

# Ergänzung zur Theorie der Torsionsschwingungssysteme mit endlichen Freiheitsgraden.

## Teil I: Wirkung einer konstanten Zugbelastung auf die Eigenkreisfrequenzen von Torsionsschwingungssystemen

Z. Szolgay

*Die Arbeit beschäftigt sich mit Torsionsschwingungssystemen, die auch einer Zugbelastung unterworfen sind. Es wird gezeigt, wie die Zugbelastung die Eigenschaften der Torsionsschwingungen beeinflusst. Dabei stützt sich die Arbeit auf die früheren Ergebnisse des Verfassers. Teil I beschäftigt sich mit der Frage, wie sich die Eigenfrequenzen unter konstanter Zugbelastung verändern.*

### 1 Zielsetzung

Im ersten Teil der Arbeit werden die Eigenschaften des in Bild 1 dargestellten Torsionssystems mit den folgenden Annahmen untersucht.

Für die Torsionswelle gelten zwei geometrische Bedingungen:

- A.1: Das Wellenende  $A$  ist eingespannt,  $B$  wird im Teil I der Arbeit als frei angesehen.
- A.2: Die geometrische Achse der Welle (die Rotationsachse der Torsionsschwingungen) bleibt durch entsprechende Lagerung eine exakte Gerade.

Die Welle enthält  $n$  starre Scheiben, mit den folgenden massengeometrischen Eigenschaften:

- A.3: Der Massenmittelpunkt befindet sich genau auf der Drehachse.
- A.4: Die Drehachse ist eine der Massenträgheitshauptachsen der Scheibe.

Die aktive äußere Belastung des Systems ist die folgende:

- A.5: Die Scheibe  $i$  ( $i = 1, 2 \dots n$ ) wird im Schwerpunkt durch ein Moment und eine Kraft ( $\mathbf{M}_i$  und  $\mathbf{F}_i$ ) belastet. Beide Vektoren liegen parallel zur Drehachse.

Jede Strecke  $l_{(i-1)i}$  der Welle (Bild 1) ist - als elastisches Element - eine Torsionsfeder (im weiteren mit  $f_{(i-1)i}$  bezeichnet) des Systems. Diese Federn

- A.6: haben einen konstanten Kreisquerschnitt, wobei der Durchmesser der einzelnen Federn im allgemeinen unterschiedlich sein kann,
- A.7: sind masselos,
- A.8: entsprechen den Bedingungen B.1 - B.7 der früheren Arbeit des Verfassers (1994).

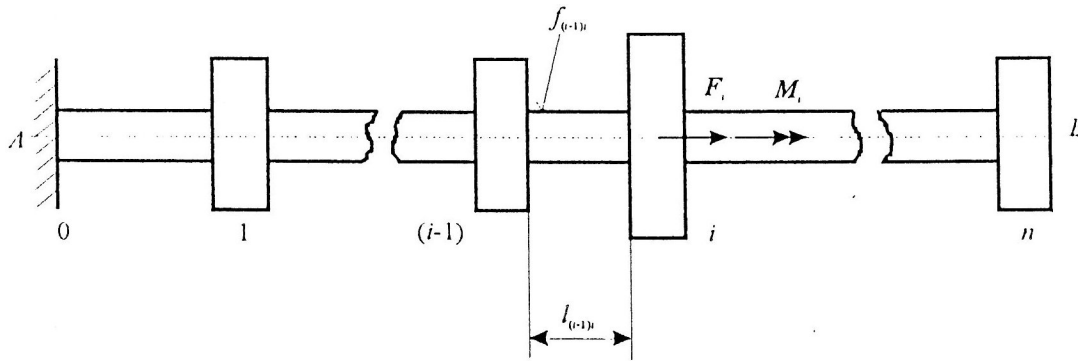


Bild 1. Das Torsionsschwingungssystem

Auf Grund der dort entwickelten Theorie und im Rahmen der Bedingungen A.1-A.8 werden die wichtigsten Auswirkungen der Zugbelastung auf die Schwingungen der Torsionssysteme gezeigt. Die folgenden Erscheinungen werden behandelt:

- I. Eine konstante Zugbelastung verändert die Eigenfrequenzen des Torsionssystems.
- II. Infolge einer periodisch veränderlichen Zugbelastung können Instabilitäterscheinungen auftreten.
- III. Bei bestimmten Randbedingungen nehmen die Bewegungsgleichungen eine nichtlineare Form an.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wird die unter I. erfaßte Erscheinung untersucht.

