

Ein neues FE-Konzept zur Kopplung inkompatibler Vernetzungen

K. Graeff-Weinberg, H. Berger

Effektive FE-Analysen von komplexen Strukturen erfordern häufig in lokalen Bereichen sehr feine Diskretisierungen, wogegen in den umliegenden Gebieten der Lösungsverlauf gut mit wenigen großflächigen Elementen - vorzugsweise höherer Ansatzordnung - approximiert werden kann. Im Beitrag werden zunächst Möglichkeiten der lokalen Netzverfeinerung diskutiert. Da die üblichen Strategien in vielen Fällen nicht mehr ausreichen, wird von den Autoren ein neues Elementkonzept hergeleitet. Diese sogenannten pNh-Elemente ermöglichen einen kompatiblen Übergang von einer beliebig feinen Diskretisierung auf ein grob diskretisiertes Gebiet gleicher oder höherer Approximationsordnung. Die pNh-Elemente lassen sich relativ einfach in vorhandene FE-Systeme integrieren. Anhand numerischer Beispiele wird gezeigt, daß diese Elemente vorteilhaft bei der Berechnung typischer Maschinenbauprobleme eingesetzt werden können.

1 Einleitung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist heute ein bedeutendes Verfahren zur numerischen Lösung komplizierter Aufgabenstellungen. Ausgehend von einem Randwertproblem oder einem Variationsprinzip können FEM-Näherungslösungen für unterschiedlichste Aufgabenstellungen berechnet werden. Hier werden Probleme der linearen Elastizitätstheorie betrachtet. Ihre Lösung \mathbf{u} minimiert auf dem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ das elastische Gesamtpotential

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{p}^T \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \mathbf{q}^T \mathbf{u} d\Gamma_2 \quad (1)$$

($\boldsymbol{\varepsilon}$ Verzerrungsvektor, $\boldsymbol{\sigma}$ Spannungsvektor, \mathbf{u} Verschiebungsvektor, \mathbf{p} Volumenkraftvektor, \mathbf{q} Randspannungsvektor auf dem belasteten Rand Γ_2). Zur FE-Berechnung wird das Lösungsgebiet in finite Elemente zerlegt, auf denen die gesuchte Verschiebungsfunktion mit Hilfe von einfachen Ansatzfunktionen approximiert wird. Die Qualität der FE-Lösung $\tilde{\mathbf{u}}$ hängt im wesentlichen von der Feinheit des Elementnetzes und von der Approximationsgüte der Ansatzfunktionen ab. Zur Genauigkeitsverbesserung gibt es folglich zwei prinzipielle Wege, die h-Verfeinerung (Verringern der Elementgröße) und die p-Verfeinerung (Erweitern des Ansatzraumes der finiten Elemente).

In der praktischen Anwendung dominiert heute die h-Verfeinerung. Die Mehrheit der kommerziellen FE-Programmsysteme arbeitet auf der Grundlage von h-Elementen, also finiten Elementen niederer Polynomordnung ($p = 1, 2$). Lokale Eigenschaften des Lösungsgebietes, wie z.B. unterschiedliche Materialdaten oder komplizierte geometrische Details, lassen sich damit relativ einfach erfassen. Demgegenüber weisen p-Verfeinerungen im allgemeinen ein besseres Konvergenzverhalten auf. Besonders bei den im Maschinenbau typischen Aufgabenklassen kann durch den Einsatz höherwertiger p-Elemente ($p \geq 2$) das Verhältnis von Aufwand und Berechnungsgenauigkeit erheblich verbessert werden. Wünschenswert wäre in vielen Fällen eine Kombination von h-Vernetzungen in begrenzten lokalen Bereichen der Struktur und p-Vernetzungen im übrigen Lösungsgebiet. Allerdings gibt es hier noch eine Reihe von Problemen bei der praktischen Gestaltung solcher Vernetzungen.

2 Realisierung lokaler Netzverfeinerungen

Eine p-Verfeinerung des FE-Ansatzraumes ist - zumindest bei Verwendung hierarchischer Ansatzfunktionen - relativ einfach zu realisieren. Den vorhandenen Ansatzfunktionen werden zusätzliche Ansätze höherer Polynomordnung überlagert, die Geometrie der Elemente sowie die topologischen Daten des FE-Netzes bleiben davon unberührt.

Problematischer ist dagegen die Realisierung lokaler h-Verfeinerungen. Verschiedene Strategien dazu sollen am Beispiel des in Bild 1 dargestellten Viereckgebietes betrachtet werden. Die einfachste Variante ist die zielgerichtete Verringerung der Elementgröße (Bild 1a). Anzahl und Lage der Knoten sowie die Approximationsordnung aneinandergrenzender Elementoberflächen sind kompatibel. Diese Vorgehensweise führt jedoch zu einer schnell steigenden Anzahl von Freiheitsgraden und ist daher bei stark strukturierten Gebieten und besonders bei räumlichen Problemen uneffektiv. Häufig wird unter Zuhilfenahme von Dreieckselementen eine lokale Netzverfeinerung mit kompatibler Kopplung zu den Nachbarelementen bewirkt (Bild 1b). Bei dreidimensionalen Gebieten kann eine entsprechende Verfeinerung beispielsweise durch Pentaeder-, Chisel- und Wegdeelemente erzielt werden (Zienkiewicz, 1989). Allerdings ist dann die Generierung des FE-Netzes schon deutlich komplizierter. Ein wesentlicher Nachteil dieser Verfeinerungstechnik besteht jedoch darin, daß insbesondere bei gekrümmten Elementrändern und unregelmäßigen Geometrien sehr spitze Winkel und stark unterschiedliche Seitenverhältnisse in den Elementen auftreten können. Die Lösungsgenauigkeit wird dadurch erheblich verschlechtert (Berger, 1982). Für einen schnellen Übergang von groben auf feine Diskretisierungen sind deshalb Vernetzungstechniken vorzuziehen, bei denen an einer Elementseitenkante bzw. -fläche zwei oder mehrere finite Elemente anschließen können (Bild 1c,d).

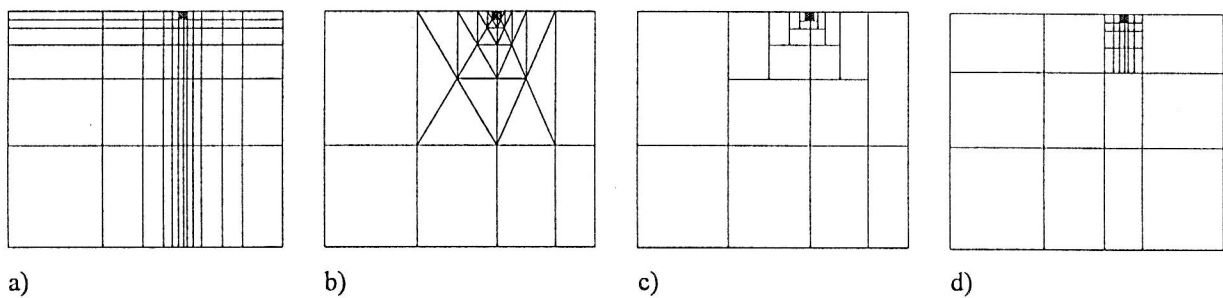


Bild 1. Verfeinerungsstrategien

Bei einer ungekoppelten Vernetzung sind solche FE-Vernetzungen inkompatibel. Die Konvergenz der FE-Lösung ist nicht mehr gesichert, durch die verletzten Stetigkeitsbedingungen treten erhebliche Genauigkeitsverluste an den Koppelrändern auf (Bild 2a). Eine ungekoppelte Verknüpfung ist deshalb zur Netzverfeinerung ungeeignet.

