

Energiebilanzintegrale für Risse in piezoelektrischen Werkstoffen unter elektrischen und mechanischen Beanspruchungen

M. Kuna

Zur Bewertung des Bruch- und Schädigungsverhaltens piezoelektrischer Werkstoffe sind wegunabhängige Energiebilanzintegrale der Kontinuumsmechanik ein wichtiges Hilfsmittel. Nach einer Einführung in die grundlegenden Feldgleichungen piezoelektrischer Kontinua und die Bruchmechanik für Risse unter kombinierten elektrischen und mechanischen Beanspruchungen wird der Zusammenhang zwischen dem Erhaltungssatz für den elektromechanischen Material-Impuls-Tensor und dem wegunabhängigen elektromechanischen Rißintegral J_k^{em} hergestellt. Das J_k^{em} -Integral wird durch Einführung eines zusätzlichen Gebietsintegrals erweitert für den Fall, daß mechanische und elektrische Beanspruchungen auch im Volumen und auf den Rißufern wirken und die Materialkonstanten ortsabhängig sind. Um eine effiziente numerische Berechnung anhand von Finite-Elemente-Rechnungen zu ermöglichen, wird J_k^{em} in die Form eines äquivalenten Gebietsintegrals überführt.

1 Einleitung

In der Bruchmechanik finden wegunabhängige Integrale, die aus allgemeinen Erhaltungssätzen der Kontinuumsmechanik ableitbar sind, eine wichtige Anwendung. Da mit ihrer Hilfe die Energiebilanz bei Rißausbreitung beschrieben wird, stellen sie geeignete bruchmechanische Kenngrößen dar, die das energetische Angebot für das Bruchversagen einer Struktur mit Riß unter gegebenen Belastungsbedingungen quantifizieren. Durch Gegenüberstellung mit entsprechenden Werkstoffkennwerten, die den spezifischen Energieverbrauch bei Rißwachstum charakterisieren, lassen sich Bruchkriterien formulieren, die als Grundlage zur Bewertung der Bruchsicherheit und Lebensdauer von Bauteilen dienen. Einen Überblick über die Integralkriterien der Bruchmechanik im Rahmen ausschließlich mechanischer Feldprobleme gibt die Monografie von Kienzler (1993).

Neben den rein mechanischen Belastungen gewinnen aber auch elektrische und magnetische Beanspruchungen von Rissen und Defekten eine wachsende Rolle. Bereits bei klassischen dielektrischen Funktionskeramiken stellen sich Fragen der Konzentration elektrischer Felder an Defekten (Risse, Elektroden, Grenzflächen) und deren Auswirkung auf die Lebensdauer und Zuverlässigkeit. Mit der Entwicklung innovativer technischer Disziplinen wie der Mikrosystemtechnik, der Mechatronik, der Adaptronik, der Sensorik u.a.m., der damit verbundenen Anwendung energiewandelnder Wirkprinzipien und dem Einsatz intelligenter Materialien (piezoelektrische, magnetostriktive u.a. Effekte) wächst die Notwendigkeit zur kombinierten elektromagnetomechanischen Strukturanalyse und zur Beschreibung des Deformations-, Schädigungs- und Bruchverhaltens intelligenter Werkstoffe. Aktuelle werkstoffmechanische Probleme bei Verbundwerkstoffen aus piezoelektrischen und konventionellen (Polymer, Glas, CFC u.a.) Materialien hat Kuna (1995a) erörtert.

Bruchmechanische Fragestellungen für piezoelektrische Materialien werden erst seit einigen Jahren intensiver untersucht. Infolge des piezoelektrischen Effektes und seiner Umkehrung besteht eine vollständige Kopplung der elektrischen und mechanischen Felder auf konstitutiver Ebene. Den erreichten Stand geben die Arbeiten von Pak (1992) und Suo (1992) wieder. Eine zentrale Aufgabe dabei ist die gekoppelte elektromechanische Beanspruchungsanalyse von Rissen und die Formulierung geeigneter Bruchkenngrößen. Bereits von Cherepanov (1979) wurden elektrische Felder in die Energiebilanz am Riß einbezogen. McMeeking (1990) stellte ein J -Integral für Risse unter Einwirkung elektrischer und mechanischer Beanspruchungen in dielektrischen Materialien auf. Für piezoelektrische Materialien hat Pak (1990) eine Erweiterung des klassischen J -Integrals der Bruchmechanik angegeben. Von Pak und Herrmann (1986) wurde der Material-Impuls-Tensor für elastische Dielektrika eingeführt.