## 2 Torsionsfeder mit Zugbelastung

Die Torsionsfedern (im weiteren meistens: Federn) des untersuchten Schwingungssystems sind, dem Bild 1 entsprechend, auch auf Zug belastet. Wegen der Bedingung A.7 ist die Feder auch während einer Formänderung im statischen Gleichgewicht. So ist es möglich, sie auf der Grundlage der Ergebnisse von Szolgay (1994) zu behandeln.

Deshalb ist es hier nötig, gewisse Begriffe, Bezeichnungen, usw. der Arbeit von Szolgay (1994) zu zitieren. Der Einfachheit halber soll z.B. das Zeichen  $(i,j)_0$  auf die entsprechende Gleichung bzw. Formel der genannten Arbeit bezogen werden. Für die Numerierung von Gleichungen, usw. des vorliegenden Artikels wollen wir die Form  $(m.n)$  verwenden.

Es sei also in diesem Sinne  $\alpha$  die relative Winkelverdrehung der beiden Endquerschnitte der Feder und  $\zeta$  deren relative axiale Verschiebung zueinander. Durch die angeschlossenen Scheiben wird die Feder an beiden Endquerschnitten durch ein Torsionsmoment  $M$  und eine Zugkraft  $F$  belastet. Andere Belastungen der Feder treten nicht auf. Es stellt sich die Frage: Welche Beziehungen gibt es zwischen den Größen  $\alpha$ ,  $\zeta$ ,  $M$  und  $F$  ?

Die Antwort auf diese Frage kann man mit Hilfe des Leistungssatzes finden, wonach die Summe der Leistungen aller inneren und äußeren Kräfte in jedem Augenblick der Formänderung gleich Null sein muß.

Die Leistung der äußeren Kräfte ist

$$P_a = M\dot{\alpha} + F\dot{\zeta} \quad (2.1)$$

$\zeta$  kann aus Gleichung (7.7)<sub>0</sub> errechnet werden.

$$\zeta = \eta l + \frac{1}{4} R_2^2 \psi^2 l \quad (2.2)$$

wobei  $l$  die Länge der Feder, und  $\eta l = \frac{F}{AE}$  die von der reinen Zugbelastung stammende Dehnung derselben ist. Mit  $\psi = \alpha l$  folgt nun

$$\zeta = \eta l + \frac{1}{4} \frac{R_2^2}{l} \alpha^2 \quad (2.3)$$

und

$$\dot{\zeta} = \dot{\eta} l + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{l} \alpha \dot{\alpha} \quad (2.4)$$

Zuletzt wird

$$P_a = M\dot{\alpha} + F\left(\dot{\eta} l + \frac{1}{2} \frac{R_2^2}{l} \alpha \dot{\alpha}\right) \quad (2.5)$$

Die Leistung der inneren Kräfte ist bekannterweise das negative Volumenintegral des doppelten Skalarproduktes des Spannungstensors und der Ableitung des Verzerrungstensors nach der Zeit

$$P_i = - \int_{(V)} \dot{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.6)$$

Der Integrand ist mit den Formeln (5.2)<sub>0</sub> und (5.5)<sub>0</sub>

$$\dot{\mathbf{L}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \dot{L}_{11} \sigma_1 + \dot{L}_{22} \sigma_2 + \dot{L}_{33} \sigma_3 + 2 \dot{L}_{23} \tau_{23} \quad (2.7)$$

Für diese Rechnungen brauchen wir die Ausdrücke von  $\rho$ ,  $\rho_R$  und  $\rho/R$ . Um  $\rho$  zu erhalten, setzt man den mit Gleichung (7.1)<sub>0</sub> errechneten Wert von  $C_1$  in den Ausdruck von  $\rho$  (6.5)<sub>0</sub> ein. Durch weitere einfache Rechnungen kann man auch  $\rho_R$  und  $\rho/R$  erhalten. Alle drei Größen sind Funktionen von  $R$ ,  $\psi$  und  $\zeta_z$ .