Weit verbreitet ist die Kopplung von Elementen über Zwangsbedingungen, die gleiche Verschiebungen der aneinandergrenzenden Elemente erzwingen. Diese Verschiebungszwangsbedingungen lauten in ihrer linearen Form (Gabbert, 1987)

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = \mathbf{Z}\mathbf{u} + \mathbf{z}^0 \quad \text{in } \Omega \quad (2)$$

Sie lassen sich beispielsweise mittels Penalty-Technik im elastischen Gesamtpotential (1) berücksichtigen. Man gelangt so zu dem erweiterten Funktional

$$\Pi^*(\mathbf{u}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} \alpha_p \int_{\Omega} \mathbf{Z}(\mathbf{u})^T \mathbf{Z}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (3)$$

(α_p Penalty-Zahl). Da durch die Penalty-Funktion eine nichtnegative Größe zum elastischen Gesamtpotential addiert wird, bleibt auch für das erweiterte Potential das Extremalprinzip erhalten. Durch Minimieren nach den Stützstellen der FE-Verschiebungsfunktion $\hat{\mathbf{u}}$ gelangt man zu dem modifizierten FE-Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}^C) \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^C \quad (4)$$

mit der Zwangsmatrix \mathbf{K}^C und dem Zwangsvektor \mathbf{f}^C

$$\mathbf{K}^C = \alpha_p \int_{\Omega} \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} \, d\Omega \quad \mathbf{f}^C = \alpha_p \int_{\Omega} \mathbf{Z}^T \mathbf{z}^0 \, d\Omega \quad (5)$$

Bei der Beispielvernetzung in Bild 2 werden drei kleine bilineare Elemente an ein größeres Element angeschlossen. Die Freiheitsgrade u_B und u_C sind zunächst von u_A und u_D unabhängig. Um eine kompatible Verknüpfung zu bewirken, muß die Verschiebungsfunktion der kleineren Elemente dem Verlauf der Elementkante \overline{AD} entsprechen. Bei linearer Approximation entlang \overline{AD} ist eine knotenweise Formulierung der Zwangsbedingungen ausreichend. Man erhält so beispielsweise für u_C die Zwangsbedingung

$$\mathbf{Z}(\mathbf{u}) = \mathbf{z}\mathbf{u} = [1 \quad -6 \quad 5][u_A \quad u_C \quad u_D]^T \quad (6)$$

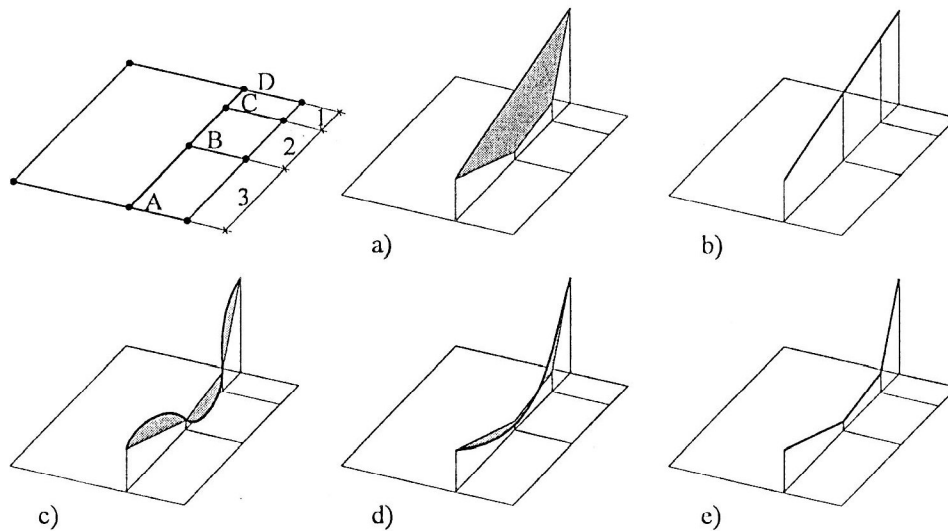


Bild 2. Kopplung inkompatibler Elementanordnungen

die nun entsprechend den Gleichungen (4) und (5) in das FE-System eingeht. Ist die Verschiebungsapproximation der Elementseite \overline{AD} von höherer Polynomordnung, dann ist eine exakte Übereinstimmung der Verschiebungsverläufe entlang der Koppelkante nur noch in Grenzfällen möglich. Fordert man eine punktweise Übereinstimmung der Verschiebungswerte, z.B. an den Eckknoten der Elemente, kann das relativ große Abweichungen im übrigen Verschiebungsverlauf zur Folge haben (Bild 2c). Sinnvoller ist es, eine Übereinstimmung im integralen Mittel zu fordern (Bild 2d). Damit wird die Formulierung der Zwangsbedingungen allerdings recht aufwendig.

Durch Kopplung von Elementen mit Verschiebungszwangsbedingungen entsteht auch bei inkompatiblen Elementanordnungen ein konformes FE-Netz. Der wesentliche Vorteil dieser Methode besteht in ihrer relativ einfachen und universellen Anwendbarkeit (Gabbert, 1983). Nachteilig ist aber, daß es durch die Elimination von Freiheitsgraden zu unrealistischen Versteifungen des Koppelgebietes kommt. Zweckmäßig ist eine Kopplung über Zwangsbedingungen dann, wenn wenige Elemente mit linearen Ansatzfunktionen gekoppelt werden. Der Übergang von mehreren Elementen auf ein Element ist jedoch, besonders bei höheren Polynomordnungen, auf diesem Wege nicht zu empfehlen. Hier sollten die Koppelzonen dann nicht in den kritischen Bereichen der Struktur liegen (King, 1991). Praktisch stellt diese Forderung eine starke Einschränkung dar, weil Netzverfeinerungen gewöhnlich genau in den kritischen Bereichen der Struktur vorgenommen werden.

Eine Alternative zur Zwangskopplung inkompatibler Elementanordnungen besteht in der Verwendung von Übergangselementen. Dabei handelt es sich um speziell konstruierte isoparametrische Elemente niedriger Approximationsordnung ($p = 1$ oder 2). Sie erlauben im allgemeinen einen gleichmäßigen Übergang von einem größeren auf zwei kleinere Elemente der gleichen Polynomordnung (Knothe, 1992; Röhr, 1988; Scholz, 1986). Scholz (1986) untersucht eine Kreisringscheibe unter Innendruck und vergleicht bei quadratischer Ansatzordnung eine Netzverfeinerung durch Zwangskopplung mittels Penalty-Technik mit den Ergebnissen, die ein Übergangselement liefert. Für die Verknüpfung mittels Übergangselement wird eine deutlich bessere Ergebnisqualität festgestellt, die Abweichungen der FE-Spannungen von der exakten Lösung sind bei der Zwangskopplung 4 - 5 mal so groß (Bild 3). Außerdem führt die Versteifung des Koppelgebietes zu Spannungsoszillationen. Das bestätigt die oben getroffene Aussage, daß eine Kopplung inkompatibler Elementanordnungen über Zwangsbedingungen in den kritischen Bereichen der Struktur nicht zu empfehlen ist.