2 Die Grundgleichungen des piezoelektrischen Kontinuums

Die hier betrachtete lineare statische Theorie piezoelektrischer Feldprobleme besteht aus der Kombination der Feldgleichungen für die elastostatischen mechanischen und die elektrostatischen Größen, welche über die piezoelektrischen Materialgleichungen miteinander gekoppelt sind. Die primären Feldgrößen sind in der Elastostatik der Verschiebungsvektor u_i und in der Elektrostatik das skalare Feld des elektrischen Potentials φ . Daraus leiten sich durch Gradientenbildung die mechanischen Dehnungen ε_{ij} und die elektrische Feldstärke E_i ab.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ E_k &= -\varphi_{,k}\end{aligned}\quad (1)$$

Die Bilanzgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte (Mechanik) bzw. der Ladungen (Elektrostatik) lauten im Gebiet V des Körpers

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + b_i &= 0 \\ D_{i,j} - \omega_v &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

und auf seinem Rand S

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} n_j &= T_i \\ D_j n_j &= -\omega_s\end{aligned}\quad (3)$$

Dabei bezeichnen: σ_{ij} den Spannungstensor, D_i die dielektrische Verschiebung, b_i die Volumenkraftdichte, ω_v die Volumenladungsdichte, T_i die Randspannungen, ω_s die Randladungsdichte und n_j den Normalenvektor.

Die konstitutiven Beziehungen verknüpfen die Zustandsvariablen ε_{ij} und E_i mit den abhängigen Größen σ_{ij} und D_i wie folgt

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{mij} E_m = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ D_n &= e_{nkl} \varepsilon_{kl} + \kappa_{nm} E_m = -\frac{\partial H}{\partial E_n}\end{aligned}\quad (4)$$

wobei die untere Gleichung den piezoelektrischen (sensorischen) und die obere den inversen (aktorischen) Effekt beschreibt. Hierbei bedeuten C_{ijkl} den Tensor der elastischen Konstanten, e_{ikl} die piezoelektrischen Moduln und κ_{ij} die Dielektrizitätskonstanten. Gleichung (4) läßt sich aus dem adäquaten thermodynamischen Zustandspotential, der elektrischen Enthalpiedichte H durch Ableitung nach den Zustandsvariablen gewinnen (Thiersten, 1969).

$$H(\varepsilon_{ik}, E_i) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ikl} E_i \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \kappa_{ij} E_i E_j \quad (5)$$

$$dH = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i \quad (6)$$

3 Die elektromechanische Randwertaufgabe für Risse

Risse werden als flächenhafte Diskontinuitäten in einer Struktur angenommen, deren Spitze entlang der Rißfront als ideal scharf (Kerbradius=0) anzusehen ist. Die beiden Rißuferflächen werden mit Γ^+ und Γ^- bezeichnet. Die Randwertaufgabe des gekoppelten elektromechanischen Problems ist im allgemeinen Fall durch folgende Randbedingungen und Belastungen gekennzeichnet:

- Randspannungen T_i auf dem Teil S_T des Randes
- Randladungen ω_s auf dem Teil S_ω des Randes
- vorgegebene Verschiebungen u_i^0 auf dem Teil S_u des Randes
- vorgegebenes Potential φ^0 auf dem Teil S_φ des Randes
- Volumenkräfte b_i in V
- Ladungsverteilungen ω_v in V

Der Riß wird in der Mechanik üblicherweise durch die Randbedingung "spannungsfreie Rißufer" charakterisiert, d.h. $\sigma_{ij}n_j = 0$ auf Γ^+ und Γ^- . Bezüglich ihrer elektrostatischen Wirkung werden Risse meist als "undurchlässig" angesehen (d.h. $D_j = 0$ im Spalt), was dann zutrifft, wenn die Dielektrizitätskonstanten des Mediums im Riß (z.B. Luft, Öl) sehr viel kleiner als diejenigen des Materials sind. Die Rißufer können dann als "ladungsfrei" angenommen werden, es gilt $D_j n_j = 0$ auf Γ^+ und Γ^- . Hier sollen auch die verallgemeinerten Randbedingungen zugelassen werden, daß auf den Rißufern ganz oder teilweise mechanische Spannungen (z.B. Druck) und externe elektrische Ladungen (z.B. elektrolytisches Medium) angreifen.