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (2.7) ein, dann sieht man, daß die ersten zwei Terme der Summe, im Sinne der Bedingung B.6, Null gesetzt werden können, weil sie die Größen  $\psi$  und  $\zeta_z$  oder ihr Produkt mindestens in der dritten Potenz enthalten.

Es ist leicht zu überprüfen, daß im Sinne von B.6  $\zeta_z \dot{\zeta}_z = \eta \dot{\eta}$  ist. Mit diesem Ergebnis erhalten wir für  $\dot{L}_{33} \sigma_3$  den folgenden Ausdruck:

$$\dot{L}_{33} \sigma_3 = 2G \frac{1-\nu-2\nu^2}{1-2\nu} \eta \dot{\eta} = 2G(1+\nu) \eta \dot{\eta} = E \eta \dot{\eta} \quad (2.8)$$

Für  $\dot{L}_{32}$  erhalten wir nach Gleichung (5.2)<sub>0</sub>

$$\dot{L}_{23} = \dot{L}_{32} = (R_2 + 2\rho) \frac{\dot{\Psi}}{2} + \dot{\rho} \Psi \quad (2.9)$$

und für  $\tau_{23}$  nach Gleichung (5.5)<sub>0</sub>

$$\tau_{23} = \tau_{32} = 2G(R_2 + 2\rho) \frac{\Psi}{2} \quad (2.10)$$

Nach Einsetzen des obigen Wertes von  $\rho$  und nach Durchführung der Multiplikationen entsteht unter Beachtung von B.6 das folgende Ergebnis:

$$2\dot{L}_{32}\tau_{32} = 2G\frac{R_2^2}{4}\psi\dot{\psi} \quad (2.11)$$

Jetzt müssen noch die vorgeschriebenen Integrationen vollzogen werden.

$$\int_{(V)} \dot{L}_{33}\sigma_3 dV = \int_{(V)} E\eta\dot{\eta} dV = \int_0^l EA\eta\dot{\eta} dl = \frac{EA}{l}\eta\dot{\eta} \quad (2.12)$$

bzw.

$$\int_{(V)} 2\dot{L}_{32}\tau_{32} dV = \int_{(V)} 2G\frac{R_2^2}{4}\psi\dot{\psi} dV = \frac{G}{2}R_2^2 A \frac{\alpha}{l} \frac{\dot{\alpha}}{l} \int_0^l dl = \frac{I_p G}{l}\alpha\dot{\alpha} \quad (2.13)$$

wobei  $I_p$  das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf dessen Mittelpunkt, ist. Zusammengefaßt ist die Leistung der inneren Kräfte

$$P_i = -\frac{EA}{l}\eta\dot{\eta} - \frac{I_p G}{l}\alpha\dot{\alpha} \quad (2.14)$$

So hat die Gesamtleistung der äußeren und inneren Kräfte, geordnet nach den Koordinaten  $\alpha$  und  $\eta$ , die folgende Form:

$$P_a + P_i = \left( M - \frac{I_p G}{l}\alpha - \frac{FR_2^2}{2l}\alpha \right)\dot{\alpha} + \left( F - \frac{AE}{l}\eta \right)\dot{\eta} \quad (2.15)$$

Die der Koordinate  $\alpha$  zugeordnete verallgemeinerte Kraft ist also

$$Q_\alpha = M - \left( \frac{I_p G}{l} + \frac{FR_2^2}{2l} \right)\alpha \quad (2.16)$$

