# Modellierung und Simulation der Verformung stoffkohärenter nachgiebiger Mechanismen (Compliant Mechanisms)

K. Zimmermann, S. Petkun

Für die Bewegungsübertragung werden in der Mikromechanik nicht mehr nur die klassischen form- und kraftgepaarten Gelenke eingesetzt. Zunehmend finden stoffschlüssige gelenkige Verbindungen in sogenannten "Compliant Mechanisms" Verwendung. Praktische Anwendungen nachgiebiger Rahmenelemente können stoffkohärente Greiferstrukturen in miniaturisierter Technik für Manipulationsaufgaben, z.B. in der Medizin, sein. Für das mathematische Modell eines ellipsenförmigen Innendruckgreifers werden die Kirchhoff-Clebsch-Gleichungen benutzt. Die analytische und numerische Untersuchung des Differentialgleichungssystems ermöglicht es, Aussagen zur Dimensionierung des Greifers zu formulieren.

# 1 Einleitung

Die Bewegungs- und Kraftübertragung in technischen Systemen auf der Basis von Starrkörpermodellen ist in den letzten Jahrzehnten ausgiebig untersucht worden. Einige der Technikgebiete, die zu einer forcierten Entwicklung der Mehrkörperdynamik führten, sind die Luft- und Raumfahrttechnik, die Biomechanik, die Maschinen- und Fahrzeugdynamik und die Robotertechnik. Stand der Technik ist dabei die rigorose Computersimulation des dynamischen Verhaltens von Mehrkörpersystemen (Maisser, 1988). Eine Vielzahl von Softwareprodukten unterstützt den Ingenieur bei der Analyse bereits realisierter Systeme oder im konstruktiven Entwicklungsprozeß zur Schaffung neuartiger technischer Geräte.

In jüngster Zeit ergeben sich aus der rasanten Entwicklung auf dem Gebiet der Mikromechanik durch neue Werkstoffe und Fertigungsverfahren aktuelle Aufgabenstellungen für die Technische Mechanik. Für die Bewegungsübertragung werden nicht mehr nur die klassischen form- oder kraftgepaarten Gelenke wie im Roboter oder in der Werkzeugmaschine eingesetzt. Zunehmend finden stoffschlüssige gelenkige Verbindungen Anwendung. Mechanismen mit nachgiebigen Elementen beziehen ihre Beweglichkeit mehr aus der Nachgiebigkeit ihrer Glieder als aus Starrkörpergelenken (Bögelsack, 1995). Elastische Deformationen, die in der Mechanik bisher vorwiegend als Störungen betrachtet wurden, sind für das Bewegungssystem funktionsbestimmend und sollen deshalb gezielt gesteuert werden. Von Bögelsack (1995) wurden stoffkohärente Greiferstrukturen (Bild 1) auf der Basis nachgiebiger Rahmengefüge für die Realisierung in miniaturisierter Technik vorgeschlagen.



Bild 1. Greiferstrukturen

Die Mechanik der Greiferstruktur im Bild 1(b) ist Gegenstand dieses Artikels. Die Deformation der ellipsenförmigen Mantelfläche eines Zylinders unter der Wirkung eines Innendrucks wird genutzt, um eine Greifbewegung von Fingern zu realisieren. Zur Erzeugung definierter Abstände zwischen den Greiferfingern und vorgegebenen Greifkräften ist es erforderlich, die Verformung der Ellipse gezielt zu beeinflussen.

#### 1 Die Differentialgleichungen von Kirchhoff und Clebsch

Als mechanisches Modell werden nachgiebige ebene Rahmen untersucht. Darunter sollen stoffkohärente deformierbare Strukturen verstanden werden (Bögelsack, 1995), die eine Fläche bzw. bei Berücksichtigung der Rahmendicke einen Raum umschließen. Aus der konkreten Aufgabenstellung resultiert eine Einschränkung in der Betrachtung auf geschlossene ebene Kurven mit konstanter Länge (Umfang L), aber veränderlicher Krümmung. Da die Querschnittsabmessungen des Rahmens im Vergleich zum Umfang klein sind und Materialeigenschaften eine wesentliche Rolle spielen, führt die Modellbildung zur Untersuchung von Biegung innerlich statisch unbestimmter Balken mit starker Krümmung.

