

Zur Lösung eines inversen Problems der Strukturmodifikation auf der Grundlage gemessener Frequenzgänge

F. Wahl, R. Jungbluth

Zeigt eine Struktur unvorhergesehenes Schwingungsverhalten, ist dessen Beeinflussung unter gegebenen äußeren Bedingungen (Geometrie, Spektrum der Erregerfrequenzen) nur über Änderungen der Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitseigenschaften möglich. Vorgestellt werden zwei Methoden zur Lösung des inversen Modifikationsproblems, die unter Verwendung der Frequenzgänge einer linearen zeitinvarianten ungedämpften Basisstruktur die Berechnung notwendiger Strukturmodifikationen (Massen- und Steifigkeitsänderungen) zur Erzielung eines gewünschten Eigenfrequenzspektrums gestatten.

1 Einleitung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit einem inversen Problem der Strukturmodifikation: Von einer Basisstruktur seien Modaldaten (Eigenfrequenzen und Schwingformen) bekannt. Gesucht sind solche Strukturmodifikationen (Masse- bzw. Steifigkeitsänderungen), die zu einem gewünschten Eigenfrequenzspektrum der geänderten Struktur führen. Dabei soll einschränkend vorausgesetzt werden, daß die dem Basismodell zugrunde liegenden Modalinformationen ausschließlich experimentell ermittelt werden. Durch die damit verbundene Problematik unvollständiger Modalinformationen wird die Lösung der Aufgabe wesentlich erschwert und geht über das in Gantmacher (1960) und Gladwell (1986) behandelte klassische inverse Problem hinaus.

Von den neueren Arbeiten, die sich mit der Lösung des inversen Problems bei unvollständigen Modalinformationen befassen, seien Natke (1989) und Ram und Braun (1991) erwähnt, die die Aufgabe über unterschiedliche Optimierungs-Formulierungen lösen, während Zhang (1988) das Problem für kleine Parameteränderungen mit Hilfe der Störungsrechnung untersucht.

In der folgenden Arbeit werden ein parametrisches und ein nichtparametrisches Verfahren beschrieben, die die gesuchten Strukturmodifikationen iterativ ermitteln, in dem jedem Schritt der inversen Lösung eine direkte Strukturmodifikation nachgeschaltet wird. Diese Vorgehensweise ermöglicht auch Untersuchungen an gedämpften Systemen, da die direkte Modifikation an keine Bedingungen bezüglich der Dämpfung gebunden ist (Wahl, 1990).

2 Problemstellung

Den Untersuchungen wird ein lineares elastomechanisches ungedämpftes System zugrunde gelegt. Zur Beschreibung der Schwingformen und einer hinreichend genauen Identifizierung der Eigenfrequenzen werden m Strukturpunkte (Meßpunkte) festgelegt. Jedem Punkt ist eine physikalische Koordinate $x_k(t)$, $k = 1, \dots, m$, zugeordnet. Im interessierenden Frequenzbereich werden n dominierende Freiheitsgrade identifiziert, wobei $m \geq n$. Das System läßt sich somit durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.1)$$

beschreiben. Ein Rechenmodell existiert nicht, da die Massenmatrix \mathbf{M} und die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} nicht bekannt sind.

Es soll analysiert werden, welche Modifikation $\Delta\mathbf{M}$ und $\Delta\mathbf{K}$ erforderlich sind, um die n Eigenfrequenzen gezielt zu verändern. Das modifizierte System läßt sich dann wie folgt darstellen:

$$(\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.2)$$

Zur Lösung dieses *inversen Modifikationsproblems* werden ein parametrisches und ein nichtparametrisches Verfahren vorgestellt. Die parametrische Methode realisiert die Modifikation bezüglich der modalen Daten mit anschließender Neuberechnung der indirekten modalen Parameter nach erneuter Modaltransformation. Bei der nichtparametrischen Form hingegen wird der Einfluß der Modifikation auf die gemessenen Frequenzgangfunktionen unmittelbar berechnet.

3 Direkte parametrische Modifikation

3.1 Modale Betrachtungsweise

Die experimentelle Modalanalyse der Struktur nach Gleichung (2.1) liefert aus der Frequenzgangmatrix

$$\mathbf{H}(j\omega) = \sum_{r=1}^n \frac{\Phi_r \Phi_r^T}{-\omega^2 + \omega_r^2} \quad (3.1)$$

die Eigenfrequenzen ω_r und die korrespondierenden Eigenfunktionen Φ_r , $r = 1, 2, \dots, n$, die in der (m, n) -Modalmatrix Φ spaltenweise angeordnet sind. Nach Modaltransformation gemäß

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^n \Phi_r q_r(t) = \Phi \mathbf{q}(t) \quad (3.2)$$

lautet die Bewegungsgleichung (2.1) in den verallgemeinerten Koordinaten $q_r(t)$, $r = 1, 2, \dots, n$:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Lambda \mathbf{q}(t) = \Phi^T \mathbf{f}(t)$$

bzw.