Wird noch die Grösse  $I_p G/l$  ausgeklammert, so erhalten wir

$$Q_\alpha = M - \frac{I_p G}{l} \left( 1 + \frac{F}{AG} \right)\alpha = M - \frac{I_p G}{l} \left( 1 + \frac{\sigma}{G} \right)\alpha \quad (2.17)$$

wobei  $\sigma$  die der Zugkraft  $F$  entsprechende durchschnittliche Zugspannung ist. Diese Formeln zeigen klar, daß die Zugkraft  $F$  bzw. die Zugspannung  $\sigma$  bei den Torsionsschwingungen eine gewisse Rolle spielen. Der Unterschied gegenüber dem zugfreien Fall ist bei den üblichen Konstruktionsmetallen nicht besonders groß, doch kann er immerhin  $\pm 2-3$  Prozent ausmachen, was in einigen Fällen von Bedeutung sein kann. Mit einer größerer Abweichung kann man allerdings bei gewissen Kunststoffen rechnen.

Aus Gleichung (2.15) ist auch ersichtlich, daß die zu  $\eta$  gehörige verallgemeinerte Kraft  $Q_\eta$  nicht vom Torsionsmoment  $M$  beeinflusst wird. Für die longitudinalen Bewegungen liefert also die hier angewendete quadratische Theorie keine neuen Ergebnisse.

### 3 Das Torsionssystem mit einem Freiheitsgrad

Die oben abgeleiteten Ergebnisse wollen wir zuerst auf ein Torsionssystem mit einem Freiheitsgrad (Bild 1,  $n = 1$ ) anwenden. Auf der Grundlage von Gleichung (2.17) ergibt sich die Bewegungsgleichung der Scheibe zu

$$J\ddot{\alpha} + \frac{I_p G}{l} \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \alpha = M \quad (3.1)$$

Die Größe  $J$  ist hier das auf die Drehachse bezogene Massenträgheitsmoment der Scheibe. Aus der Gleichung ist ersichtlich, daß das Quadrat der Eigenkreisfrequenz der Schwingung

$$\omega^2 = \frac{I_p G}{Jl} \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \quad (3.2)$$

ist. In Abhängigkeit davon, ob  $\sigma$  Druck- oder Zugspannung ist, kann diese Größe kleiner oder größer sein, als die von der linearen Theorie gelieferte Eigenkreisfrequenz.

$$\omega_0^2 = \frac{I_p G}{Jl}$$

### 4 Ein spezielles Torsionssystem

Dieses System unterscheidet sich von dem in Bild 1 dargestellten dadurch, daß der Durchmesser der Torsionswelle auf der ganzen Strecke  $A-B$   $R_2 = \text{konstant}$  ist, und für alle Kräfte und Momente gilt  $F_i = M_i = 0$ , abgesehen von  $F_n = F = \text{konstant}$ .

Ist  $\alpha_i$  die Winkelverdrehung der  $i$ -ten Scheibe bezüglich des Gestells und  $\zeta_i$  ihre Verschiebung in Richtung der Drehachse, dann ist die volle Winkelverdrehung der Feder  $f_{(i-1)i}$

$$\alpha_{(i-1)i} = \alpha_i - \alpha_{i-1} \quad (4.1)$$

und ihre volle Dehnung

$$\zeta_{(i-1)i} = \zeta_i - \zeta_{i-1} \quad (4.2)$$

Die Bewegungsgleichung der  $i$ -ten Scheibe, die mit zwei Federn, und zwar mit  $f_{(i-1)i}$  und  $f_{i(i+1)}$ , in direkter Verbindung steht, lautet also

$$J_i \ddot{\alpha}_i + I_p G \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \left[ \frac{1}{l_{(i-1)i}} (\alpha_i - \alpha_{i-1}) - \frac{1}{l_{i(i+1)}} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \right] = 0 \quad (4.3)$$

oder geordnet nach den Koordinaten  $\alpha_i$

$$J_i \ddot{\alpha}_i + I_p G \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \left[ -\frac{1}{l_{(i-1)i}} \alpha_{i-1} + \left( \frac{1}{l_{(i-1)i}} + \frac{1}{l_{i(i+1)}} \right) \alpha_i - \frac{1}{l_{i(i+1)}} \alpha_{i+1} \right] = 0 \quad (4.4)$$

$$(i = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad l_{n(n+1)} = \alpha_{n+1} = 0)$$