Diese sind in der Literatur mehrfach untersucht worden. Grundlegende Aussagen zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes findet man bei Kämmel (1959). Ifrim und Bögelsack (1974) wählen ein Diskretisierungsverfahren zur Berechnung einer Spiralfeder in einem Federantrieb. Filonenko-Boroditsch (1952) behandelt derartige Balkenkonstruktionen mit klassischen Energiemethoden unter der Annahme kleiner Verformungen. Die Schnittgrößen werden am unverformten geschlossenen Stab (idealerweise ein Kreisring) ermittelt. Diese Einschränkungen sind für das formulierte Problem unzulässig.

Für große Verformungen bieten die Differentialgleichungen von Kirchhoff und Clebsch (die namentliche Zuordnung basiert auf einer Bemerkung von Love (1994), auf Seite 387) einen Ansatz. Die Gleichungen folgen aus der Betrachtung des Gleichgewichts am Stabelement, das frei von Einzelkräften/-momenten sei (Bild 2).



Bild 2. Schnittkräfte/ -momente am räumlich gekrümmten Stab

Mit den Schnittgrößen S, M am positiven Schnittufer und den Lasten q (Linienkraft) und m (verteilte Momente) lauten die Gleichgewichtsbedingungen

$$d\mathbf{S} + \mathbf{q}ds = \mathbf{0} \tag{1}$$

$$d\mathbf{M} + ds\mathbf{e}_1 \times \mathbf{S} + \mathbf{m} ds = \mathbf{0} \tag{2}$$

Die lokale Basis wird aus dem Tangentenvektor an die Stabachse  $\mathbf{e}_1$  und den Einheitsvektoren  $\mathbf{e}_2$  und  $\mathbf{e}_3$  in Hauptachsenrichtung der Querschnittsfläche gebildet.

Aus der Projektion der Gleichgewichtsbedingungen (1) und (2) auf die lokale Basis  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  folgen nach Einführung der Krümmungen  $\kappa_i$  (*i*=1,2,3) die Differentialgleichungen von Kirchhoff und Clebsch.

$$\frac{dS_1}{ds} + S_3\kappa_2 - S_2\kappa_3 + q_1 = 0 \qquad \qquad \frac{dM_1}{ds} + M_3\kappa_2 - M_2\kappa_3 + m_1 = 0$$

$$\frac{dS_2}{ds} + S_1\kappa_3 - S_3\kappa_1 + q_2 = 0 \qquad \qquad \frac{dM_2}{ds} + M_1\kappa_3 - M_3\kappa_1 - S_3 + m_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{dS_3}{ds} + S_2\kappa_1 - S_1\kappa_2 + q_3 = 0 \qquad \qquad \frac{dM_3}{ds} + M_2\kappa_1 - M_1\kappa_2 + S_2 + m_3 = 0$$

Die Größen  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  sind nicht identisch mit der ersten und zweiten Krümmung der Raumkurve im Frenetschen Dreibein, sondern sind zusammen mit  $\kappa_3$  die von Null verschiedenen Elemente der schiefsymmetrischen Matrix  $\kappa$  aus der Beziehung

$$\frac{d}{ds} (\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3)^T = \kappa \ (\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_3)^T$$

Nach der Substitution der Schnittmomentkoordinaten

$$M_1 = A_1 \kappa_1 \qquad M_2 = A_2 \kappa_2 \qquad M_3 = A_3 \kappa_3 \tag{4}$$

und mit der Annahme  $m_i \equiv 0$  (*i*=1,2,3) erhält man aus den Beziehungen (3.4) bis (3.6) das Differentialgleichungssystem

$$A_{1}\frac{d\kappa_{1}}{ds} - (A_{2} - A_{3})\kappa_{2}\kappa_{3} = 0$$

$$A_{2}\frac{d\kappa_{2}}{ds} - (A_{3} - A_{1})\kappa_{3}\kappa_{1} = S_{3}$$

$$A_{3}\frac{d\kappa_{3}}{ds} - (A_{1} - A_{2})\kappa_{1}\kappa_{2} = -S_{2}$$
(5)