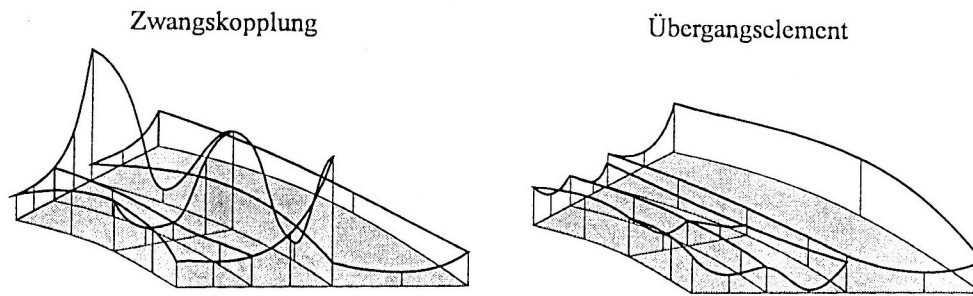


Bild 3. Abweichung der Ringspannung von der analytischen Lösung nach Scholz (1986)

Im folgenden wird von den Autoren ein neu entwickelter Elementtyp vorgestellt. Diese Elemente werden als pNh-Elemente bezeichnet, weil es sich um p-Elemente beliebiger Approximationsordnung handelt (i. allg. $p = 2 \dots 8$), die auf einer oder mehreren Elementseiten eine Diskretisierung mit N h-Elementen (kleine Elemente niedriger Approximationsordnung, $p = 1, 2$) ermöglichen. Der pNh-Elementtyp schließt Übergangselemente ein, bietet darüberhinaus aber weitere Möglichkeiten zur Netzverfeinerung. Im Gegensatz zu den herkömmlichen Übergangselementen ist die Teilung der verfeinernden Seiten frei wählbar. Dadurch ist sowohl die Anzahl als auch die Größe der anschließenden Elemente variabel. Außerdem lassen sich mit den pNh-Elementen Vernetzungen unterschiedlicher Polynomordnungen koppeln. Neben den knotenbezogenen, isoparametrischen Elementformulierungen können bei den pNh-Elementen auch hierarchische Ansatzfunktionen eingesetzt werden. Somit ermöglichen die pNh-Elemente eine kompatible Verbindung inkompatibler Elementanordnungen. Das größere Element ist dabei unabhängig vom Polynomgrad in der Lage, dem Verschiebungsverlauf der anschließenden Elemente exakt zu folgen (Bild 2e).

3 Formulierung der pNh-Elemente

Herkömmliche p-Elemente erweitern den linearen Ansatzraum eines finiten Elementes durch zusätzliche Polynome höherer Ordnung. Dafür können beispielsweise die üblichen Ansatzfunktionen der Lagrange- oder Serendipity-Klasse verwendet werden. Aus numerischen Gründen ist jedoch bei höheren Polynomordnungen ($p \geq 4$) der Einsatz hierarchischer Funktionen, wie beispielsweise die normierten Integrale der Legendre-Polynome, vorteilhafter. Sie erlauben die Addition zusätzlicher Unbekannter ohne Veränderung des ursprünglichen FE-Ansatzraumes (Bellmann, 1987; Szabó, u.a. 1991).

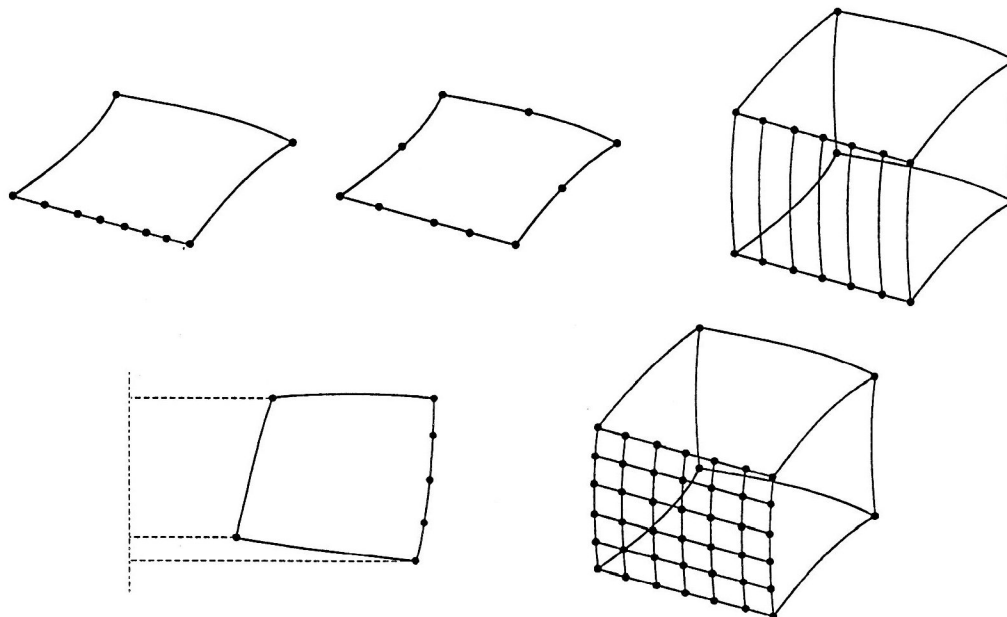


Bild 4. pNh-Elemente

pNh-Elemente unterscheiden sich von den p-Elementen dadurch, daß auf einer oder mehreren Elementseiten Zwischenknoten eingeführt werden, die N h-Formfunktionen aufspannen (Bild 4). Diese Technik führt auf bereichsweise definierte Formfunktionen niederer Ordnung. Anzahl und Länge der h-Abschnitte sind variabel. Hier werden pNh-Elemente mit stückweise linearen und stückweise quadratischen h-Formfunktionen betrachtet.

Die Herleitung der pNh-Ansatzfunktionen erfolgt mit der Methode der gemischten Interpolation (Gordon, 1971; Cavendish, 1984). Mit dieser Interpolationstechnik ist es möglich, eine in ihrem Definitionsbereich stetige Funktion mehrerer Variablen zu konstruieren, deren Verlauf auf den Rändern des Definitionsbereiches vorgeschrieben ist. Eine ausführliche Darstellung dieser Interpolationstechnik findet man bei Röhr (1988). Hier sollen exemplarisch die Ansatzfunktionen für ein ebenes, isoparametrisches pNh-Viereckelement hergeleitet werden. Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit sei dazu angenommen, daß sich die zusätzlichen Zwischenknoten auf der Elementseite $\xi_2 = -1$ befinden. Die Elementseite ist dadurch in N Randabschnitte unterteilt. Der k-te Randabschnitt beginnt an der Stelle ξ_{1k} der natürlichen ξ_1 -Koordinate und endet bei ξ_{1k+1} , dem Beginn des nächsten Abschnittes, $k = 1 \dots N$. Mittenknoten innerhalb des k-ten Randabschnittes befinden sich bei $\xi_{1k+\frac{1}{2}}$. Weiterhin wird $-\xi_{10} = \xi_{1N+2} = 1 + |\varepsilon|$ definiert, mit $\varepsilon \rightarrow 0$. Die Knoten der Nh-Seite werden fortlaufend numeriert. Bei stückweise quadratischen Abschnitten haben folglich die Eckknoten ungerade, die Mittenknoten gerade Knotennummern.