Die Gleichung (4.4) ist die  $i$ -te Gleichung eines Gleichungssystems, das sich auch in Matrizenform schreiben läßt.

$$\mathbf{J}\ddot{\alpha} + I_p G \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \mathbf{1}\alpha = 0 \quad (4.5)$$

wobei

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & J_n \end{bmatrix} \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{l_{01}} + \frac{1}{l_{12}}\right) & -\frac{1}{l_{12}} & & & \\ -\frac{1}{l_{12}} & \left(\frac{1}{l_{12}} + \frac{1}{l_{23}}\right) & -\frac{1}{l_{23}} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

ist. Diese Gleichung ist mit den bekannten Mitteln einfach lösbar. Und weil in diesem Falle  $\sigma$  für die ganze Welle konstant ist, verhält sich das System so, wie ein System, dessen Torsionselastizitätsmodul

$$G' = G \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right)$$

ist. Daraus folgt weiterhin auch, daß die Quadrate der Eigenkreisfrequenzen, die immer zu  $G$  proportional sind, sich von denen des zugfreien Systems nur durch einen Multiplikator unterscheiden.

$$\omega_i^2 = \omega_{0i}^2 \left(1 + \frac{\sigma}{G}\right) \quad (4.7)$$

## 5 Der allgemeine Fall

Der allgemeine Fall entspricht dem Bild 1, wo die Federn  $f_{(i-1)i}$  unterschiedliche Durchmesser haben können und unterschiedlich belastet sind. Zur Feder  $f_{(i-1)i}$  gehört also die Zugspannung  $\sigma_{(i-1)i}$  und das polare Trägheitsmoment  $I_{(i-1)i}$ . Der Index  $p$  kann hier ohne die Gefahr eines Mißverständnisses weggelassen werden. Für  $i$  gilt auch weiterhin:  $i = 1, 2 \dots n$ .

So wird die Bewegungsgleichung der  $i$ -ten Scheibe die folgende Form annehmen:

$$J_i \ddot{\alpha}_i + I_{(i-1)i} G \left(1 + \frac{\sigma_{(i-1)i}}{G}\right) \frac{1}{l_{(i-1)i}} (\alpha_i - \alpha_{(i-1)}) - I_{i(i+1)} G \left(1 + \frac{\sigma_{i(i+1)}}{G}\right) \frac{1}{l_{i(i+1)}} (\alpha_{(i+1)} - \alpha_i) = M_i \quad (5.1)$$

Wenn wir die Bezeichnungen

$$k_{(i-1)i} = \frac{I_{(i-1)i}}{l_{(i-1)i}} \quad \text{und} \quad \kappa_{(i-1)i} = k_{(i-1)i} \frac{\sigma_{(i-1)i}}{G}$$

in diese Gleichung einführen, so erhält die Gleichung (5.1) die Form

$$J_i \ddot{\alpha}_i + G \left\{ \left[ -K_{(i-1)i} \alpha_{i-1} + (k_{(i-1)i} + k_{i(i+1)}) \alpha_i - k_{i(i+1)} \alpha_{i+1} \right] + \left[ -\kappa_{(i-1)i} \alpha_{i-1} + (\kappa_{(i-1)i} + \kappa_{i(i+1)}) \alpha_i - \kappa_{i(i+1)} \alpha_{i+1} \right] \right\} = M_i \quad (5.2)$$

Dementsprechend ist die Bewegungsgleichung des gesamten Schwingungssystems in Matrizenform

$$\mathbf{J} \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + G \mathbf{k} \boldsymbol{\alpha} + G \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M} \quad (5.3)$$

mit

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} (k_{01} + k_{12}) & -k_{12} & & & \\ -k_{12} & (k_{12} + k_{23}) & -k_{23} & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot \end{bmatrix}$$

Diese Struktur stimmt mit der von  $\boldsymbol{\kappa}$ , allerdings ohne die Identität der einzelnen, entsprechenden Elemente, überein. Weiterhin sind

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ M_n \end{bmatrix}$$

Die Gleichung (5.3) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren Eigenfrequenzen und Eigenvektoren man mit den bekannten Methoden errechnen kann.