In den grundlegenden Untersuchungen zur Bruchmechanik piezoelektrischer Materialien, die hauptsächlich von Pak (1992) und Suo (1992) stammen, wurde das asymptotische Verhalten der mechanischen und elektrischen Feldgrößen an der Rißspitze ($r \rightarrow 0$) aufgeklärt. Dargestellt in Polarkoordinaten (r, θ) um die Rißspitze (siehe Bild 1), besitzt das Nahfeld um jede Rißspitze die gleiche Form.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{ij}(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta) + K_{IV} f_{ij}^{IV}(\theta) \right] \\
 u_i(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[K_I g_i^I(\theta) + K_{II} g_i^{II}(\theta) + K_{III} g_i^{III}(\theta) + K_{IV} g_i^{IV}(\theta) \right] \\
 D_j(r, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{r}} \left[K_I d_j^I(\theta) + K_{II} d_j^{II}(\theta) + K_{III} d_j^{III}(\theta) + K_{IV} d_j^{IV}(\theta) \right] \\
 \varphi(r, \theta) &= \sqrt{r} \left[K_I v^I(\theta) + K_{II} v^{II}(\theta) + K_{III} v^{III}(\theta) + K_{IV} v^{IV}(\theta) \right]
 \end{aligned} \tag{7}$$

Die Spannungen und die dielektrische Verschiebung verhalten sich singular mit $r \rightarrow 0$. Das elektrische Potential hat ebenso wie die Verschiebungen an der Rißspitze einen parabelförmigen Verlauf $\sim \sqrt{r}$. Die Winkelfunktionen f_{ij} , g_i , d_j und v hängen nur von den Materialkonstanten ab und können semianalytisch bestimmt werden. Die Koeffizienten K_I, K_{II}, K_{III} sind die bekannten mechanischen Spannungsintensitätsfaktoren. Neu ist der vierte sogenannte "elektrische Intensitätsfaktor" K_{IV} . Man erkennt die wechselseitige Abhängigkeit der mechanischen bzw. elektrischen Feldgrößen von den Intensitätsfaktoren des jeweils anderen Typs. Die Intensitätsfaktoren K_L ($L=I..IV$) stellen die charakteristischen Kenngrößen der piezoelektrischen Bruchmechanik dar und müssen für jede Rißkonfiguration durch Lösen der o.g. Randwertaufgabe ermittelt werden. Eine Methode für ihre effiziente Bestimmung ist die Auswertung wegunabhängiger Integrale.

4 Der Erhaltungssatz des elektromechanischen Material-Impuls-Tensors

Erhaltungssätze der Kontinuumsmechanik können auf verschiedenen Wegen hergeleitet werden, so durch Betrachtung der Invarianzeigenschaften der Feldgleichungen bei Starrkörpertransformationen, durch Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen auf die Lagrange-Funktion (hier die elektrische Enthalpie) oder durch formal mathematische Operationen, siehe dazu Kienzler (1993). Sie alle führen zu wegunabhängigen Integralen. Im folgenden soll der dritte Weg dargestellt werden, wie er von Pak (1990) für piezoelektrische Kontinua aufgezeigt wurde.

Ausgangspunkt ist die elektrische Enthalpiedichte H in einem Materialpunkt, deren Differentiation nach der Ortskoordinate betrachtet wird. Aufgrund der indirekten Ortsabhängigkeit über die Zustandsvariablen ergibt sich aus Gleichung (5)

$$\frac{\partial}{\partial x_k} H(\varepsilon_{ij}, E_j, x_k) = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial E_j} \frac{\partial E_j}{\partial x_k} + \frac{\partial H}{\partial x_k} \Big|_{\text{exp}} \quad (8)$$

wobei $|_{\text{exp}}$ die explizite Ortsableitung bedeutet bei konstant gehaltenen ε_{ij} und E_i . Mit Hilfe der konstitutiven Beziehungen (4), den Feldgleichungen (1) sowie einer Ergänzung der Divergenzausdrücke entsteht

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x_k} &= \sigma_{ij} \varepsilon_{ij,k} - D_j E_{j,k} + H_{,k} \Big|_{\text{exp}} \\ &= (\sigma_{ij} u_{i,k})_{,j} - \sigma_{ij,j} u_{i,k} + (D_j \varphi_{,k})_{,j} - D_{j,j} \varphi_{,k} + H_{,k} \Big|_{\text{exp}} \end{aligned}$$

Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen (2) und Umordnen führten zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} [H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k] &= -\sigma_{ij,j} u_{i,k} - D_{j,j} \varphi_{,k} + H_{,k} \Big|_{\text{exp}} \\ Q_{kj,j} &= p_k + f_k \end{aligned} \quad (9)$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern wird in Analogie zu Eshelbys Energie-Impuls-Tensor der Elastostatik (Eshelby, 1970) als piezoelektrischer Material-Impuls-Tensor Q_{kj} bezeichnet.

$$Q_{kj} = [H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k] \quad (10)$$

In p_k sind die Quellterme aus Gleichung (2) zusammengefaßt.

$$p_k = b_i u_{i,k} - \omega_{,j} \varphi_{,k} \quad (11)$$

Somit läßt sich folgender Erhaltungssatz formulieren:

"Wenn das Material homogen und defektfrei ist und keine elektrischen oder mechanischen Volumenlasten angreifen, dann ist der piezoelektrische Material-Impuls-Tensor eine divergenzfreie Größe, da die rechte Seite von Gleichung (9) verschwindet." Integriert man die Divergenz von Q_{kj} über ein Gebiet V und wendet darauf den Gaußschen Satz an, so erhält man das Integral F_k über den zugehörigen geschlossenen Rand S .

$$F_k = \int_V Q_{kj,j} dV = \int_S Q_{kj} n_j dS = \oint_S (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) n_j dS = 0 \quad (12)$$

Dieser Ausdruck stellt ebenfalls eine Erhaltungsgröße in jedem beliebigen Bereich V des Körpers dar und ist unabhängig vom Integrationsweg S , solange nur perfektes Material und keine Quellterme eingeschlossen sind.

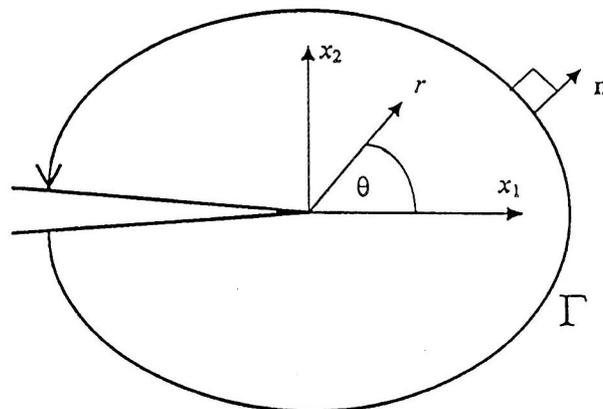


Bild 1. Integrationsweg Γ um die Rißspitze

Wendet man das Integral F_k auf einen Rand Γ an, der die Rißspitze vollständig umschließt, wie es Bild 1 zeigt, so bekommt man das elektromechanische J_k^{em} -Integral, das in dieser Form von Pak (1990) für piezoelektrische Materialien und von McMeeking (1990) für Dielektrika eingeführt wurde.

$$J_k^{em} = \int_{\Gamma} (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) n_j dS \quad (13)$$

Da das Integral die Risingularitt einschließt, ist sein Wert ungleich Null. Wie im folgenden Abschnitt gezeigt werden soll, besteht seine physikalische Bedeutung in der Energie, die bei einer Translation des Risses in x_k -Richtung freigesetzt wird. J_k^{em} stellt ein wegunabhngiges Linienintegral dar für einen beliebigen Pfad Γ , der im mathematisch positiven Sinn vom unteren Rißufer zum oberen verläuft. Es kann gezeigt werden, daß die Wegunabhängigkeit an folgende Voraussetzungen geknüpft ist:

- a) Quellfreiheit der mechanischen Spannungen und des elektrischen Flusses in V

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad D_{j,j} = 0$$

- b) Lastfreiheit der Rißufer von mechanischen Spannungen und elektrischen Ladungen

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{T}_i = 0 \quad D_j n_j = -\bar{\omega}_s = 0$$

- c) keine explizite Ortsabhängigkeit der elektrischen Enthalpiedichte

$$\partial H / \partial x_k |_{\text{exp}} = 0$$

Bei Wegfall aller elektrischen Terme reduziert sich Gleichung (13) auf das bekannte mechanische J_k -Integral der Bruchmechanik, siehe z.B. Kienzler (1993).

5 Die elektromechanische Energiefreisetzungsrate

Gesucht ist die Energiefreisetzungsrate bzw. die Kraft auf einen Defekt bei seiner virtuellen Verrückung. In Analogie zur Arbeit von Eshelby (1970), der dies für den rein elastomechanischen Fall mit Hilfe des Energie-Impuls-Tensors ableitete, soll eine Erweiterung auf elektromechanische Probleme vorgenommen werden. Ausgangspunkt ist der Energieerhaltungssatz für gekoppelte elektromechanische Aufgaben Gleichung (14). Die potentielle Energie der Struktur setzt sich aus der elektrischen Enthalpie minus der Arbeit der äußeren elektrischen und mechanischen Belastungen zusammen.

$$\Pi(u, \varphi) = \int_V H dV - \int_V (b_i u_i - \omega_V \varphi) dV - \int_S (T_i u_i - \omega_S \varphi) dS \quad (14)$$