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \Lambda \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.3)$$

Die Schreibweise von Gleichung (3.3) setzt weiterhin voraus, daß die Eigenformen bezüglich der Masse orthonormiert sind:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{E}, \quad (3.4)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda = \text{diag}(\omega_r^2) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

3.2 Modale Strukturmodifikation

Erfolgt eine Modifikation der Basisstruktur gemäß Gleichung (3.3) an beliebigen Meßpunkten durch diskrete Massen und/oder Federn, werden diese durch die (m, m) -dimensionalen Matrizen $\Delta \mathbf{M}$ und $\Delta \mathbf{K}$ beschrieben. Da im Falle einer experimentellen Modalanalyse die Systemparameter nicht in direkter Form \mathbf{M} und \mathbf{K} , sondern als indirekte modale Systemparameter in der bezüglich der Masse normierten Modalmatrix Φ_0 und der Spektralmatrix Λ_0 vorliegen (Index 0 = Basissystem), erfolgt die Modifikation von Gleichung (3.3)

$$\underbrace{(\mathbf{E} + \tilde{\mathbf{M}})}_{\text{(bekannt)}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \underbrace{(\Lambda + \tilde{\mathbf{K}})}_{\text{(bekannt)}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_{(n \times n)} &= \Phi_{0(n \times m)}^T \Delta \mathbf{M}_{(m \times m)} \Phi_{0(m \times n)} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{(n \times n)} &= \Phi_{0(n \times m)}^T \Delta \mathbf{K}_{(m \times m)} \Phi_{0(m \times n)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

im Modalraum. Die physikalischen Systemparameter \mathbf{M} und \mathbf{K} brauchen daher nicht bestimmt zu werden. Für die Lösung des Gleichungssystems bietet sich bei einer geringen Anzahl der Freiheitsgrade n des modifizierten Eigenwertproblems (3.6) das *Jacobi-Verfahren* an. Es liefert sämtliche Eigenfrequenzen und Modalvektoren

des modifizierten Systems. Nach erneuter Modaltransformation mit

$$\mathbf{q} = \mathbf{T} \mathbf{z} \quad (3.8)$$

wird Gleichung (3.6) im Verlaufe der Rechnung iterativ entkoppelt, die Matrizen $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ simultan diagonalisiert:

$$\underbrace{\mathbf{T}^T (\mathbf{E} + \Phi_0^T \Delta \mathbf{M} \Phi_0) \mathbf{T}}_{\bar{\mathbf{A}}} \ddot{\mathbf{z}}(t) + \underbrace{\mathbf{T}^T (\Lambda_0 + \Phi_0^T \Delta \mathbf{K} \Phi_0) \mathbf{T}}_{\bar{\mathbf{B}}} \mathbf{z}(t) = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Am Ende der Iteration liegen die Matrizenprodukte $\bar{\mathbf{A}}$ und $\bar{\mathbf{B}}$ in diagonalen Form mit

$$\bar{\mathbf{A}}_{diag} = \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} = \mathbf{E} \quad (3.10a)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{diag} = \mathbf{T}^T \mathbf{B} \mathbf{T} = \bar{\Lambda} = \text{diag}(\bar{\omega}_r^2) \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (3.10b)$$

und damit auch die indirekten modalen Parameter des modifizierten Systems vor:

$$\begin{aligned} \text{Eigenfrequenzen:} & \quad \bar{\Lambda} \\ \text{Modalvektoren:} & \quad \bar{\Phi} = \Phi_0 \mathbf{T} \end{aligned} \quad (3.11)$$

4 Gezielte parametrische Modifikation

4.1 Direkte Bestimmung linearer Eigenwertänderungen

Jeder Eigenwert λ_{or} ($\lambda_{or} = \omega_{or}^2$) und der dazugehörige Modalvektor Φ_{or} der Basisstruktur erfüllen das Gleichungssystem

$$[\mathbf{K} - \lambda_{or} \mathbf{M}] \cdot \Phi_{or} = \mathbf{0} \quad r = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

Gleichung (4.1) bildet den Ausgangspunkt der Modifikationsbetrachtungen. Wird dieses System durch diskrete Massen und/oder Federn modifiziert (erfaßt in $\Delta \mathbf{M}$ und $\Delta \mathbf{K}$), erfährt der r -te Eigenwert eine Änderung um $\Delta \lambda_r$ und der r -te Modalvektor um $\Delta \Phi_r$:

$$[(\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) - (\lambda_{or} + \Delta \lambda_r) \cdot (\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M})] \cdot (\Phi_{or} + \Delta \Phi_r) = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

Gleichung (4.2) wird anschließend ausmultipliziert:

$$\begin{aligned} & \underbrace{[(\mathbf{K} - \lambda_{or} \mathbf{M}) \cdot \Phi_{or}]}_1 \\ & + \underbrace{[(\mathbf{K} - \lambda_{or} \mathbf{M}) \cdot \Delta \Phi_{or} + (\Delta \mathbf{K} - \lambda_{or} \Delta \mathbf{M}) \cdot \Phi_{or} - \Delta \lambda_r \mathbf{M} \cdot \Phi_{or}]}_2 \\ & + \underbrace{[(\Delta \mathbf{K} - \lambda_{or} \Delta \mathbf{M}) \cdot \Delta \Phi_{or} - \Delta \lambda_r \mathbf{M} \cdot \Delta \Phi_{or} - \Delta \lambda_r \Delta \mathbf{M} \cdot \Phi_{or} - \Delta \lambda_r \Delta \mathbf{M} \cdot \Delta \Phi_{or}]}_3 \\ & = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Linearisierung