## 6 Ein mögliches Näherungsverfahren zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen

In einigen Fällen, ganz besonders dann, wenn ein orthogonales System der Eigenvektoren  $\mathbf{A}_{ok}$  des zugfreien Schwingungssystems ( $\boldsymbol{\kappa} = 0$ ) schon bekannt ist, können Näherungslösungen von Nutzen sein. Eine solche Möglichkeit bietet z.B. die *Methode der kleinen Parameter*. Diese Methode wird hier dadurch begründet, daß für alle entsprechenden Elemente von  $\boldsymbol{\kappa}$  und  $\mathbf{k}$  die folgende Relation besteht:

$$\kappa_{ij} \ll k_{ij} \quad (6.1)$$

Die Gleichung der Eigenwertaufgabe nimmt in diesem Falle folgende Form an:

$$\left( -\omega^2 \mathbf{J} + G \mathbf{k} + G \boldsymbol{\kappa} \right) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (6.2)$$

wobei  $\omega$  die Eigenkreisfrequenz ist und  $\mathbf{A}$  der dazu gehörige Eigenvektor. Diese Gleichung wird folgendermaßen umgeformt:

$$\mathbf{E} = \left( -\omega^2 \mathbf{J} + G \mathbf{k} \right) \mathbf{A} + G \boldsymbol{\kappa} \mathbf{A} \mu = \mathbf{0} \quad (6.3)$$

Die Größe  $\mu$  spielt die Rolle des kleinen Parameters, dessen Wert hier  $\mu = 1$  sein muß. Es wird angenommen, daß  $\omega^2$  und  $\mathbf{A}$  nach  $\mu$  in Taylor-Reihen entwickelt werden können.

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \mu + \frac{1}{2} \omega_2^2 \mu^2 + \dots \quad (6.4)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1\mu + \frac{1}{2}\mathbf{A}_2\mu^2 + \dots \quad (6.5)$$

Aus dieser Annahme folgt, daß auch der algebraische Ausdruck  $\mathbf{E}$  [in Gleichung (6.3)] eine Funktion von  $\mu$  ist.

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1\mu + \frac{1}{2}\mathbf{E}_2\mu^2 + \dots = \mathbf{0} \quad (6.6)$$

Diese Gleichung muß für jeden Wert von  $\mu$  gültig sein, was nur dann möglich ist, wenn alle  $\mathbf{E}_i$  einzeln verschwinden.

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}_1 = \mathbf{0} \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{0} \quad \text{usw.} \quad (6.7)$$

Auf diese Weise kann die Lösung der ursprünglichen algebraischen Gleichung auf die Folge von Lösungen des Gleichungssystems (6.7) zurückgeführt werden.

Es seien  $\omega_{0k}^2$  und  $\mathbf{A}_{0k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) zusammengehörige Wertepaare des *zugfreien* Systems, die der ersten von den Gleichungen (6.7) genügen. Dann lautet diese Gleichung bei jedem festgelegten  $k$  (wobei allerdings der Index  $k$  der Kürze halber weggelassen wurde)

$$\mathbf{E}_0 = (-\omega_0^2 \mathbf{J} + G\mathbf{k})\mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \quad (6.8)$$

Daraus kann  $\omega_0^2$  durch die Multiplikation mit  $\mathbf{A}_0^T$ , der Transponierten von  $\mathbf{A}_0$ , als Funktion von  $\mathbf{A}_0$  gebildet werden.

$$\omega_0^2 = \frac{\mathbf{A}_0^T \mathbf{k} \mathbf{A}_0}{\mathbf{A}_0^T \mathbf{J} \mathbf{A}_0} G \quad (6.9)$$