Für den einfachen Fall eines geradlinig berandeten Elementes gilt mit den linearen Interpolationsfunktionen I^L

$$\begin{aligned} I_1^L(\xi_i) &= \frac{1}{2}(1 - \xi_i) \\ I_2^L(\xi_i) &= \frac{1}{2}(1 + \xi_i) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (7)$$

beispielsweise für die Elementseite bei $\xi_1 = 1$

$$\tilde{\mathbf{u}}(1, \xi_2) = I_1^L(\xi_2) \hat{\mathbf{u}}(1, -1) + I_2^L(\xi_2) \hat{\mathbf{u}}(1, 1) \quad (8)$$

Zur Beschreibung des Randverschiebungsansatzes auf der Seite $\xi_2 = -1$ wird zunächst die natürliche ξ_1 -Koordinate des Elementes durch eine abschnittsweise definierte Randkoordinate $\check{\xi}_1$ ausgedrückt. Man gelangt für den k-ten Randabschnitt zu der Koordinatentransformation

$$\check{\xi}_1 = \frac{\xi_{1k} - 2\xi_1 + \xi_{1k+1}}{\xi_{1k} - \xi_{1k+1}} \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad \check{\xi}_1 \in [-1, 1] \quad (9)$$

Mit den Interpolationsfunktionen (7) können nun die Randverschiebungsfunktionen abschnittsweise beschrieben werden. Für den k-ten linearen Abschnitt gilt

$${}^k \tilde{\mathbf{u}}(\check{\xi}_1, -1) = I_1^L(\check{\xi}_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) + I_2^L(\check{\xi}_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k+1}, 1) \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad (10)$$

Verallgemeinert man die intervallbezogene Formulierung (10) so, daß sie auf der gesamten Elementseite definiert ist, dann erhält man den Randverschiebungsansatz

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) = \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k(\xi_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) \quad (11)$$

Die Formfunktionen Φ_k sind in $\xi_1 \in [-1, 1]$ stetig und besitzen die Eigenschaften

$$\Phi_k(\xi_1) = \begin{cases} \neq 0 & : \quad \xi_{1k-1} < \xi_1 < \xi_{1k+1} \\ 1 & : \quad \xi_1 = \xi_{1k} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \quad (12)$$

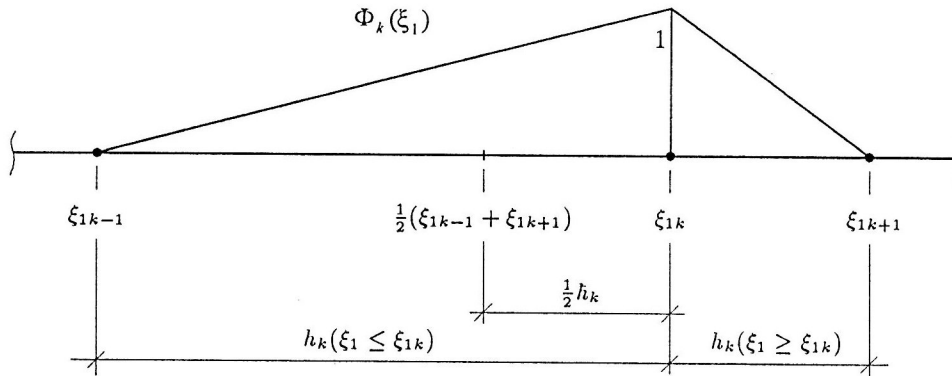


Bild 5. Lineare Formfunktion nach (13)

Für eine stückweise lineare Approximation hat Φ_k die Form (Bild 5)

$$\Phi_k = \frac{1}{2h_k} \varphi_k(\xi_1) \quad (13)$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi_k(\xi_1) &= \tilde{h}_k + |\xi_1 - \xi_{1k-1}| - 2|\xi_1 - \xi_{1k}| + |\xi_1 - \xi_{1k+1}| \\ \tilde{h}_k &= (\xi_{1k-1} - 2\xi_{1k} + \xi_{1k+1}) \text{sign}(\xi_1 - \xi_{1k}) \\ h_k &= \frac{1}{2}(\tilde{h}_k - \xi_{1k-1} + \xi_{1k+1}) \quad k = 1 \dots N \end{aligned}$$

Die Randverschiebungsfunktionen lassen sich nun mit den linearen Interpolationsfunktionen (7) in das Gebietsinnere projizieren. Man erhält so eine Projektion in ξ_1 -Richtung

$$P_{\xi_1}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_1)\tilde{\mathbf{u}}(-1, \xi_2) + I_2^L(\xi_1)\tilde{\mathbf{u}}(1, \xi_2) \quad (14)$$

und analog dazu in ξ_2 -Richtung

$$P_{\xi_2}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_2)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) + I_2^L(\xi_2)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, 1) \quad (15)$$

Die Interpolationsoperatoren P_{ξ_1} und P_{ξ_2} stehen orthogonal aufeinander und sind durch die Randverläufe eindeutig bestimmt. Überlagert man beide Projektionen, ergibt sich nur dann eine eindeutige Interpolationsfunktion mit exakter Darstellung der vorgegebenen Randfunktionen, wenn die durch die Interpolationsoperatoren zusätzlich aufgebrauchten Randterme wieder von der Gesamtfunktion abgezogen werden (Bild 6). Für den gemischten Interpolationsoperator erhält man so

$$P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2)] = P_{\xi_1} + P_{\xi_2} - P_{\xi_1}P_{\xi_2} \quad (16)$$

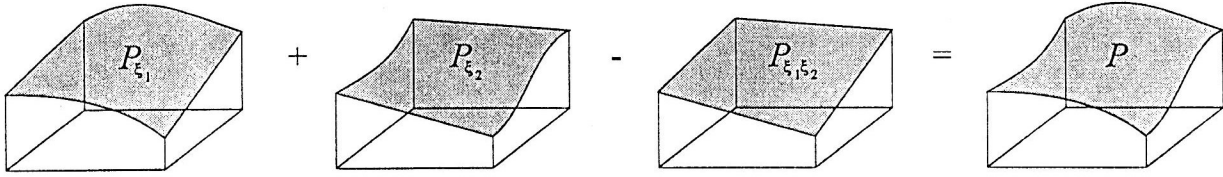


Bild 6. Methode der gemischten Interpolation

Die resultierende Funktion $P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2)]$ ist im Elementgebiet stetig und entspricht für $\xi_i = \pm 1$ den vorgegebenen Randfunktionen. Damit lautet die vollständige Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand des bilinearen pNh-Elementes

$$\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{4}(1 + \xi_2)[(1 - \xi_1)\hat{\mathbf{u}}(-1, 1) + (1 + \xi_1)\hat{\mathbf{u}}(1, 1)] + \frac{1}{2}(1 - \xi_2) \sum_{k=1}^{N+1} \Phi_k(\xi_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) \quad (17)$$

Durch Einsetzen der Verschiebungseinheitszustände isoliert man die Ansatzfunktionen für die einzelnen Knoten.

Für eine stückweise quadratische Interpolation der Elementseite $\xi_2 = -1$ ist mit Gleichung (9) wieder abschnittsweise zu approximieren. Der pNh-Rand hat dann einen Mittenknoten innerhalb jedes Randabschnittes. Aus N Randabschnitten resultieren $2N+1$ Knoten auf der Nh-Seite. Mit den quadratischen Formfunktionen

$$\begin{aligned} I_1^Q(\xi_i) &= \frac{1}{2}\xi_i(\xi_i - 1) \\ I_2^Q(\xi_i) &= 1 - \xi_i^2 \\ I_3^Q(\xi_i) &= \frac{1}{2}\xi_i(\xi_i + 1) \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (18)$$

nimmt die Randinterpolation (12) dann die Form

$${}^k \tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1) = I_1^Q(\xi_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k}, -1) + I_2^Q(\xi_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k+\frac{1}{2}}, -1) + I_3^Q(\xi_1) \hat{\mathbf{u}}(\xi_{1k+1}, -1) \quad \xi_1 \in [\xi_{1k}, \xi_{1k+1}] \quad (19)$$

an. Die Formfunktionen für eine stückweise quadratische Approximation verändern sich gegenüber Gleichung (13) für die Eckknoten zu

$$\Phi_{2k-1}(\xi_1) = \frac{1}{h_k^2} (\frac{1}{2} h_k \text{sign}(\xi_1 - \xi_{1k}) - \xi_1 + \xi_{1k}) \Phi_k(\xi_1) \quad (20)$$

und für die Mittenknoten zu

$$\Phi_{2k}(\xi_1) = \frac{2}{h_k^2} (\xi_1 - \xi_{1k}) \Phi_k(\xi_1) \quad (21)$$

Die Eigenschaften (12) der Formfunktionen bleiben erhalten. Aus diesen Ansatzfunktionen werden mit den Gleichungen (14), (15) und (16) wieder die Verschiebungsinterpolation des Elementes und die Ansatzfunktionen aller Eck- und Zwischenknoten bestimmt.