Die Form des Differentialgleichungssystems (5) erlaubt eine Analogiebetrachtung zur Starrkörpermechanik. In der Interpretation der  $A_i$  als Hauptträgheitsmomente  $J_i$  und der Krümmungen  $\kappa_i$  als Winkelgeschwindigkeiten  $\omega_i$  um die Hauptachsen  $\mathbf{e}_i$  liefern die Beziehungen (5) die Eulerschen Gleichungen für die Rotation eines schweren Kreisels mit dem Schwerpunkt auf der Achse.



Die Elimination der Schnittkräfte  $S_2$  und  $S_3$  in Gleichung (3.1) mit Hilfe der Gleichungen (5) führt über das Integral

$$S_1 + \frac{1}{2} \left( A_1 \kappa_1^2 + A_2 \kappa_2^2 + A_3 \kappa_3^2 \right) = const.$$
<sup>(7)</sup>

(6)

zu der von Kirchhoff formulierten kinetischen Analogie mit dem Energieintegral der Bewegungsdifferentialgleichungen

$$U + T = U + \frac{1}{2} \left( J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2 \right) = const.$$
(8)

Die Ähnlichkeit in den Modellgleichungen läßt vermuten, daß auch für den Stab die gleichen mathematischen Schwierigkeiten wie bei den Euler-Gleichungen auftreten. Im allgemeinen Fall sind diese Gleichungen bekanntlich nicht geschlossen integrierbar.

# 2 Verformungsgleichungen für den ebenen ellipsenförmigen Rahmen

Die aus dem technischen Problem in der Einleitung formulierte Aufgabenstellung erlaubt die Beschränkung auf den ebenen Fall. Die Gleichungen (3) vereinfachen sich zu

$$\frac{dS_1}{ds} - \kappa_3 S_2 = 0 \qquad \frac{dS_2}{ds} + \kappa_3 S_1 + q_2 = 0 \quad (q_2 = const.) \qquad \frac{dM_3}{ds} + S_2 = 0 \tag{9}$$

Zu den Gleichgewichtsbedingungen werden das Materialgesetz (mit der Biegesteifigkeit *EI* und der Krümmung des unbelasteten Rahmens  $\kappa_{30} = \kappa_{30}(s)$ )

$$M_3 = EI\left(\kappa_3 - \kappa_{30}\right) = A_3\left(\kappa_3 - \kappa_{30}\right) \tag{10}$$

und die Geometriebeziehungen (Bild 4)

$$\kappa_3 = \frac{d\theta}{ds} \qquad \qquad \frac{dx_1}{ds} = \cos\theta \qquad \qquad \frac{dx_2}{ds} = \sin\theta \tag{11}$$

hinzugefügt.



Bild 4. Geometriebeziehungen in der Ebene

Zur vollständigen Darstellung des mathematischen Problems mit den Differentialgleichungen (9) bis (11) gehören die Anfangsbedingungen

$$S_{1}(0) = -x_{10} q_{2} = S_{0}(q_{2}) \qquad \theta(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$S_{2}(0) = 0 \quad (\text{Symmetrie}) \qquad x_{1}(0) = x_{10} \qquad (12)$$

$$M_{3}(0) = M_{0} \qquad x_{2}(0) = 0 \quad (\text{Symmetrie})$$

$$X_{2} = x_{10}$$



Bild 5. Ellipse im Koordinatensystem  $(x_1, x_2)$ 

Bevor mit rechnergestützter Numerik die Problemlösung behandelt wird, ist es sinnvoll, ein Maximum an Informationen aus analytischen Betrachtungen des Problems zu erhalten.

# Existieren erste Integrale des Differentialgleichungssystems ?

Nach Multiplikation von (9.1) mit  $S_1$  bzw. (9.2) mit  $S_2$  und anschließender Addition der beiden Gleichungen folgt mit (9.3) das erste Integral

$$S_1^2 + S_2^2 - 2q_2 M_3 = const.$$
(13)

Die Kenntnis dieses Integrals erweist sich als sehr hilfreich bei der numerischen Behandlung des Problems (siehe unten).