Die zweite von den Gleichungen (6.7) lautet

$$\mathbf{E}_1 = \left. \frac{d\mathbf{E}}{d\mu} \right|_{\mu=0} = (-\omega_0^2 \mathbf{J} + G\mathbf{k})\mathbf{A}_1 - \omega_1^2 \mathbf{J}\mathbf{A}_0 + G\kappa\mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \quad (6.10)$$

Wird diese Gleichung mit der Reihenmatrix  $\mathbf{A}_0^T$  von links multipliziert, so verschwindet das erste Glied der Gleichung wegen Bedingung (6.8) und es bleibt

$$\mathbf{A}_0^T \mathbf{E}_1 = \mathbf{A}_0^T (\omega_1^2 \mathbf{J} - G\kappa)\mathbf{A}_0 = \mathbf{0} \quad (6.11)$$

Damit erhält man

$$\omega_1^2 = \frac{\mathbf{A}_0^T \kappa \mathbf{A}_0}{\mathbf{A}_0^T \mathbf{J} \mathbf{A}_0} G \quad (6.12)$$

In Kenntnis von  $\omega_1^2$  kann aus der Gleichung (6.10) auch der Vektor  $\mathbf{A}_1$  bestimmt werden. Aus der Beziehung (6.1) folgt auch  $\omega_1^2 \ll \omega_0^2$ .

Unter den Größen  $\sigma_{(i-k)}$ , die in den Elementen von  $\kappa$  vorkommen, ist  $\sigma_{\max}$  die größte. Es läßt sich dann schreiben



$$\mathbf{A}_0^T \boldsymbol{\kappa} \mathbf{A}_0 \leq \frac{\sigma_{\max}}{G} \mathbf{A}_0^T \mathbf{k} \mathbf{A}_0 \quad (\sigma_{\max} \ll G) \quad (6.13)$$

D.h., daß

$$\omega_1^2 \leq \frac{\sigma_{\max}}{G} \omega_0^2 \ll \omega_0^2$$

ist. Für die erste Näherung von  $\omega^2$  kann man also schreiben

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 + \omega_1^2 \leq \omega_0^2 \left( 1 + \frac{\sigma_{\max}}{G} \right) \quad (6.14)$$

Auf analoge Weise kann man auch  $\omega_2^2$  (und damit auch  $\mathbf{A}_2$ ) bestimmen. Unter Weglassen der Details, erhält man

$$\omega_2^2 = 2 \frac{\mathbf{A}_0^T \left( -\omega_1^2 \mathbf{J} + G \boldsymbol{\kappa} \right) \mathbf{A}_1}{\mathbf{A}_0^T \mathbf{J} \mathbf{A}_0} \quad (6.15)$$

$\mathbf{A}_2$  kann wieder aus einer linearen, inhomogenen, algebraischen Matrixgleichung ermittelt werden.

## 7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde mit Hilfe der in der Dissertation (Szolgay, 1989) entwickelten und im Artikel (Szolgay, 1994) publizierten quadratischen Formänderungstheorie von Wellen untersucht, wie sich eine Welle als Torsionsfeder mit Zugbelastung verhält. Es wurde gezeigt, daß die streckenweise konstante, auf die Welle eines Torsionsschwingungssystems wirkende Zugbelastung eine gewisse Veränderung der Eigenkreisfrequenzen der Torsionsschwingungen verursacht. Diese Veränderung hängt vom Verhältnis der Zugspannung  $\sigma$  und des Schubmoduls  $G$  ab. Sie ist bei den üblichen Konstruktionsmetallen ziemlich klein, bei gewissen Kunststoffen kann sie jedoch auch größere Werte annehmen. Von welcher Bedeutung sie ist, das kann man erst bei Kenntnis des konkreten Falles entscheiden.

## Literatur

1. Szolgay, Z.: Torziós rezgő rendszerek, doktori értekezés, (Torsionsschwingungssysteme, ungarisch, Dissertation), Miskolc, (1989).
2. Szolgay, Z.: Zur überlagerten Torsions- und Zugbelastung von Wellen. Technische Mechanik 14, 2, (1994), 115-124.

*Anschrift:* Dr. Zsófia Szolgay, Institut für Angewandte Mechanik, TU Budapest, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp 1-3.