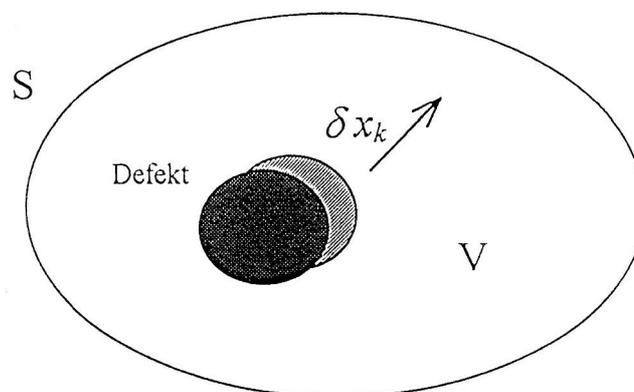


Bild 2. Virtuelle Verrückung δx_k eines Defektes relativ zum Material

Betrachtet wird ein Ausschnitt V des Körpers, der einen Defekt (Inhomogenität, Hohlraum oder Feldsingularität) einschließt, so daß der zugehörige Rand S vollständig im perfekten Material verläuft, Bild 2. Untersucht wird nun die Änderung der potentiellen Energie des Systems bei einer virtuellen Verrückung des Defektes um δx_k . Diese Energiedifferenz, die infolge der Transformation dem äußeren System entzogen und dem Volumen V zugeführt wird, kann durch die generalisierte Kraft P_k ausgedrückt werden.

$$\delta\Pi = \Pi(x_k + \delta x_k) - \Pi(x_k) = P_k \delta x_k \quad (15)$$

Die einwirkenden äußeren Volumenlasten b_i und ω_V sowie die Schnittgrößen $\sigma_{ij}n_i = T_i$ und $D_i n_i = -\omega_S$ auf S werden als eingeprägte Kräfte aufgefaßt, die sich infolge der virtuellen Verrückung nicht ändern. Die Variation der potentiellen Energie ergibt dann unter Anwendung des Gaußschen Satzes und der Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_V \frac{\partial H}{\partial x_k} \delta x_k dV - \int_V (b_i u_{i,k} - \omega_V \varphi_{,k}) \delta x_k dV - \int_S (T_i u_{i,k} - \omega_S \varphi_{,k}) \delta x_k dS \\ &= \int_S H n_k \delta x_k dS - \int_V (b_i u_{i,k} - \omega_V \varphi_{,k}) \delta x_k dV - \int_S (\sigma_{ij} u_{i,k} + D_j \varphi_{,k}) n_j \delta x_k dS \\ &= \int_S (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) n_j \delta x_k dS - \int_V (b_i u_{i,k} - \omega_V \varphi_{,k}) \delta x_k dV \\ &= \left\{ \int_S Q_{kj} n_j dS - \int_V p_k dV \right\} \delta x_k \end{aligned} \quad (16)$$

Berücksichtigt man die elektromechanischen Volumenlasten p_k nicht, so entspricht der Klammerausdruck gerade dem F_k -Integral von Gleichung (12).

$$\delta\Pi = F_k \delta x_k \quad \text{bzw.} \quad P_k = F_k \quad (17)$$

Somit beschreibt das F_k -Integral um einen Defekt gerade den Energiebetrag, der dem System bei einer Bewegung des Defektes in Richtung x_k relativ zum Material entzogen wird. Es wird daher als "Energiefreisetzungsrate" oder "Kraft" auf einen Defekt bezeichnet. Entsprechend charakterisiert das elektromechanische J_k^{em} -Integral die Energiebilanz bei einer virtuellen Rißausbreitung bzgl. x_k .

6 Erweiterung des J_k^{em} -Integrals für elektromechanische Volumenlasten, Rißuferlasten und Werkstoffe mit Eigenschaftsgradienten

Da das J_k^{em} -Integral in seiner bisher bekannten Form nur unter den in Abschnitt 4 genannten Einschränkungen wegunabhängig und somit anwendbar ist, soll eine Erweiterung vorgenommen werden, die für die Beanspruchung durch beliebige elektrische oder mechanische Volumenlasten und Rißuferlasten gültig ist und auch für Werkstoffe mit ortabhängigen Eigenschaften zutrifft. Dem liegt folgende Betrachtungsweise zugrunde: Da das J_k^{em} -Integral wegunabhängig ist, kann der Integrationsweg im Grenzübergang auf einen verschwindend kleinen Kreis Γ_ε mit $r \rightarrow 0$ zusammengezogen werden. Selbst wenn die o.g. Voraussetzungen a) - c) nicht mehr erfüllt sind, so ist J_k^{em} auch auf diesem Pfad noch gültig, da Volumenkräfte, Rißuferbelastungen und Werkstoffgradienten keine Beiträge liefern. Von diesem Ausgangspunkt können die notwendigen Erweiterungsterme gefunden werden, wenn wieder ein beliebiger endlicher Pfad Γ verwendet werden soll. Das ist insbesondere für eine Auswertung anhand numerischer Berechnungsergebnisse erforderlich, da wegen der größeren Ungenauigkeiten an der Rißspitze die Bestimmung von J_k^{em} entlang Γ_ε nicht praktikabel ist.