Zu pNh-Elementen höherer Polynomordnung gelangt man, indem die Randterme $\tilde{\mathbf{u}}(\pm 1, \xi_2)$ und $\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \pm 1)$ durch höherwertige Randverschiebungsansätze ersetzt werden. Mit den Gleichungen (14) bis (16) kann wieder die Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand abgeleitet werden.

Prinzipiell erfolgt die Konstruktion dreidimensionaler pNh-Elemente genauso. Die Randverläufe beschreiben dann Flächen, die durch die Interpolationsoperatoren ins Elementinnere projiziert werden. Die möglichen Elementkonfigurationen sind entsprechend vielfältiger. Bei aneinandergrenzenden Flächen ist die Anzahl der

Knoten aufeinander abzustimmen. Ein pNh-Hexaederelement habe beispielweise $N_1 \cdot N_2$ bereichsweise Ansätze bei $\xi_3 = -1$. Bei linearen h-Abschnitten folgen daraus N_1+1 Knoten entlang den Seitenkanten bei $\xi_2 = \pm 1$ und N_2+1 Knoten entlang den Seitenkanten bei $\xi_1 = \pm 1$. Innerhalb der Elementfläche liegen $(N_1-1)(N_2-1)$ Knoten. Bei quadratischen h-Abschnitten mit Kompatibilität zu Serendipity-Elementen beträgt die Anzahl der Knoten entlang $\xi_2 = \pm 1$ dann $2N_1+1$ und entlang $\xi_1 = \pm 1$ entsprechend $2N_2+1$. In der pNh-Fläche liegen hier $(2N_1-1)(2N_2-1)$ Knoten. Die Seitenverschiebungsfunktionen werden wieder in das Gebietsinnere projiziert.

$$P_{\xi_1}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_1)\tilde{\mathbf{u}}(-1, \xi_2, \xi_3) + I_2^L(\xi_1)\tilde{\mathbf{u}}(1, \xi_2, \xi_3) \quad (22)$$

$$P_{\xi_2}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_2)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, -1, \xi_3) + I_2^L(\xi_2)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, 1, \xi_3) \quad (23)$$

$$P_{\xi_3}[\tilde{\mathbf{u}}] = I_1^L(\xi_3)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, -1) + I_2^L(\xi_3)\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, 1) \quad (24)$$

Die vollständige Interpolationsfunktion für den Verschiebungszustand erhält man dann mit dem gemischten Interpolationsoperator (Röhr, 1988)

$$P[\tilde{\mathbf{u}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = P_{\xi_1} + P_{\xi_2} + P_{\xi_3} - P_{\xi_1}P_{\xi_2} - P_{\xi_2}P_{\xi_3} - P_{\xi_1}P_{\xi_3} + P_{\xi_1}P_{\xi_2}P_{\xi_3} \quad (25)$$

Die hier vorgestellten pNh-Elemente sind Viereck- bzw. Quaderelemente. Analog lassen sich weitere pNh-Elemente mit beliebiger Knotenkonfiguration herleiten. Um die Geometrie der pNh-Elemente isoparametrisch zu approximieren, sind die Knotenverschiebungen $\hat{\mathbf{u}}$ in den Gleichungen (8) und (10) bzw. in Gleichung (19) durch die Knotenkoordinaten $\hat{\mathbf{x}}$ zu ersetzen. Die Gleichungen beschreiben dann die Randkonturen des Elementes. Die stückweise linearen Ansätze können so polygonartige, die quadratischen Ansätze stückweise parabolische Kanten exakt erfassen.

Die Ansatzfunktionen der pNh-Elemente sind im gesamten Elementgebiet definiert. Sie garantieren einen C^0 -stetigen Verlauf der approximierten Funktion im Elementinneren und an den Elementgrenzen. Alle Ansatzfunktionen enthalten mindestens ein vollständiges Polynom 1. Ordnung und können somit konstante Spannungszustände exakt erfassen.

4 Numerische Realisierung

Die Ansatzfunktionen der pNh-Elemente haben infolge der bereichsweisen Interpolation unstetige 1. Ableitungen. Daraus ergeben sich für die numerische Umsetzung einige Besonderheiten. Zum Aufbau der FE-Beziehungen ist eine Integration über das Elementgebiet bzw. den Elementrand erforderlich, die im allgemeinen numerisch durchgeführt werden muß. Hier wird dazu die Gauß-Quadratur verwendet. Sie integriert mit n_G Stützpunkten Polynome bis zum Grade $2n_G - 1$ exakt und liefert damit die höchstmögliche Genauigkeit (Dreszer, 1975). Ihre Anwendung setzt voraus, daß der Integrand an beliebigen Stellen des Integrationsgebietes berechenbar ist. Bei den pNh-Elementen ist deshalb ein modifizierter Algorithmus erforderlich. Das Elementgebiet wird so in Subgebiete unterteilt, daß in jedem Subgebiet differenzierbare Ansatzfunktionen vorliegen. Im eindimensionalen Fall ergibt sich folgende Aufspaltung

$$\int_{-1}^1 f(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{k=1}^N \int_{\xi_{1k}}^{\xi_{1k+1}} f(\xi_1) d\xi_1 \quad (26)$$

wobei als Integrationsgrenzen die Knotenkoordinaten ξ_{1k} mit $k = 1 \dots N+1$ angenommen werden. Mit der Transformationsbeziehung (9) läßt sich Gleichung (26) in die Standardform überführen, dabei sind n_G , $w(\tilde{\xi}_{1i})$ Gaußpunktzahl und -wichtung.

$$\int_{-1}^1 f(\xi_1) d\xi_1 = \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 f(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}_1 \approx \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\xi_{1k+1} - \xi_{1k}) \sum_{i=1}^{n_G} f(\tilde{\xi}_{1i}) w(\tilde{\xi}_{1i}) \quad (27)$$

Eine ähnliche Vorgehensweise muß bei der Berechnung der Spannungen gewählt werden. Sie erfolgt ebenfalls in Subgebieten. Repräsentative Spannungswerte in den Knotenpunkten der Elemente erhält man, indem an-

schließend über aneinandergrenzende Subgebiete gemittelt wird. Bei der programmtechnischen Umsetzung sind dafür entsprechende Algorithmen erforderlich.