Der erste Term von Gleichung (4.3) verschwindet, da er Gleichung (4.1) entspricht. Für hinreichend kleine Änderungen $\Delta\mathbf{M}$ und $\Delta\mathbf{K}$ kann eine Linearisierung der Gleichung (4.3) derart erfolgen, daß bis auf

$$s = -\Delta\lambda_r \Delta\mathbf{M} \cdot \Phi_{0r} \quad (4.4)$$

alle Summanden des dritten Termes vernachlässigt werden. Werden die Änderungen $\Delta\Phi_r$ des r -ten Modalvektors als die Linearkombination aller Basiseigenvektoren (in der Modalmatrix Φ_0) ausgedrückt

$$\Delta\Phi_r = \Phi_0 \Delta\mathbf{T}_r \quad (4.5)$$

und wird Gleichung (4.3) anschließend formal linksseitig mit der Transponierten der Modalmatrix Φ_0^T multipliziert, ergibt sich für Gleichung (4.3):

$$\Phi_0^T (\mathbf{K} - \lambda_{0r} \mathbf{M}) \Phi_0 \Delta\mathbf{T}_r + \Phi_0^T (\Delta\mathbf{K} - \lambda_{0r} \Delta\mathbf{M}) \Phi_{0r} - \Delta\lambda_r \Phi_0^T \mathbf{M} \Phi_{0r} - \Delta\lambda_r \Phi_0^T \Delta\mathbf{M} \Phi_{0r} = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

Nach Normierung entsprechend Gleichungen (3.3 - 3.4) mit

$$\begin{aligned} \Phi_0^T \mathbf{M} \Phi_0 &= \mathbf{E} \\ \Phi_0^T \mathbf{M} \Phi_{0r} &= \mathbf{e}_r = [0 \quad \dots \quad 1 \quad \dots \quad 0]^T \\ &\quad \downarrow \\ &\quad r\text{-te Stelle} \\ \Phi_0^T \mathbf{K} \Phi_0 &= \Lambda_0 \end{aligned}$$

vereinfacht sich Gleichung (4.6):

$$(\Lambda_0 - \lambda_{0r} \mathbf{E}) \Delta\mathbf{T}_r + \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{K} \Phi_{0r} - \lambda_{0r} \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{M} \Phi_{0r} - \Delta\lambda_r \mathbf{e}_r - \Delta\lambda_r \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{M} \Phi_{0r} = \mathbf{0}. \quad (4.7)$$

Die r -te Zeile von Gleichung (4.7) liefert die *direkte* Gleichung für die linearen Eigenwertänderungen $\Delta\lambda_r$:

$$\Delta\lambda_r = \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{K} \Phi_{0r} - \bar{\lambda}_r \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{M} \Phi_{0r} \quad (4.8)$$

mit

$$\bar{\lambda}_r = \lambda_{0r} + \Delta\lambda_r$$

4.2 Inverse Formulierung

Die Lösung des inversen Modifikationsproblems entspricht der Umkehrung von Gleichung (4.8), also einer Berechnung der Modifikationsmatrizen $\Delta\mathbf{M}$ und $\Delta\mathbf{K}$ für gegebene (lineare) Eigenwertänderung $\Delta\lambda_r$ bzw. für den Zieleigenwert

$$\bar{\lambda}_r = \lambda_{0r} + \Delta\lambda_r$$

Massenmodifikation

Werden nur Massenmodifikationen untersucht, gilt

$$\Delta\mathbf{M} \neq \mathbf{0} \text{ und } \Delta\mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$$

Gleichung (4.8) wird nach den Basis- und Zieleigenwerten aufgelöst:

$$-\frac{\Delta\lambda_r}{\lambda_{zr}} = -\frac{\lambda_{zr} - \lambda_{0r}}{\lambda_{zr}} = \Phi_{0r}^T \Delta\mathbf{M} \Phi_{0r} \quad (4.9)$$

Das den r -ten Modalvektor enthaltende Matrizenprodukt $\Phi_{0r}^T \Delta \mathbf{M} \Phi_{0r}$ vereinfacht sich aufgrund der diagonalen (m,m) -Massenänderungsmatrix $\Delta \mathbf{M}$, die auch als Vektor geschrieben werden kann. Da außerdem unter der Voraussetzung *hinreichend kleiner* Massenänderungen die Gleichung (3.6) ($\Delta \mathbf{K} \equiv \mathbf{0}$)

$$\underbrace{(\mathbf{E} + \Phi_0^T \Delta \mathbf{M} \Phi_0)}_{=\mathbf{A}} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \Lambda_0 \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$$

annähernd entkoppelt bleibt, folgt für Gleichung (4.9) nach Erweiterung auf alle Eigenwerte und -formen