Zur Herleitung wird ein zusammenhängender Pfad $S = \Gamma + \Gamma^+ - \Gamma_\epsilon + \Gamma^-$ gebildet, der das Gebiet V umschließt, aber die Rißspitze ausklammert, siehe Bild 3. J_k^{em} entlang S kann nach dem Gaußschen Satz in ein Gebietsintegral über V umgewandelt werden, so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned}
 J_k^{em} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) n_j dS = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\epsilon} Q_{kj} n_j dS \\
 J_k^{em} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma + \Gamma^+ + \Gamma^-} Q_{kj} n_j dS - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_V Q_{kj,j} dV
 \end{aligned} \tag{18}$$

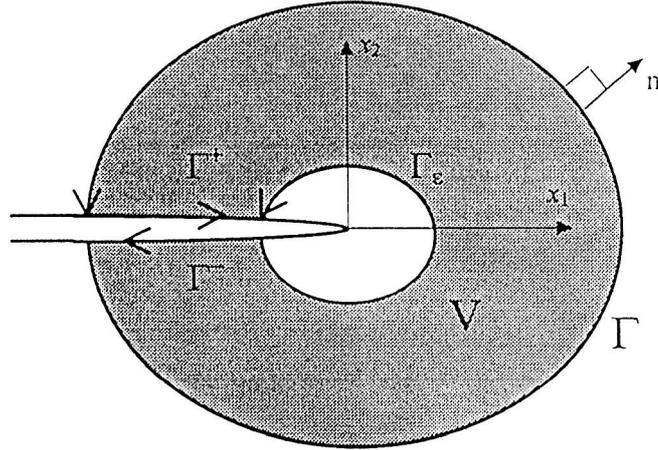


Bild 3. Festlegung der Integrationswege für das erweiterte J_k^{em} - Integral

Beim Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ bleiben die "äußeren" Integrale der zweiten Gleichung unverändert, so daß sie auch für ein Gebiet V zutreffen, das bis an die Rißspitze verläuft. Durch Einsetzen der Gleichgewichtsbedingungen (2) erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 J_k^{em} &= \int_{\Gamma} (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) n_j dS - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} [(-H) \delta_{2k} n_2 + T_i u_{i,k} + \omega_S E_k] dS + \\
 &- \int_V [b_i u_{i,k} + \omega_V E_k + H_{,k} |_{\text{exp}}] dV
 \end{aligned} \tag{19}$$

Das erweiterte J_k^{em} - Integral Gleichung (19) erstreckt sich somit über einen beliebigen Pfad Γ um die Rißspitze und das darin eingeschlossene Gebiet V . Gegenüber Gleichung (13) wird es durch das Randintegral über die Rißufer mit den Rißuferlasten und das Gebietsintegral mit den Volumenlasten ergänzt.

Intelligente Werkstoffe besitzen mitunter Gradienteneigenschaften (z.B. CVD-, PVD-Schichten, Dotierungen, Oberflächenbehandlung, Diffusionseinwirkung o.ä.), d.h., die elastischen, dielektrischen und piezoelektrischen Materialeigenschaften ändern sich mit der Ortskoordinate x_k . Wenn diese Änderung als stetig und differenzierbar unterstellt wird, so findet sie in der expliziten Ortsabhängigkeit der Enthalpiedichte im Volumenintegral V Berücksichtigung.

$$\left. \frac{\partial H}{\partial x_k} \right|_{\text{exp}} = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \epsilon_{nm} \frac{\partial C_{ijnm}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} E_i E_j \frac{\partial \kappa_{ij}}{\partial x_k} - \epsilon_{ij} E_n \frac{\partial e_{nij}}{\partial x_k} \tag{20}$$

7 Umwandlung von J_k^{em} in ein äquivalentes Gebietsintegral

Um eine bessere Auswertung des elektromechanischen J_k^{em} -Integrals anhand numerischer Berechnungsergebnisse mit der Finite-Elemente-Methode zu ermöglichen, erfolgt eine Umformung in ein äquivalentes reines Gebietsintegral über V . Analog zur Vorgehensweise bei mechanischen Rißproblemen (Eisentraut und Kuna, 1988) geht man von der Definitionsgleichung (18) aus. Es wird wie in Abschnitt 6 ein zusammenhängender Pfad $S = \Gamma + \Gamma^+ - \Gamma_\epsilon + \Gamma^-$ mit der Außennormalen m_j gebildet, Bild 4. Nun führt man eine beliebige stetige und differenzierbare Wichtungsfunktion $q(x_k)$ ein, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$q = 1 \quad \text{auf } \Gamma_\epsilon \quad \quad q = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (21)$$

Damit läßt sich Gleichung (18) umschreiben in

$$J_k^{em} = \int_S Q_{kj} m_j q dS - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} Q_{kj} m_j q dS$$