Für Beispielrechnungen mit isoparametrischen pNh-Elementen wurde das Programmsystem COSAR (Computer System for Analysis & Research) verwendet. COSAR ist ein umfassendes, leistungsstarkes Finite-Elemente-System, das vor allem zur Berechnung von Maschinenbauproblemen Anwendung findet (COSAR, 1990; Gabbert u.a., 1992). Eingesetzt werden überwiegend Elemente der Serendipity-Klasse, wobei COSAR maximal quadratische Ansatzordnung $p = 2$ zuläßt. Die isoparametrischen pNh-Elemente sind deshalb kompatibel zu den Serendipity-Elementen. Entwickelt wurden ebene, rotationssymmetrische und räumliche pNh-Elemente mit frei wählbarer Anzahl h-Abschnitte (maximal $N=20$ in einer lokalen Koordinatenrichtung). Mit entsprechenden Routinen zur Datengenerierung, Ergebnisberechnung und Auswertung wurden diese Elemente in die Datenstruktur von COSAR eingepaßt.

Die praktische Anwendung des pNh-Elementkonzeptes hängt wesentlich von der Bereitstellung geeigneter Pre- und Postprozessoren ab. Ein Ziel der weiteren Arbeit ist deshalb die Bereitstellung von Datengeneratoren, die eine Verknüpfung von FE-Vernetzungen mit inkompatibler Knotenzahl und unterschiedlichen Ansatzordnungen ermöglichen. Dazu sind beispielsweise beim Aufbau des FE-Modells h- und p-Vernetzungen zu kennzeichnen. Anschließend können interaktiv Koppelbereiche definiert werden, in denen dann pNh-Elemente generiert werden. Denkbar ist auch die Definition von Makrovernetzungen für häufig auftretende geometrische Details, wie z.B. Bohrungen.

Zur Auswertung der FE-Lösung waren ebenfalls einige Modifikationen erforderlich. Die Knotenzahl der pNh-Elemente ist im Gegensatz zu den üblichen finiten Elementen nicht allein durch den Elementtyp bestimmt. Damit ergeben sich beispielsweise für die grafische Darstellung Besonderheiten, die eine Reihe von Spezialalgorithmen erfordern.

5 Anwendungen

5.1 Lochscheibe

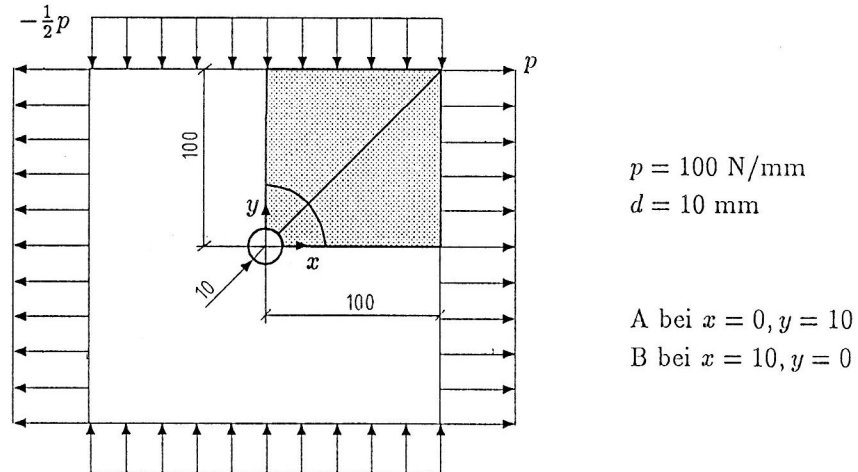


Bild 7. Scheibe mit Loch

Betrachtet wird die in Bild 7 dargestellte Scheibe mit kleinem Loch. Mit einer sehr feinen Vernetzung (ca. 3500 Freiheitsgrade) berechnet man eine maximale Spannungserhöhung von $k(\sigma_x^A) = 3,65$ im Punkt A an der Oberseite des Loches sowie $k(\sigma_y^B) = 2,64$ im Punkt B. Mit dem Ausgangsnetz aus 4 isoparametrischen Elementen vom Polynomgrad $p = 2$ wird der Verschiebungszustand bereits gut angenähert, die Spannungen sind aber noch sehr ungenau. Untersucht wurde nun die Verbesserung der Spannungsberechnung bei Netzverfeinerung. Zunächst wurde die übliche Vorgehensweise einer gezielten h-Verfeinerung gewählt (Bild 8). Mit 8 Elementen entlang des Lochrandes wird die Spannungserhöhung $k(\sigma_x^A)$ richtig wiedergegeben, dafür sind hier $n_f = 224$ Freiheitsgrade notwendig. Auch wenn sich für dieses Beispiel noch relativ einfach günstigere h-Vernetzungsvarianten finden lassen, so wächst doch durch eine feinere Vernetzung am Loch auch die Anzahl der Elemente im übrigen Lösungsgebiet.

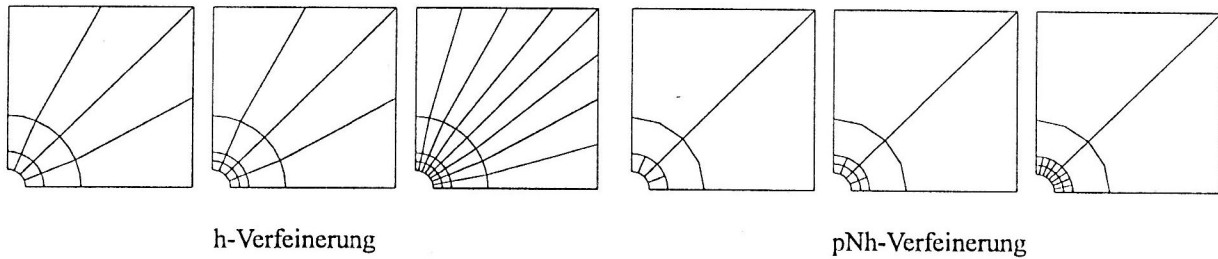


Bild 8. Netzverfeinerung am Loch

h-Verfeinerung			pNh-Verfeinerung		
n_f	$k(\sigma_x^A)$	$k(\sigma_y^B)$	n_f	$k(\sigma_x^A)$	$k(\sigma_y^B)$
32	2,51	1,47			
88	3,49	2,45	64	3,45	2,41
112	3,58	2,56	88	3,56	2,54
224	3,65	2,63	152	3,63	2,61

Tabelle 1. Spannungserhöhung bei Netzverfeinerung

Setzt man demgegenüber zur Verfeinerung pNh-Elemente ($p = 2$) ein, werden bereits mit 50 % weniger Freiheitsgraden nahezu gleichwertige Ergebnisse berechnet (Tabelle 1). Da die Teilung der Nh-Elementkante nicht äquidistant sein muß, bietet sich zusätzlich die Möglichkeit, progressiv auf Punkt A hin zu verfeinern. Dadurch berechnet man bereits mit einem Netz aus nur 14 Elementen ($n_f=104$) eine maximale Spannungserhöhung, die der Referenzlösung entspricht. Die Genauigkeit am Punkt B ist dann natürlich geringer ($k(\sigma_x^A) = 3,65$, $k(\sigma_y^B) = 2,54$). Bild 9 zeigt, daß mit diesem groben Netz auch der Spannungsverlauf im Innern der Struktur sehr gut angenähert wird. Für praktische Konstruktionen ermöglicht es diese Technik, dichte Vernetzungen wie sie beispielsweise an Bohrungen im Bauteil notwendig sind, auf kleine Bereiche zu begrenzen.

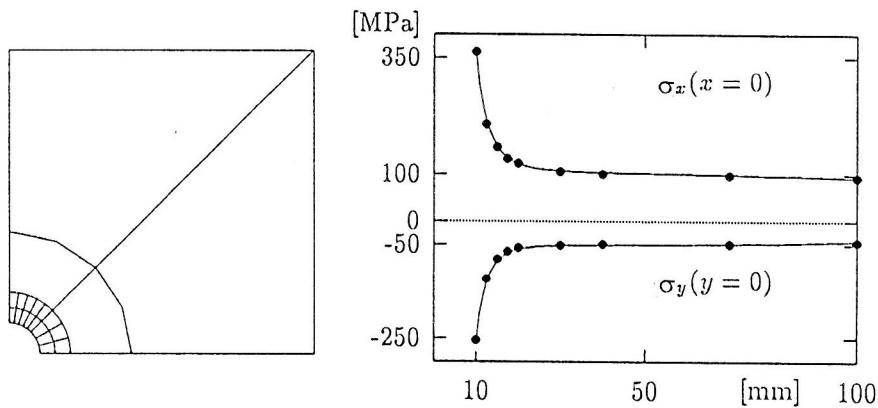


Bild 9. Spannungsverläufe bei progressiver Teilung

5.2 Rohrverzweigung

Rohrverzweigungen sind als Bestandteile von Rohrleitungssystemen weit verbreitete Bauteile; dennoch lassen sich trotz intensiver Forschungen keine allgemeingültigen quantitativen Aussagen zu den Spannungskonzentrationen in der Rohrdurchdringung treffen (Weber, 1989). Hier wird ein dickwandiges Rohr mit ausgehaltem senkrechten Stutzen unter Innendruck- sowie Längskraftbelastung berechnet (Bild 10). Wegen der geometrischen Symmetrie ist dabei nur ein Viertel zu modellieren. Der mittlere Radius des Rohr-Stutzen-Übergangs

beträgt $r_m = 100$ mm. Die Längen von Grundrohr und Stutzen wurden nach Graeff-Weinberg (1992) so gewählt, daß sich am jeweiligen Rohrende annähernd der Spannungszustand des ungestörten Zylinders einstellt.

$$p_i = 40 \text{ MPa}$$

$$F_y = 2500 \text{ kN}$$

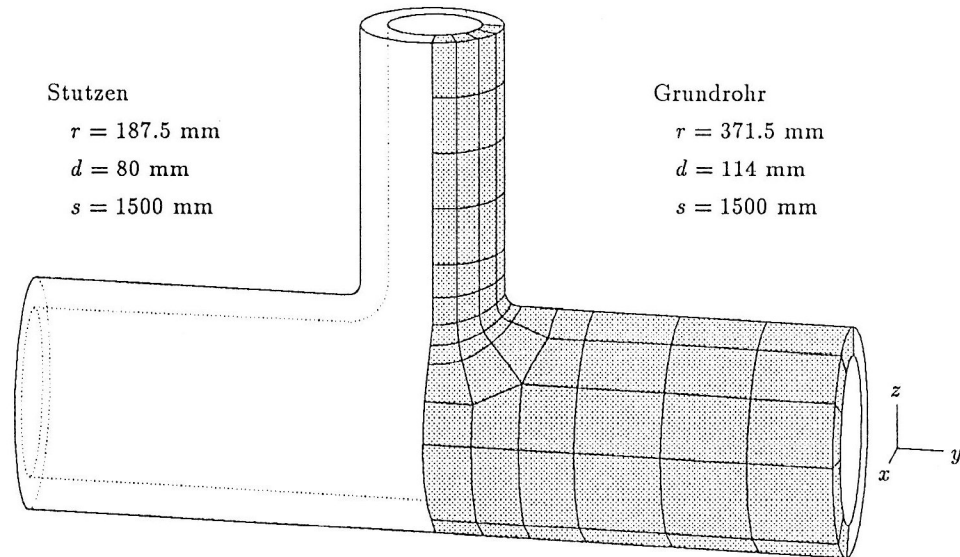


Bild 10. Senkrechte Rohrverzweigung

Die maximalen Spannungen treten im Bereich der Rohrdurchdringung auf. Wegen der Dickwandigkeit ist hier eine starke Änderung der Spannungen über die Wanddicke zu beobachten. Um dieses Verhalten genauer zu erfassen, wurden der Durchdringungsbereich verfeinert und zwei bzw. vier Elemente über der Wanddicke angeordnet. Damit die Netzverfeinerung auf den Durchdringungsbereich begrenzt bleibt, schließen pNh-

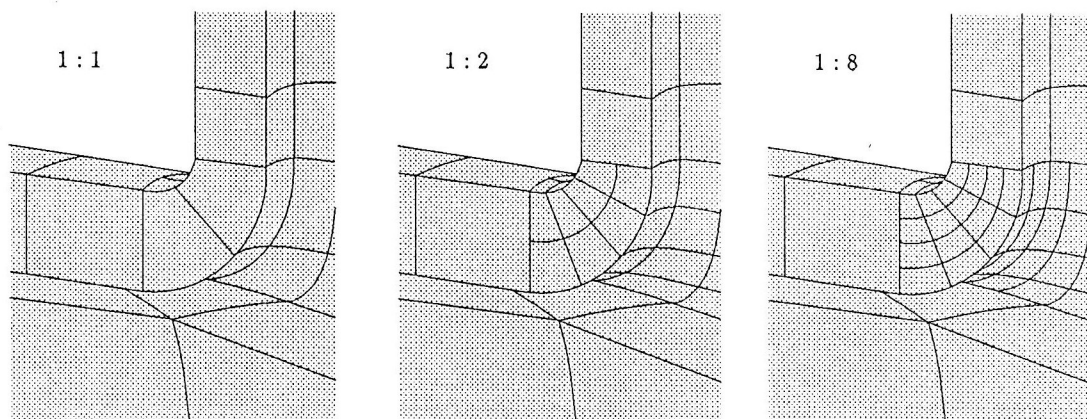


Bild 11. Netzverfeinerung im Durchdringungsbereich

Hexaederelemente an. Sie realisieren den Übergang auf eine Elementschicht (Bild 11). Durch Nutzung einer Substrukturzerlegung ist der Aufwand für die Netzverfeinerung verhältnismäßig gering, die anschließenden einschichtigen Vernetzungen von Grundrohr und Stutzen bleiben unverändert.

Das Maximum der Vergleichspannung σ_{v4} liegt bei Innendruckbelastung an der Innenseite der Durchdringung im Längsschnitt der Verzweigung. Die Spannungen steigen in diesem Bereich stark an und klingen dann rasch

über die Rohrlänge ab (Bild 12). Bei Zugbelastung treten die höchsten Spannungswerte im Querschnitt der Verzweigung an der Innenseite auf. Im Durchdringungsbereich sind außen hohe Zugspannungen zu beobachten. Bei Überlagerung beider Belastungen sind die maximalen Vergleichsspannungen geringer, allerdings treten jetzt auch auf der Außenseite des Rohr-Stutzen-Übergangs Spannungen über 300 MPa auf.

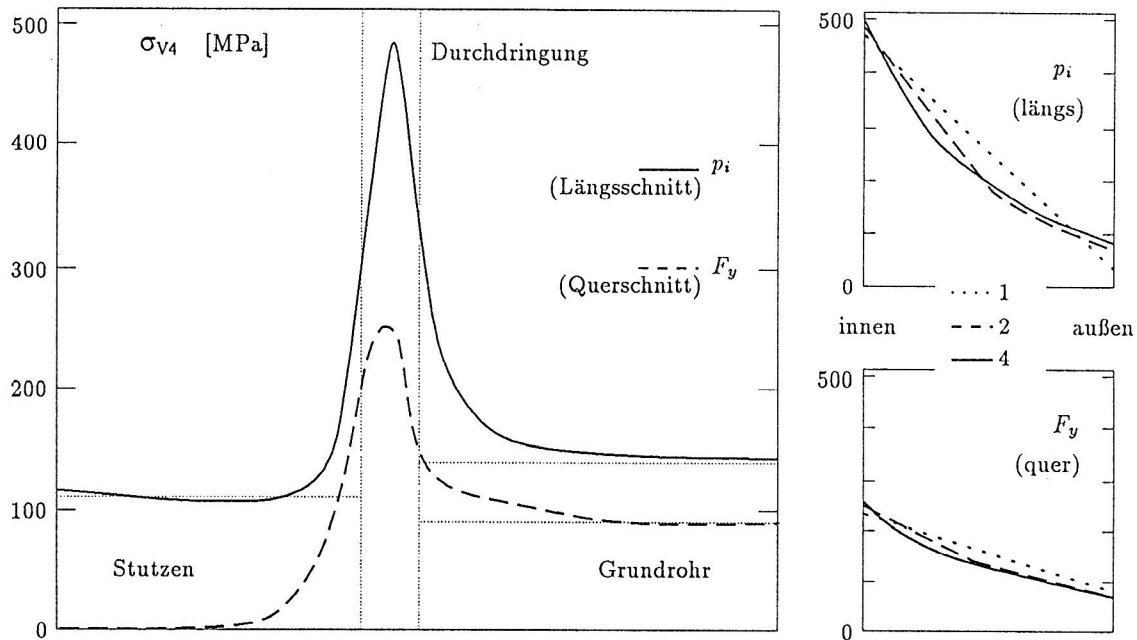


Bild 12. Spannungsverlauf in Quer- und Längsschnitt

Um den Spannungsanstieg in der Rohrverzweigung zu bewerten, ermittelt man üblicherweise Spannungserhöhungsfaktoren für die erste Hauptspannung $k(\sigma_1)$. Von Rost (1976) werden für diese Rohrverzweigung bei Innendruckbelastung maximale Spannungserhöhungen von 3,6 berechnet. Experimentelle Untersuchungen von Fessler u.a. (1962) ergaben $k(\sigma_1) \approx 3$. Für die Zugbelastung des Grundrohres liegen keine konkreten Vergleichswerte vor. Erfahrungsgemäß führt sie durch die versteifende Wirkung des Stutzens zu etwas geringeren Spannungserhöhungen (Graeff-Weinberg, 1992), so daß die berechneten Werte realistisch sind. Als Bezugsspannungen dienen die nach der Schalentheorie berechnete Tangentialspannung bzw. die Zugspannung im ungestörten Rohr (Tabelle 2).

Elemente	p_i	F_y
1	3,69	2,97
2	3,72	3,03
4	3,80	3,06

Tabelle 2. Spannungserhöhungsfaktoren

6 Zusammenfassung

Die berechneten Beispiele zeigen exemplarisch, wie man durch den Einsatz von pNh-Elementen gezielt Freiheitsgrade an den interessierenden Stellen der Struktur konzentrieren kann. Die Vorteile einer solchen gezielten Netzverfeinerung sind besonders im dreidimensionalen Fall offensichtlich.

Momentan sind weitere Untersuchungen mit pNh-Elementen höherer Polynomordnung in Arbeit. Insgesamt kann aber bereits jetzt festgestellt werden, daß mit dem entwickelten pNh-Elementkonzept eine effektive und einfach handhabbare Technik zur Kopplung inkompatibler Vernetzungen zur Verfügung steht. Die pNh-Elemente haben den entscheidenden Vorteil, daß eine kompatible Elementanordnung erzeugt wird, ohne daß es

notwendig ist, Freiheitsgrade zu eliminieren. Dadurch ist auch in den Koppelbereichen eine gute Approximation des Lösungsverlaufes möglich. Darüberhinaus lassen sich pNh-Elemente relativ problemlos in vorhandene FE-Systeme integrieren.

Förderung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft und dem Land Sachsen-Anhalt für die Förderung dieser Arbeit im Rahmen des Graduiertenkollegs „Modellierung, Berechnung und Identifikation mechanischer Systeme“ der Universität Magdeburg.

Literatur

1. Bellmann, J.: Hierarchische Finite-Element-Ansätze und adaptive Methoden für Scheiben- und Plattenprobleme. Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I. Dissertation, TU München, (1987).
2. Berger, H.: Beitrag zur Spannungsberechnung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage von dreidimensionalen Verschiebungsmodellen. Dissertation, TU Magdeburg, (1982).
3. Cavendish, J. C.; Hall, C. A.: A new class of transition blended finite elements for the analysis of solid structures. Int.J.Num.Meth.Engng. 20, (1984), 241-253.
4. COSAR-Universelles FEM System. Nutzerhandbuch. FEMCOS GmbH Magdeburg, (1990).
5. Dreszer, J.: Mathematik Handbuch. Verlag Harri Deutsch, Thun, (1975).
6. Fessler, B. H.; Lewin, H.: Stresses in branched pipes under internal pressure. Instn. mech. Eng. Proc 176, (1962), 771-788.
7. Gabbert, U.: Berücksichtigung von Zwangsbedingungen in der FEM mittels der Penalty-Funktion-Methode. Technische Mechanik 4, 2, (1983), 40-46.
8. Gabbert, U.: Die Finite-Element-Methode in den Ingenieurwissenschaften unter dem Aspekt der rechen-technischen Realisierung im Rahmen universeller Programmsysteme. Habilitation, TU Magdeburg, (1987).
9. Gabbert, U.; Zehn, M.: Universelles FEM-System COSAR - ein zuverlässiges Berechnungswerkzeug für den Ingenieur. In: Berichte der III. COSAR-Konferenz: Qualität und Zuverlässigkeit von FEM-Berechnungen, Magdeburg, (1992).
10. Gordon, W. J.: Blending-function methods of bivariate and multivariate interpolation and approximation. SIAM J.Num.Anal. 8, (1971), 158-177.
11. Graeff-Weinberg, K.: Untersuchung des Spannungs- und Verformungsverhaltens von senkrechten Rohrverzweigungen. Konstruktion 44, (1992), 275-280.
12. King, R.; Welch, K.: Modelling of the interface between inkompatible p-element boundaries. Rasna Corp., San Jose, (1991).
13. Knothe, K.; Wessel, H.: Finite Elemente. Springer-Verlag, (1992).
14. Röhr, U.: Entwicklung und Anwendung einer kombinierten Finite-Elemente-Methode für die Strukturanalyse des Schiffskörpers. Habilitation, WPU Rostock, (1988).
15. Rost, M.: Zur Beanspruchung von senkrechten Abzweigstücken durch Innendruck und äußere Kräfte und Momente. Dissertation, Universität Stuttgart, (1976).
16. Scholz, E.: Kompatible finite Übergangs-, Rand- und Standardstrukturelemente zur effektiven mechanischen Strukturanalyse von Rand- und Übergangsbereichen. Dissertation, TU Magdeburg, (1986).
17. Szabó, B. A.; Babuška, I.: Finite Element Analysis. Verlag John Wiley and Sons, (1991).
18. Weber, J.: Beanspruchung von Rohrverzweigungen. Dissertation, TU Magdeburg, (1989).
19. Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.: The Finite Element Method. Vol. 1: Basic Formulation and Linear Problems. McGraw-Hill Book Company, (1989).

Anschrift: Dr.-Ing. H. Berger, Dipl.-Ing. K. Graeff-Weinberg, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39106 Magdeburg