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\Delta\lambda_1 / \lambda_{z1} \\ -\Delta\lambda_2 / \lambda_{z2} \\ \vdots \\ -\Delta\lambda_j / \lambda_{zj} \\ \vdots \\ -\Delta\lambda_n / \lambda_{zn} \end{bmatrix}}_{\Delta\Lambda_M} = \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{11}^2 & \Phi_{21}^2 & \dots & \Phi_{11}^2 & \dots & \Phi_{m1}^2 \\ \Phi_{12}^2 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \Phi_{1j}^2 & \Phi_{2j}^2 & \dots & \Phi_{ij}^2 & \dots & \Phi_{mj}^2 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ \Phi_{1n}^2 & \Phi_{2n}^2 & \dots & \Phi_{in}^2 & \dots & \Phi_{mn}^2 \end{bmatrix}}_{\overline{\Phi}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta m_1 \\ \Delta m_2 \\ \vdots \\ \Delta m_i \\ \vdots \\ \Delta m_m \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{M}} \quad \left(\begin{array}{l} i: \text{Modifikationsmeßpunkt} \\ j: \text{Eigenwertnummer} \end{array} \right) \quad (4.10)$$

Die Matrix $\overline{\Phi}$ besitzt - aufgrund unvollständiger Modaldaten und möglicher *Modifikationsrestriktionen* - im allgemeinen eine *Rechteckform*. In den meisten Fällen wird sie die Form $n_{\text{variiert}} \times m_{\text{modi}}$ aufweisen. Das heißt, n_{variiert} Eigenfrequenzen werden verändert, und m_{modi} zur Modifikation zugelassene Meßpunkte existieren. Somit ergibt sich die Bestimmungsgleichung für den unbekanntenen Massenmodifikationsvektor:

$$\Delta \mathbf{M} = \overline{\Phi}^+ \Delta \Lambda_M \quad (4.11)$$

in der $\overline{\Phi}^+$ die Pseudoinverse von $\overline{\Phi}$ symbolisiert:

$$n_{\text{variiert}} \geq m_{\text{modi}}: \quad \Rightarrow \quad \overline{\Phi}^+ = (\overline{\Phi}^T \overline{\Phi})^{-1} \overline{\Phi}^T$$

$$n_{\text{variiert}} < m_{\text{modi}}: \quad \Rightarrow \quad \overline{\Phi}^+ = \overline{\Phi}^T (\overline{\Phi} \overline{\Phi}^T)^{-1}$$

Wird die inverse Modifikation mit dem direkten Verfahren (erläutert in Abschnitt 3.2) kombiniert, ist die Größe der Eigenfrequenzänderung nicht eingeschränkt. Die Änderungen können, wenn es physikalisch sinnvoll ist, beliebig groß sein. Testrechnungen zeigen, daß dieses Verfahren schnell konvergiert. Bild 1 demonstriert den Ablauf der iterativen Modifikationsrechnung.

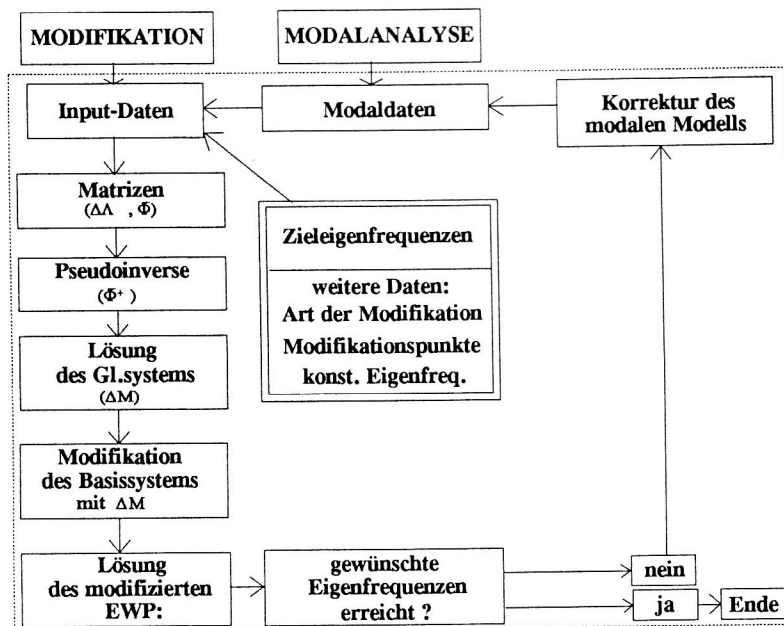


Bild 1. Iterationszyklus für große Parameteränderungen

5 Nichtparametrische gezielte Modifikation

Bei diesem Modifikationsverfahren ist die Kenntnis der modalen Parameter prinzipiell nicht erforderlich. Somit lassen sich die bekannten Unzulänglichkeiten der experimentellen Modalanalyse (Abbruchfehler) vermeiden. Das Verfahren ist an keine Einschränkungen bezüglich der Größe der Modifikationen gebunden (Linearität vorausgesetzt) und ermöglicht auch die Untersuchung von Systemen mit dicht benachbarten oder gleichen Eigenwerten. Der entscheidende Nachteil liegt in einem deutlich höheren experimentellen Aufwand, so daß die Anwendung auf Probleme mit nur wenigen möglichen Modifikationspunkten beschränkt bleibt.