Das erste Integral kann wieder in ein Gebietsintegral über das eingeschlossene Volumen V umgewandelt werden

$$\int_S Q_{kj} m_j q dS = \int_V (Q_{kj} q)_{,j} dV = \int_V Q_{kj} q_{,j} dV + \int_V Q_{kj,j} q dV$$

so daß sich schließlich unter Verwendung der Gleichungen (9) und (11) ergibt

$$J_k^{em} = \int_V (H \delta_{kj} - \sigma_{ij} u_{i,k} + D_j E_k) q_{,j} dV + \int_V [b_i u_{i,k} + \omega_V E_k + H_{,k} |_{\text{exp}}] q dV - \int_{\Gamma^+ + \Gamma^-} [(-H) \delta_{2k} n_2 + T_i u_{i,k} + \omega_S E_k] q dS \quad (22)$$

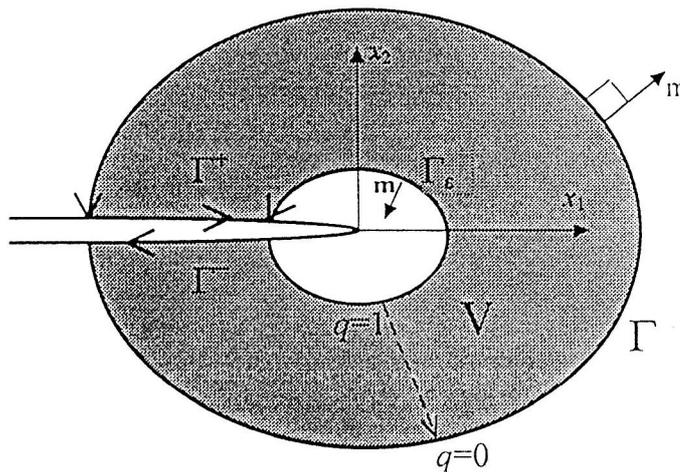


Bild 4. Definition des äquivalenten Gebietsintegrals

Die wesentlichen Vorteile des äquivalenten Gebietsintegrals gegenüber Gleichung (19) sind

- Die Festlegung des Gebietes V ist im Rahmen einer FEM-Diskretisierung wesentlich einfacher als die eines linienförmigen Integrationspfades Γ .

- Die Integration über Gebiete ist bei der FEM eine Standard-Aufgabe. Die Auswertung kann in Form eines Postprozessors implementiert werden.
- Das Verfahren entspricht der Technik der virtuellen Rißausbreitung, die sich bereits bei rein mechanischen Rißanalysen bewährt hat (z.B. Eisentraut u. Kuna, 1988).

In der Praxis benutzt man für die Wichtungsfunktion (=virtuelle Rißverschiebung) q meist folgenden Ansatz, wobei das Gebiet V in drei Bereiche unterteilt wird, siehe Bild 5:

Bereich I: $q = \text{const.} = 0$
 Bereich III: $q = \text{const.} = 1$
 Bereich II: lineare Interpolation zwischen den Bereichen I und III

Weil in den Bereichen I und III $q_{,j} = 0$ ist, trägt nur Bereich II zum 1. Term in Gleichung (22) bei, wohingegen der 2. und der 3. Term nur für die Bereiche II und III mit $q \neq 0$ ausgewertet werden.

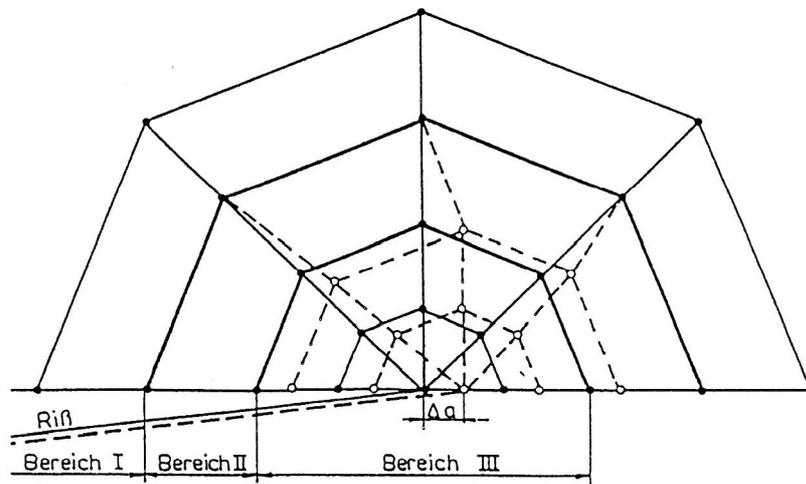


Bild 5. Realisierung des äquivalenten Gebietsintegrals in der FEM-Diskretisierung