### Ist mit endlichem Innendruck $q_2$ eine Aufweitung der Ellipse bis zur Extremalform - Kreis - möglich?

Nach Lösung der Differentialgleichungen (9.1) und (9.2) folgt unter Beachtung der Geometriebeziehungen (11)

$$S_1 = -q_2 \left( -x_2 \cos \theta + x_1 \sin \theta \right) \qquad S_2 = -q_2 \left( x_2 \sin \theta + x_1 \cos \theta \right) \tag{14}$$

Das Problem reduziert sich auf ein System 4. Ordnung

$$\frac{d\kappa_3}{ds} = \frac{1}{A_3} q_2 \left( x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \right) + \frac{d\kappa_{30}}{ds} \qquad \qquad \frac{d\theta}{ds} = \kappa_3$$

$$\frac{dx_1}{ds} = \cos\theta \qquad \qquad \qquad \frac{dx_2}{ds} = \sin\theta$$
(15)

Mit den Gleichungen (15.3) und (15.4) schreibt sich Gleichung (15.1) in der Form

$$\frac{d\kappa_3}{ds} - \frac{d\kappa_{30}}{ds} = \frac{q_2}{2A_3} \frac{d}{ds} \left(x_1^2 + x_2^2\right)$$

und die Integration ergibt

$$\frac{1}{2A_3}q_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + C = \kappa_3 - \kappa_{30}$$
<sup>(16)</sup>

Da für einfach geschlossene Kurven  $\int_{0}^{L} \kappa ds = 2\pi$  ist, folgt nach erneuter Integration

$$C = -\frac{q_2}{2LA_3} \int_0^L \left( x_1^2 + x_2^2 \right) ds$$
<sup>(17)</sup>

Für die Beantwortung der o. a. Frage wird die Gleichung (16) auf die folgende Form gebracht:

$$\frac{1}{q_2}(\kappa_3 - \kappa_{30}) = \frac{1}{2A_3} \left\{ \left( x_1^2 + x_2^2 \right) - \frac{1}{L} \int_0^L \left( x_1^2 + x_2^2 \right) ds \right\}$$
(18)

Für einen Kreis  $(x_1^2 + x_2^2 = R^2, \kappa_3 = \frac{1}{R})$  verschwindet die rechte Seite der Beziehung (18) und  $\kappa_{30} \neq \frac{1}{R}$  (d.h., die Ausgangsform ist kein Kreis) ergibt einen Widerspruch. Bei endlichem Druck kann die Kreisform nicht erreicht werden.

Wenn man vom Endzustand Kreis mit  $\kappa = \frac{1}{R}$  ausgeht, sind die Gleichungen (9) bis (11) analytisch integrierbar und für die Krümmung der Ausgangskurve  $\kappa_{30}$  bzw. den Winkel  $\theta_0$  folgt

$$\kappa_{30} = A\cos\left(\frac{1}{R^2}s + B\right) + C \qquad \theta_0 = R^2 A\sin\left(\frac{1}{R^2} + s + B\right) + Cs + D$$
(19)

Die unbekannten Integrationskonstanten A, B, C und D folgen aus Randbedingungen. Die Ermittlung der Ausgangsform auf analytischem Weg ist nicht möglich, da nach Einsetzen des Winkels  $\theta_0$  in die Gleichungen (11) spezielle Funktionen des Typs

$$\mathscr{E}_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(\nu \theta - z \sin \theta) d\theta$$

(Weberfunktion - tabellarisch zusammengestellt in Gradschtein und Ryshik (1963)) auftreten.



Bild 6. Rahmen mit Kreisform im Endzustand (Kurven für fünf verschiedene Werte von  $q_2$ )

Die numerische Analyse ermöglicht es, Ausgangsformen (im Bild 6 die Kurve 1 - unbelasteter Stab) zu ermitteln, die unter "Innendruck" zum Kreis (Kurve 5) führen. Da es sich um nichtgeschlossene Kurven handelt, steht der Begriff "Innendruck" in Anführungszeichen. Das Bild 6 zeigt die unterschiedlichen Ver-

formungszustände für C = 0,  $D = \frac{\pi}{2}$  und B = 0 (Bild 6a) bzw.  $B = \pi$  (Bild 6b). Die globale Verschiebung des Stabes (Kräftesumme bei nichtgeschlossenem Rahmen ungleich Null) wird nicht dargestellt. Die praktische

Realisierung eines Greifers ist mit diesen Ausgangsformen nicht möglich, so daß hier zwar mathematisch interessante, aber doch akademische Lösungen präsentiert werden.

Welche Punkte (Bogenlänge s<sup>\*</sup>) auf der Ellipse sind für das Anbringen der Greiferfinger besonders geeignet?

Ein größtmöglicher Bewegungsbereich der Greiferfinger wird bei Anordnung in den Punkten erreicht, für deren Koordinate  $s = s^*$  gilt  $\left\{s^*: \theta\left(s^*\right) - \theta_0\left(s^*\right) = M_{ax}\left(\theta\left(s\right) - \theta_0\left(s\right)\right)\right\}$ 

Daraus folgt mit Gleichung (11.1) die Forderung für  $s^*$ :  $\kappa_3(s^*) = \kappa_{30}(s^*)$ .

Optimal zur Anbringung der Greiferfinger sind die Punkte auf der Ellipse, in denen sich die Krümmung nicht ändert. Die Linienelemente ds in den Punkten  $s^*$  werden nur "gedreht", die Krümmung stimmt in diesen Punkten schon mit der Krümmung der verformten Kurve überein.

#### **3 Numerische Berechnungen mit der Software MATHEMATICA**

Das Differentialgleichungssystem (9) bis (11) mit den Randbedingungen (12.1) bis (12.4) wurde numerisch mit der Software MATHEMATICA integriert. Unter Einbeziehung des o.a. ersten Integrals sind die Randbedingungen  $S_0$ ,  $M_0$  derart bestimmt worden, daß L-periodische Lösungen

 $x_1(0) = x_1(L) = 0$   $x_2(0) = x_2(L) = 0$ 

garantiert werden. Für die Geometriedaten

-	große Halbachse	a = 60  mm	Dicke	d = (	),1 mm
-	kleine Halbachse	b = 20  mm	Höhe	h =	1 mm

und die Werkstoffcharakteristik  $E = 10^{-3}$  N/mm<sup>2</sup> (PVC) wurden folgende Verformungsbilder berechnet:



Bild 7. Verformung der Ellipse für  $q_2 = 75$ , 100, 200 (in dimensionsloser Darstellung)

Die Normalkraft  $S_1$ , die Querkraft  $S_2$  und das Biegemoment  $M_3$ , die bei der Verformung mit der Linienkraft  $q_2 = 200$  auftreten, zeigen die Bilder 8 und 9. Die dimensionslosen Größen erhält man aus folgenden Beziehungen:



Bild 8. Normalkraft (1) und Querkraft (2) als Funktion der Bogenlänge s

Bild 9. Biegemoment  $M_3$  als Funktion der Bogenlänge s

Das Bild 9 enthält die Information über die geeigneten Punkte s<sup>\*</sup> für das Anbringen der Greiferfinger auf der Ellipse. Entsprechend dem gewählten konstruktiven Aufbau (Bild 1b) und der Lage des Koordinatensystems (Bild 7) sind dies die zweite und dritte Nullstelle der Biegemomentenfunktion. Für die angenommene Greifergeometrie, sowie die obengenannten Geometrie- und Werkstoffdaten, wird bei  $q_2 = 2,33 \, 10^{-10}$  N/m ein Bewegungsbereich zwischen den Fingern von 10,8 mm realisiert. Die Abhängigkeit zwischen dem Abstand der Greiferfinger  $\Delta x_{2Greifer}$  und der Linienkraft  $q_2$  zeigt das Bild 10.





xdelta1,m 120

119.5

118.5

119

Bild 10. Greiferweg  $\Delta x_{2 \text{ Greifer}}$  als Funktion der Linienkraft  $q_2$ 



 $\Delta x_1$ 

20092

150 175

# 4 Zusammenfassung

Die Kirchhoff-Clebsch-Gleichungen werden genutzt, um einen Mechanismus für miniaturisierte Bewegungssysteme in der Anwendung als Miniaturgreifer zu untersuchen. Neben anderen Verfahren, wie der FEM und der Übertragungsmatrizen-Methode, führt die Verbindung von analytischer und numerischer Behandlung der Kirchhoff-Clebsch-Gleichungen zu ersten Ergebnissen bei der Dimensionierung des Greifers. Die Verformungsberechnungen sind nicht auf den Mechanismus als Greifer beschränkt. Die Berechnungen erlauben auch die Quantifizierung des Bewegungsgewinns durch Verkürzung der großen Halbachse (z.B.  $\Delta x_1 = 3,82$  mm bei  $q_2 = 2,3 \ 10^{-10}$  N/m, Bild 11). Diese Resultate sind bei Betrachtung des vorgeschlagenen ebenen Rahmens, als kontraktiles Element zur Erzeugung translatorischer Bewegungen, von praktischem Interesse. Derartige Bewegungen bringen die biomechanischen Energiewandler hervor. Unter dieser biotischen Betrachtungsweise (Bögelsack, 1995) ergeben sich neue Anwendungen des untersuchten Mechanismus. Als mehrfach parallel oder seriell gekoppelter Rahmen könnten sich effiziente Strukturen, die nach biologischem Vorbild Formänderungsarbeit in translatorische Bewegung wandeln, ergeben. Damit wird das Ziel verfolgt, den Modellansatz für die Beschreibung des speziellen nachgiebigen Mechanismus (Bild 1 b) auf die Beschreibung von "compliant mechanisms" in natürlichen Bewegungssystemen zu verallgemeinern. Es erscheint sinnvoll, für die Beschreibung nachgiebiger biologischer Strukturen nach ähnlich effizienten Methoden zu suchen, wie sie aus den o.a. Gründen in den letzten Jahren für die Starrkörpersysteme gefunden wurden. Aus Sicht der Technischen Mechanik wird für biologische Strukturen der elastisch verformbare Körper zum allgemeinen Modell und der starre Körper zum Sonderfall - eine für den Ingenieur nicht neue, aber eher unübliche Einordnung.

# 5 Literatur

- 1. Bögelsack, G.: Nachgiebige Mechanismen in miniaturisierten Bewegungssystemen. Proc. of the 9th World Congress on Theory of Mach. and Mech., Milano, 1995, Vol. 4, pp. 3101-3104.
- 2. Bögelsack, G.: Compliant mechanisms Structures for miniaturization and Terminology. Proc. of the faculty coll. on theory of machines and mechanisms. TU Delft, June 1994, pp. 47-52.
- 3. Filonenko-Boroditsch, M.M.: Festigkeitslehre. Bd II, Verlag Technik, Berlin, 1952.
- 4. Ifrim, V,; Bögelsack, G.: Ein Diskretisierungsverfahren zur numerischen Berechnung von Federantrieben für Mechanismen. Mechanism and Machine Theory, 1974, Vol. 9, pp. 349-358.
- 5. Kämmel, G.: Zur Theorie des räumlich gekrümmten Stabes. Ing.-Archiv, XXVII.Bd., 1959, S.255-267.
- 6. Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity. Dover Publications, New York, 1994.
- 7. Maisser, P.: Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. ZAMM 68, 463-481, 1988.
- 8. Swetlizki, W. A.: Mechanik von Stäben (russ.). Verlag "Wyschaja Schkola", Moskau, 1987.
- 9. Gradschtein, I. S.; Ryshik, I. M.: Tabellen von Integralen, Summen, Reihen und Produkten (russ.). Verlag "Fisiko Matematitscheskaja Literatura", Moskau, 1963.

Die Autoren danken Herrn Prof. Dr. G. Bögelsack für den wissenschaftlichen Anstoß und die kritische Begleitung der Themenbearbeitung. Herrn Prof. Dr. J. Steigenberger gilt der Dank für die zahlreichen Hinweise und sein stetes Interesse an den Arbeiten.