5.1 Direkte Modifikation

Ausgangspunkt ist Gleichung (2.1), die unter Einbeziehung der Dämpfung lautet:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.1)$$

Im Laplaceraum lautet Gleichung (5.1)

$$\mathbf{B}(s)\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (5.2)$$

mit der Systemmatrix

$$\mathbf{B}(s) = \mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} \quad (5.3)$$

Wird das Basissystem durch Modifikationen $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{D}$ und $\Delta\mathbf{K}$ verändert, so wird aus dem homogenen Teil der Gleichung (5.2)

$$[\mathbf{B}(s) + \Delta\mathbf{B}(s)]\mathbf{X}(s) = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

mit

$$\Delta\mathbf{B}(s) = \Delta\mathbf{M}s^2 + \Delta\mathbf{D}s + \Delta\mathbf{K} \quad (5.5)$$

Multipliziert man die Gleichung (5.4) von links mit der Übertragungsmatrix $\mathbf{H}(s)$, so erhält man wegen

$$\mathbf{H}(s)\mathbf{B}(s) = \mathbf{E} \quad (5.6)$$

das modifizierte homogene System

$$[\mathbf{E} + \mathbf{H}(s)\Delta\mathbf{B}(s)]\mathbf{X}(s) = \mathbf{0} \quad (5.7)$$

aus dem die Bedingung für die Berechnung der modifizierten Eigenwerte folgt:

$$\text{Det} [\mathbf{E} + \mathbf{H}(s)\Delta\mathbf{B}(s)] = 0 \quad (5.8)$$

Vernachlässigt man die Dämpfung, so folgt mit $s = j\omega$ daraus

$$\text{Det} [\mathbf{E} + \mathbf{H}(j\omega)\Delta\mathbf{B}(j\omega)] = 0 \quad (5.9)$$

Diese Gleichung liefert die Eigenfrequenzen des modifizierten Systems, wobei $\Delta\mathbf{B}(j\omega)$ vorgegeben wird und die Frequenzgangmatrix $\mathbf{H}(j\omega)$ des Basissystems als Ergebnis von Messungen vorliegt.

5.2 Gezielte nichtparametrische Modifikation

Auf der Basis von Gleichung (5.9) läßt sich das Problem der gezielten Modifikation folgendermaßen formulieren:

Vorgegeben sei eine gewünschte Eigenkreisfrequenz ω_z . Gesucht ist diejenige Modifikationsmatrix $\Delta \mathbf{B}(j\omega_z)$, die die Gleichung

$$\text{Det} [\mathbf{E} + \mathbf{H}(j\omega_z) \Delta \mathbf{B}(j\omega_z)] = 0 \quad (5.10)$$

erfüllt.

Steifigkeitsmodifikation

Die Gleichung (5.10) läßt sich wesentlich vereinfachen, wenn man annimmt, daß innerhalb eines Systems jeweils nur eine Modifikation Δk_{kl} zwischen den Meßpunkten "k" und "l" vorgenommen wird (Bild 2). Dann folgt aus Gleichung (5.10) die erforderliche Modifikation

$$-\frac{1}{\Delta k_{kl}} = \begin{cases} H_{kk}(j\omega_z) - 2H_{kl}(j\omega_z) + H_{ll}(j\omega_z) & \text{für } k \neq l \\ H_{kl}(j\omega_z) & \text{für } k = l \end{cases} \quad (5.11)$$

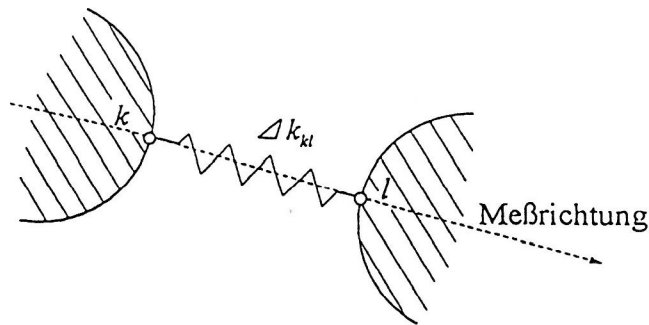


Bild 2. Steifigkeitsmodifikation

Massenmodifikation

Eine punktförmige Zusatzmasse Δm_k am Meßpunkt "k" führt bei allgemeinen räumlichen Systemen auf die erforderliche Modifikationsmatrix

$$\Delta \mathbf{B}(j\omega_z) = -\omega_z^2 \Delta m_k \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Die Zusatzmasse Δm_k ergibt sich dann nach Gleichung (5.10) aus dem Eigenwertproblem

$$\begin{bmatrix} H_{xx}(j\omega_z) & H_{xy}(j\omega_z) & H_{xz}(j\omega_z) \\ H_{yx}(j\omega_z) & H_{yy}(j\omega_z) & H_{yz}(j\omega_z) \\ H_{zx}(j\omega_z) & H_{zy}(j\omega_z) & H_{zz}(j\omega_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = -\frac{1}{\omega_z^2 \Delta m_k} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

x , y und z kennzeichnen die Meßrichtungen im Raum. Gleichung (5.13) ergibt drei mögliche Lösungen für Δm_k .