8 Abschließende Diskussion

Homogene piezoelektrische Materialien (Perowskit-Keramiken, PVDF-Kunststoffe, ZnO_2 , Quartz u.a.), aber auch Kompositwerkstoffe (Schichtsysteme, Faserverbunde u.a.) werden in zunehmendem Maße in modernen Zweigen des Ingenieurwesens (Mechatronik, Mikrosystemtechnik, Adaptronik) eingesetzt. Damit ergeben sich Fragen der Beurteilung von Bruchfestigkeit, Lebensdauer und Versagensverhalten, zu deren Beantwortung bruchmechanische Konzepte für Risse unter kombinierten mechanischen und elektrischen Beanspruchungen notwendig sind. Im Beitrag wurde die Bedeutung wegunabhängiger Energiebilanzintegrale für piezoelektrische Kontinua zur Formulierung von energetischen Beanspruchungskenngrößen für Risse dargestellt, die als Verallgemeinerungen des bekannten J-Integrals zu verstehen sind. Das abgeleitete erweiterte J_k^{em} -Integral berücksichtigt alle praktisch vorkommenden mechanischen und elektrostatischen Beanspruchungen des Risses. Sprungartige Materialübergänge, wie sie in heterogenen Werkstoffen (z.B. an Phasengrenzen in Kompositen) oder Schichtsystemen vorkommen, müssen anders behandelt werden, siehe Kuna (1995b). Mit der Umformung von J_k^{em} in ein äquivalentes Gebietsintegral wurde eine bewährte FEM-Technik zur Rißanalyse auf kombinierte elektrische und mechanische Belastungsfälle übertragen. Dieses Verfahren kann analog zur Mechanik (siehe Eisentraut und Kuna) auch problemlos auf axialsymmetrische und räumliche Rißkonfigurationen erweitert werden. Die Ableitungen sind auch für ferroelektrische Materialien gültig, die sich bei spontaner Polarisation piezoelektrisch verhalten. Als Spezialfall ($e_{ijk} = 0$) sind ebenso dielektrische Materialien enthalten. Auf elektrostriktive Werkstoffe trifft diese Theorie nicht zu, da sie qualitativ anderen, nichtlinearen Gesetzen gehorchen. Bei Vernachlässigung aller elektrischen Terme reduzieren sich die Beziehungen selbstverständlich auf die bekannten Größen der linear-elastischen Bruchmechanik.

Literatur

1. Cherepanov, G. P.: Mechanics of brittle fracture. Mc Graw Hill, New York (1979).
2. Eisentraut, U.; Kuna, M.: Ein allgemeines Verfahren zur J-Integralbestimmung von 2d- und 3d Rißproblemen, in: Beiträge der Tagung Festkörpermechanik "Festigkeitsprobleme und Materialverhalten", Dresden, (1988), Band C, LXXII/1-8.
3. Eshelby, J. D.: Energy relations and the energy-momentum-tensor in continuum mechanics. in: *Inelastic behavior of Solids*, Ed.: M. F. Kanninen u.a., Mc Graw Hill, New York, (1970).
4. Kienzler, R.: Konzepte der Bruchmechanik, Vieweg, Wiesbaden, (1993).
5. Kuna, M.: Werkstoffmechanische Problemstellungen bei adaptiven Strukturen. Preprint zum Kolloquium "Adaptive mechanische Systeme I", Universität Magdeburg, März 1995(a), 55-61.
6. Kuna, M.: Ein erweitertes J-Integral für elektromechanisch beanspruchte Risse in heterogenen Strukturen. Beitrag eingereicht MicroMat 1995 (b), Berlin.
7. Mc Meeking, R. M.: A J-Integral for the analysis of electrically induced mechanical stress at cracks in elastic dielectrics, *Int. J. Engng. Sci.*, 7, (1990), 605-613.
8. Pak, Y. E.; Herrmann, G.: Conservation laws and the material momentum tensor for the elastic dielectric. *Int. J. Engn. Sci.*, 24, (1986), 1365-1374.
9. Pak, Y. E.: Crack extention force in a piezoelectric material. *J. Appl. Mech.*, 57, (1990), 647-653.
10. Pak, Y. E.: Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials. *Int. J. Fracture*, 54, (1992), 79-100.
11. Suo, Z.; Kuo, C. M.; Barnett, D. M.; Willis, J. R.: Fracture mechanics of piezoelectric ceramics. *J. Mech. Phys. Solids*, 40, (1992), 739-765.
12. Thiersten, H. F.: Linear piezoelectric plate vibrations, Plenum Press, New York, (1969).

Anschrift: Gastprofessor Dr. Meinhard Kuna, Institut für Werkstofftechnik und Werkstoffprüfung, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg