erweitert. Diese erweiterte Transformationsmatrix in Gleichung (29) wird im folgenden mit  $\mathbf{C}_e$  bezeichnet.

$$\begin{bmatrix} F_L \\ M_{bx1} \\ M_{by1} \\ M_{t1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ 0 & c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_L \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

Die Gleichungen (22) bis (25) zur Berechnung der Schnittmomente und der Längskraft können gleichfalls als Matrizengleichung mit der Übertragungsmatrix  $\mathbf{X}$  formuliert werden.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -\frac{dx}{ds} & -\frac{dy}{ds} & -\frac{dz}{ds} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z(s) & y(s) & -1 & 0 & 0 \\ z(s) & 0 & -x(s) & 0 & -1 & 0 \\ -y(s) & x(s) & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Unter Verwendung des 2. Satzes von Castigliano ergibt sich schließlich der folgende Zusammenhang zur Berechnung der unbekannt Knotenverschiebungen und -verdrehungen am Knoten 1.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x^{(1)} \\ \bar{u}_y^{(1)} \\ \bar{u}_z^{(1)} \\ \Delta\varphi_x^{(1)} \\ \Delta\varphi_y^{(1)} \\ \Delta\varphi_z^{(1)} \end{bmatrix} = \left[ \int_0^L \mathbf{X}^T \mathbf{C}_e^T \mathbf{H} \mathbf{C}_e \mathbf{X} ds \right] \begin{bmatrix} F_x^{(1)} \\ F_y^{(1)} \\ F_z^{(1)} \\ M_x^{(1)} \\ M_y^{(1)} \\ M_z^{(1)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Die Umkehr dieser Beziehung liefert die Steifigkeitsbeziehung

$$\bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{F}_1 \quad (32)$$

die noch unter der Voraussetzung einer Einspannung am Knoten 2 hergeleitet wurde. Zwischen den Kräften und Momenten an den Knoten 1 und 2 gelten die Gleichgewichtsbedingungen, die man leicht anhand von Bild 5 herleiten kann.

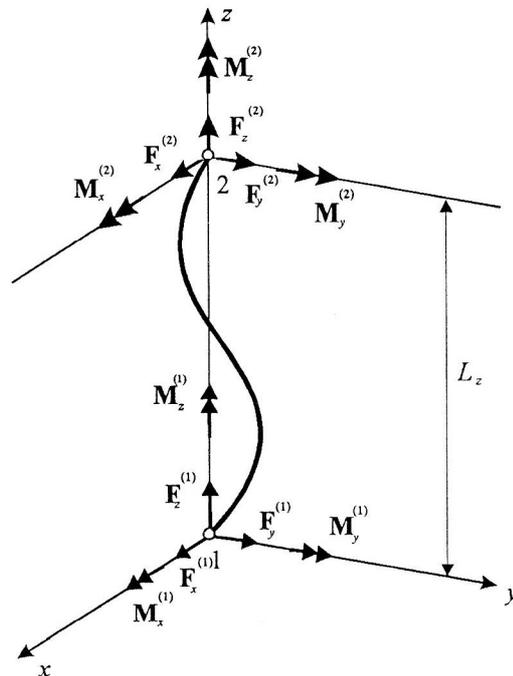


Bild 5. Gleichgewicht am gekrümmten Stab

$$\begin{aligned} F_x^{(2)} &= -F_x^{(1)} & M_x^{(2)} &= -M_x^{(1)} - L_z \cdot F_y^{(1)} \\ F_y^{(2)} &= -F_y^{(1)} & M_y^{(2)} &= -M_y^{(1)} + L_z \cdot F_x^{(1)} \\ F_z^{(2)} &= -F_z^{(1)} & M_z^{(2)} &= -M_z^{(1)} \end{aligned} \quad (33)$$

Daraus resultiert eine weitere Transformationsbeziehung, die den vollständigen Kraft- und Momentenvektor  $\mathbf{F}$  mit dem Teilvektor  $\mathbf{F}_1$  verbindet.

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_1 \quad (34)$$

Eine entsprechende reziproke Beziehung besteht zwischen dem vollständigen Vektor  $\mathbf{V}$  der Verschiebungen und Verdrehungen und dem Teilvektor  $\bar{\mathbf{V}}_1$  der Verschiebungen und Verdrehungen des Knotens 1 des eingespannten Balkens.

$$\bar{\mathbf{V}}_1 = \mathbf{T} \mathbf{V} \quad (35)$$

Damit erhält man die Steifigkeitsbeziehung des Balkens zu

$$\mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (36)$$

Mit der vollständigen Steifigkeitsmatrix des gekrümmten Balkens

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (37)$$

entsteht schließlich die Beziehung

$$\mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (38)$$

Die Transformation auf das globale System wird schließlich mit einer Transformationsmatrix realisiert, die aus der Matrix  $\mathbf{B}$  abgeleitet ist.

## 2.4 Lösung und Rücktransformation

Der Aufbau der vollständigen Steifigkeitsmatrix des betrachteten Systems und des Lastvektors erfolgen in der bekannten Weise, wobei der bandförmige Aufbau der Steifigkeitsmatrix berücksichtigt wird. Nach Lösung des Gleichungssystems liegen an jedem Knoten drei kleine Verschiebungen  $u_{x0}$ ,  $u_{y0}$  und  $u_{z0}$  und drei kleine Winkeldrehungen  $\gamma_{x0}$ ,  $\gamma_{y0}$ ,  $\gamma_{z0}$  jeweils um die drei Achsen  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  vor. Zu bestimmen sind nun die entsprechenden Änderungen der Winkel  $\varphi_x^{(1)}$ ,  $\varphi_y^{(1)}$ ,  $\varphi_x^{(2)}$  und  $\varphi_y^{(2)}$  für jeden Stab sowie die Änderungen der Winkel  $\psi^{(1)}$  und  $\psi^{(2)}$ .

Die neuen Koordinaten der Knotenpunkte folgen nach Summierung der Knotenverschiebungen zu

$$\begin{aligned} x_0^{(i)} &= x_0^{(i)} + u_{x0}^{(i)} \\ y_0^{(i)} &= y_0^{(i)} + u_{y0}^{(i)} \\ z_0^{(i)} &= z_0^{(i)} + u_{z0}^{(i)} \end{aligned} \quad (39)$$

Durch die Drehungen sind die Richtung der Tangente an die Stabmittellinie und der Winkel  $\vartheta_{01}$  in Bezug auf das raumfeste Koordinatensystem festgelegt.

Es gilt für kleine Winkel

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{01} &= \frac{1}{\sin\vartheta_{01}} \left( \Delta\gamma_x \cos\varphi_{01} + \Delta\gamma_y \sin\varphi_{01} \right) \\ \Delta\vartheta_{01} &= -\Delta\gamma_x \sin\varphi_{01} + \Delta\gamma_y \cos\varphi_{01} \\ \Delta\varphi_{01} &= \Delta\gamma_z - \Delta\psi_{01} \cos\vartheta_{01} \end{aligned} \quad (40)$$

Im Grenzfall  $\sin\vartheta_{01} = 0$  gilt  $\Delta\psi_{01} = \Delta\gamma_z$ , denn der Winkel  $\varphi_{01}$  ist für  $\vartheta_{01} = 0$  zunächst nicht erklärt und nimmt erst für  $\Delta\gamma_x, \Delta\gamma_y \neq 0$  einen definierten Wert an, wobei gilt

$$\sin\varphi_{01} = -\frac{\Delta\gamma_x}{\sqrt{\Delta\gamma_x^2 + \Delta\gamma_y^2}} \quad \text{und} \quad \cos\varphi_{01} = \frac{\Delta\gamma_y}{\sqrt{\Delta\gamma_x^2 + \Delta\gamma_y^2}} \quad (41)$$

Die veränderten Basiswinkel ergeben sich demnach zu

$$\begin{aligned} \psi_{01}^{(i)} &= \psi_{01}^{(i)} + \Delta\psi_{01}^{(i)} \\ \vartheta_{01}^{(i)} &= \vartheta_{01}^{(i)} + \Delta\vartheta_{01}^{(i)} \\ \varphi_{01}^{(i)} &= \varphi_{01}^{(i)} + \Delta\varphi_{01}^{(i)} \end{aligned} \quad (42)$$

an jedem der beiden zu einem Stab gehörigen Knoten  $i$ . Da an einem Knoten mehrere Stäbe mit unterschiedlichen Winkeln  $\varphi_0$ ,  $\vartheta_0$  und  $\psi_0$  angeschlossen sein können, diese Winkel also stabspezifische Größen sind, ergeben sich an einem Knoten für jeden Stab andere Werte. Mit den neuen Koordinaten und den neuen Winkeln können nun die ansatzspezifischen Größen  $\varphi_x^{(1)}, \varphi_y^{(1)}, \varphi_x^{(2)}$  und  $\varphi_y^{(2)}$  sowie  $\psi^{(1)}$  und  $\psi^{(2)}$  neu bestimmt werden.

Nach der Bestimmung des Verschiebungsvektors kann nach einer Rücktransformation auf das  $x, y, z$  System mit Gleichung (38) für jeden Stab der Vektor der stabbezogenen Knotenkräfte angegeben werden, so daß damit auch die Schnittgrößen für jeden Stab bestimmt werden können.

Die Berechnung der Schnittgrößen kann allerdings nur unter der Voraussetzung kleiner Verschiebungen und Verdrehungen und unter der weiteren Voraussetzung, daß kein Verzweigungsproblem vorliegt, in dieser Weise hergeleitet werden.

## 2.5 Große Verformungen

Die gewählte geometrische Beschreibung des gekrümmten Stabes bietet die Möglichkeit die Geometrie desselben nach jedem Lastschritt zu aktualisieren und damit auch große Verformungen zu bestimmen. Voraussetzung ist, daß die Stabendwinkel  $\varphi_x^{(1)}, \varphi_y^{(1)}, \varphi_x^{(2)}$  und  $\varphi_y^{(2)}$  sowie  $\psi^{(1)}$  und  $\psi^{(2)}$  hinreichend klein bleiben. Falls im Verlauf des Belastungsvorganges einzelne Stabelemente starke Krümmungsänderungen erfahren, sind diese in mehrere kleinere Elemente zu unterteilen.

Geht man nun davon aus, daß nach einer bestimmten Zahl von Lastschritten der gesamte Lastvektor  $\mathbf{F}$  und der entsprechend Verschiebungsvektor  $\mathbf{V}$  vorliegen, so gilt für den Gleichgewichtszustand nach dem Prinzip der virtuellen Arbeit

$$\mathbf{K}(\mathbf{V}) \mathbf{V} = \mathbf{F} \quad (43)$$

Eine weitere Laststeigerung ergibt

$$\Delta\mathbf{K} \mathbf{V} + \mathbf{K} \Delta\mathbf{V} = \Delta\mathbf{F} \quad (44)$$

wobei der Ausdruck  $\Delta\mathbf{K} \mathbf{V}$  letztlich wieder durch  $\mathbf{K}_\sigma \Delta\mathbf{V}$  mit der Anfangsspannungsmatrix  $\mathbf{K}_\sigma$  ersetzt werden kann. Hier wird jedoch ein iteratives Verfahren benutzt, um die Berechnung von  $\mathbf{K}_\sigma$  zu vermeiden. Nach der Laststeigerung gilt wieder

$$\mathbf{K}(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V})(\mathbf{V} + \Delta\mathbf{V}) = \mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} \quad (45)$$

Zur Bestimmung des Verformungsinkrementes  $\Delta\mathbf{V}$  wird im ersten Iterationsschritt gesetzt

$$\mathbf{V}_0 = \mathbf{V} \quad \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}(\mathbf{V}_0) \quad \mathbf{F}_0 = \mathbf{F} \quad (46)$$

und

$$\mathbf{K}_0 \Delta\mathbf{V}_0 = \Delta\mathbf{F} \quad (47)$$

Nach der Lösung dieses Gleichungssystems kann man mit der als klein vorausgesetzten Verformungsänderung eine verbesserte Steifigkeitsmatrix bestimmen.

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(\mathbf{V}_0 + \Delta\mathbf{V}_0) \quad (48)$$

Damit erhält man aus Gleichung (45) 
$$\mathbf{K}_0 \Delta \mathbf{V}_1 = \Delta \mathbf{F} - [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0] \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F} \quad (49)$$

und somit das verbesserte  $\Delta \mathbf{V}_1$ : 
$$\Delta \mathbf{V}_1 = \mathbf{K}_0^{-1} \Delta \mathbf{F} - \mathbf{K}_0^{-1} [\mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_0] \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{F} \quad (50)$$

Dieser Iterationsvorgang kann nun so oft wiederholt werden, bis die Differenz zweier aufeinander folgender  $\Delta \mathbf{V}$  hinreichend klein ist.

## Literatur

1. Bourgat, J. F.; Dumay, J. M.; Glowinski, R.: Large Displacement Calculations of Flexible Pipe-Lines by Finite Element and Non-linear Programming Methods in Computational Methode in Nonlinear Mechanics, ed. by J. T. Oden, North-Holland Pub. Comp. 1980
2. Jaklin, G.: Zur Theorie räumlich gekrümmter Stäbe, Forsch. Ing.-Wes. 47 (1981) Nr. 5, 133 - 168
3. Möhlenkamp, J.: Zur Berechnung der Eigenfrequenzen und Eigenschwingungsformen räumlich vorgekrümmter und verwundener Stäbe, Forsch. u. Sem.-Berichte aus dem Bereich Mechanik der TU Hannover F 77/3, (1977)
4. Panayotounakos, D. E. ; Theocaris, P. S.: Large Elastic Deformations in Thin Rods, Ingenieur-Archiv 51(1981) 139 - 149
5. Stein, E.: Seminar über nichtlineare Stabtheorie, Forsch. u. Sem.-Berichte aus dem Bereich Mechanik der TU Hannover F 83/1, (1983)
6. Swetlinskij, W. A.: Mechanik biegsamer Stäbe und Fäden (russisch), Mechanika gibkich sterchnej i nitej, Verl. Maschinenbau Moskau 1978
7. Swetlinskij, W. A.: Mechanik der Stäbe (russisch), Mechanika sterchnej, in 2 Teilen, Hochschulverlag Moskau 1987
8. Swetlinskij, W. A., Naraikin O. S.: Elastische Maschinenelemente (russisch), Uprugie elementi maschin, Verl. Maschinenbau Moskau 1989
9. Wolf, R.: Zur Beschreibung der vollständigen Seilkinematik, Forsch. Ing.-Wes. 50 (1984) Nr. 3, 81 - 86
10. Wolf, R.: Halbanalytische Berechnung linear-elastischer Übertragungs- und Steifigkeitsmatrizen raumgekrümmter Stabelemente, Diss. TU Berlin 1986
11. Zienkiewicz, O.C.: Methode der finiten Elemente, Hanser-Verl. München 1989

---

*Anschrift:* Doz. Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk, Dr.-Ing. Günther Fritzsche, Dr.-Ing. Wolfgang Lenz, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, 39016 Magdeburg