Für den Fall nur einer dominierenden Schwingrichtung vereinfacht sich Gleichung (5.13) zu

$$H_{xx}(j\omega_z) X = -\frac{1}{\omega_z^2 \Delta m_k} X \quad (5.14)$$

bzw.

$$\frac{1}{\Delta m_k} = -\omega_z^2 H_{xx}(j\omega_z) \quad (5.15)$$

Die Bestimmung der erforderlichen Zusatzmasse erfordert hier lediglich die Messung der Inertanz

$$H_{xx}^a(j\omega) = -\omega^2 H_{xx}(j\omega) \quad (5.16)$$

für die Zielfrequenz ω_z , wodurch für Δm_k folgt

$$\frac{1}{\Delta m_k} = -H_{xx}^a(j\omega_z) \quad (5.17)$$

Dämpfungsmodifikation

Bei gedämpften Systemen mit deutlich ausgeprägten komplexen Moden versagen die Gleichungen (5.11) bzw. (5.17). In diesem Falle muß von der Gleichung (5.8) im Laplace-Raum ausgegangen werden. Das hat zur Folge, daß die nichtparametrische Betrachtung aufgegeben werden muß, da die Matrix der Übertragungsfunktionen $\mathbf{H}(s)$ nicht unmittelbar gemessen werden kann. Geht man auf die modale Darstellung von $\mathbf{H}(s)$ über, so lassen sich den Gleichungen (5.11) bzw. (5.17) entsprechende komplexe Modifikationen berechnen, die eine gezielte Verschiebung der komplexen Eigenwerte ermöglichen (Wahl/Jungbluth, 1994). Da von Ausnahmefällen abgesehen (dicht benachbarte Eigenfrequenzen) bei realen Strukturen überwiegend reelle Moden zu beobachten sind, führen die vorgestellten Methoden zu keinen wesentlichen Einschränkungen.

6 Experimentelle Untersuchungen

Das Ziel der experimentellen Untersuchungen bestand darin, die beschriebenen Modifikationsverfahren an einfachen mechanischen Systemen unter Laborbedingungen zu überprüfen. Als Modell wurde ein einseitig eingespannter Balken mit schwacher Dämpfung verwendet (Bild 3). An den 18 Meßpunkten wurden Zusatzmassen von jeweils 0,063 kg angebracht, um negative Massenänderungen zu ermöglichen und um die Aufnehmermasse zu kompensieren.

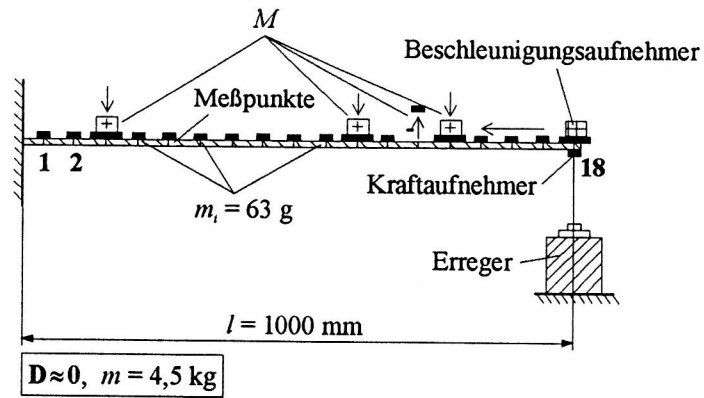


Bild 3. Balken: Massenmodifikation und Identifikation.

Die Ergebnisse der experimentellen Modalanalyse des Basismodells sind im Bild 4 dargestellt. Das modale Modell wurde bewußt auf die ersten fünf Eigenfrequenzen und -moden beschränkt.

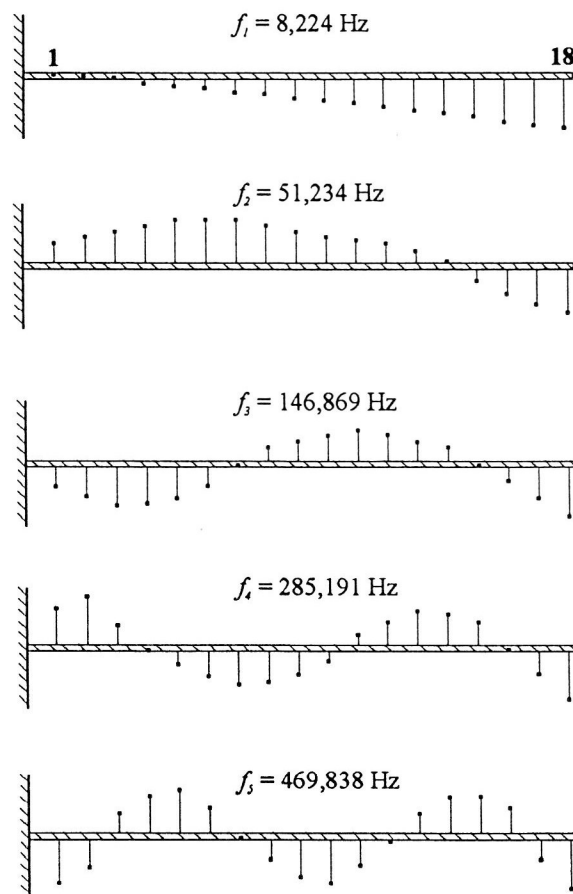


Bild 4. Eigenfrequenzen und -moden des untersuchten Balkens

Die Basiseigenfrequenzen sollten folgendermaßen verschoben werden:

$$\begin{aligned}
 f_1 & 8.224 \text{ Hz} \Rightarrow 8.000 \text{ Hz} \\
 f_2 & 51.234 \text{ Hz} \Rightarrow 50.000 \text{ Hz} \\
 f_3 & 146.869 \text{ Hz} \Rightarrow 150.000 \text{ Hz} \\
 f_4 & 285.191 \text{ Hz} \Rightarrow 280.000 \text{ Hz} \\
 f_5 & 469.838 \text{ Hz} \Rightarrow 450.000 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

Die nachfolgende Tabelle 1 enthält die Resultate verschiedener Massenmodifikationen für die geforderte Verschiebung der Eigenfrequenzen.

| Eigenfrequenzen | | nichtparametrisch | parametrisch | |
|-----------------|---------|-------------------|----------------|----------------|
| | | Modifikation 1 | Modifikation 2 | Modifikation 3 |
| Basis | Ziel | Messung | Messung | Messung |
| 8.224 Hz | 8.000 | 8.095 | 7.982 | 7.998 |
| 51.234 Hz | 50.000 | 49.891 | 49.785 | 49.870 |
| 146.869 Hz | 150.000 | 150.001 | 148.327 | 149.117 |
| 285.191 Hz | 280.000 | 280.169 | 279.150 | 279.588 |
| 469.838 Hz | 450.000 | 449.851 | 449.299 | 449.644 |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|------------------|------------------|------------------|
| Pkt.-Nr. | Δm_i (g) | Δm_i (g) | Δm_i (g) |
| 1 | 17.94 | 76.3 | 58.66 |
| 2 | -33.13 | -37.57 | -41.14 |
| 3 | -63.00 | -63,0 | -63,0 |
| 4 | -60.30 | -20.56 | -16.74 |
| 5 | -8.34 | 51.84 | 39.86 |
| 6 | | | 54.38 |
| 7 | 6.01 | 74.61 | |
| 8 | | | 60.82 |
| 9 | 345.09 | 99.45 | 76.21 |
| 10 | 87.56 | 54.62 | 46.96 |
| 11 | | | -20.98 |
| 12 | -63.00 | -63.0 | -62.81 |
| 13 | | | |
| 14 | 15.81 | 47.65 | 37.03 |
| 15 | | | 68.65 |
| 16 | -0.04 | 47.51 | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |

Tabelle 1. Experimentelle Ergebnisse zur gezielten Modifikation

Die nichtparametrische Modifikation (Modifikation 1) lief nach folgendem Zyklus ab:

- Messung der Autofrequenzgänge (Inertanzen) an allen 18 Meßpunkten
- Ermittlung der maximalen Differenz zwischen Eigen- und Zielfrequenzen
- Festlegung der Zielfrequenz f_{zr} (größter Abstand zur Eigenfrequenz)
- Berechnung der erforderlichen Zusatzmassen Δm_i nach Gleichung (5.17) für alle Meßpunkte

- Ermittlung derjenigen Modifikation, die die quadratische Abweichung zwischen Ziel- und Eigenfrequenzspektrum minimiert

$$\frac{(f_r - f_{zr})^2}{f_r^2} = \min$$

- Anbringen der Zusatzmasse an dem selektierten Meßpunkt.

Dieser Meßzyklus wurde, wie aus der Tabelle 1 zu ersehen ist, insgesamt 10-mal durchlaufen, bis die erforderliche Zusatzmasse unter 5 Gramm lag und das geforderte Eigenfrequenzspektrum (Spalte Messung) erreicht wurde.

Die Spalten Modifikation 2 und 3 zeigen die Ergebnisse des parametrischen Verfahrens. Im Unterschied zum nichtparametrischen erhält man sämtliche Massenmodifikation nicht nacheinander, sondern gleichzeitig. Die einzelnen Modifikationen (Spalte 3) zeigen keine Übereinstimmung mit denen des nichtparametrischen Verfahrens: Da ein unvollständiges System vorliegt, ist die Lösung des Problems nicht eindeutig.

In der nächsten parametrischen Rechnung sind die Modifikationspunkte willkürlich ausgewählt. Die berechneten Massenmodifikationen (Spalte 4) stellen eine weitere Lösung dar und bestätigen die Nichteindeutigkeit.

Negative Massenänderungen treten bei ausschließlicher Massenmodifikation dann auf, wenn einige Eigenfrequenzen fest und/oder Eigenfrequenzen erhöht werden sollen. In der Regel wird man daher auf Massenmodifikationen aus Gründen der einfacheren Handhabung (lokale Anbringung von Δm_i) zurückgreifen, wenn eine Verkleinerung der Eigenfrequenzen erreicht werden soll oder aber negative Modifikationen an bestimmten Strukturpunkten möglich sind. Werden ausschließlich positive Strukturmodifikationen verlangt, läßt sich eine Steifigkeitsmodifikation oder eine Kombination von ΔM und ΔK nicht umgehen. Problematisch ist dabei die Umsetzung der mathematischen Lösung in eine sinnvolle physikalische an der eigentlichen Konstruktion. Überdies gelingt die Änderung der Steifigkeitseigenschaften einer Struktur zumeist nicht ohne erhebliche Eingriffe in ihre äußere Gestalt und Funktionalität.

7 Abschließende Bemerkungen

Der Vorteil des parametrischen Verfahrens liegt vor allem in der vergleichsweise schnellen Rechenzeit gegenüber der nichtparametrischen Vorgehensweise. Andererseits besteht ein wesentlicher Nachteil in der in jedem Iterationsschritt notwendigen Invertierung der Modalmatrix, der allerdings über die Korrekturrechnung zum Teil wieder kompensiert wird. Der entscheidende Vorteil des nichtparametrischen Verfahrens liegt darin, daß lediglich mit gemessenen Frequenzgängen gearbeitet wird. Dadurch lassen sich die Fehlermöglichkeiten der experimentellen Modalanalyse (unvollständige Modalinformationen) vermeiden. Allerdings sind der zeitliche und der meßtechnische Aufwand relativ hoch, weil nach jeder Modifikation erneute Messungen erforderlich sind.

Die beiden Methoden zur gezielten Modifikation mechanischer Strukturen wurden an verschiedenen Rechenmodellen und im Experiment erprobt. Die Resultate deuten auf die Möglichkeit hin, beide Verfahren für die *kurzfristige* Lösung ausgewählter Schwingungsprobleme mit geringem Aufwand einzusetzen. Sie erlauben an Systemen mit vernachlässigbarer Dämpfung die gezielte Verschiebung von Resonanzen. Die Zuverlässigkeit der Verfahren beruht allerdings auf der entscheidenden Voraussetzung, daß die experimentellen Untersuchungen mit großer Sorgfalt durchgeführt werden.

Literatur

1. Gantmacher, F.R.; Krein, M.G.: Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen mechanischer Systeme. Akademie-Verlag Berlin, (1960).
2. Gladwell, G.M.L.: Inverse Problems in Vibration. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, (1986).
3. Natke, H.G.: Minimum Modifications due to Dynamic Requirements: Comparison and Application. In Computational Mechanics Publ., Springer-Verlag, (1989), 31-40.
4. Ram, Y.M.; Braun, S.G.: An Inverse Problem Associated with Modification of Incomplete Dynamic Systems. ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 58, (1991), 233-237.
5. Wahl, F.: Anwendung der Strukturmodifikation zur Lösung von Schwingungsproblemen im Fahrzeugbau. In Tagungsberichte "Dynamische Probleme - Modellierung und Wirklichkeit". Mitteilung des Curt-Risch-Instituts der Universität Hannover, (1990), 291-310.
6. Wahl, F.; Jungbluth, R.: Gezielte Modifikation mechanischer Strukturen auf der Grundlage gemessener modaler Größen. Arbeitsbericht an die DFG, TU Magdeburg, (1993).
7. Zhang, Q.; Allemang, R.J.; Wang, W.; Brown, D.L.: Prediction of Mass Modification for Desired Natural Frequencies. Department of Mechanical and Industrial Engineering, University of Cincinnati. In Proceedings of the 6th International Modal Analysis Conference. Kissimmee, (1988), 1026-1032.
8. Wahl, F.; Jungbluth, R.: Gezielte Modifikation von Eigenwerten bei unvollständiger Modalinformation. GAMM-Jahrestagung, Braunschweig, (1994)

Symbole

| | |
|--|---|
| A, B | Systemmatrizen |
| D | Dämpfungsmatrix |
| E | Einheitsmatrix |
| f(t) | Kraftvektor |
| H(jω) | Frequenzgangmatrix |
| K | Steifigkeitsmatrix |
| ΔK | Steifigkeitsmodifikationsmatrix |
| m | Anzahl der Meßpunkte |
| M | Massenmatrix |
| ΔM | Massenmodifikationsmatrix bzw. -vektor |
| n | Anzahl der Freiheitsgrade |
| q(t) | Vektor der verallgemeinerten Koordinaten |
| T | Transformationsmatrix |
| x(t) | Verschiebungsvektor |
| z(t) | Vektor der verallgemeinerten Koordinaten |
| Φ | reelle Modalmatrix |
| Φ_r | r-ter reeller Modalvektor |
| $\overline{\Phi}$ | quadrierte Modalmatrix |
| $\overline{\Phi}^+$ | Pseudoinverse von $\overline{\Phi}$ |
| Λ | Spektralmatrix |
| $\overline{\Lambda}$ | Spektralmatrix des modifizierten Systems |
| $\Delta \Lambda_M$ | Änderungsvektor der Eigenwerte durch Massenmodifikation |
| $\Delta \lambda_r$ | Änderung des r-ten Eigenwertes |
| λ_{ir} | r-ter Zieleigenwert |
| ω | Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems |

Anschrift: Dr.-Ing. Friedrich Wahl und Dipl.-Ing. Ralph Jungbluth, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg