

Selbstsynchronisation statisch und dynamisch unwuchtiger Vibratoren. Teil I: Grundlagen

L. Sperling

Es wird ein allgemeines lineares Schwingungssystem betrachtet, das durch angetriebene, statisch und dynamisch unwichtige Rotoren erregt wird. Im vorliegenden Teil I werden zunächst die aus der kinetischen Energie des Rotors folgenden, in den Schwingungskoodinaten linearen Glieder für die Bewegungsgleichungen des Rotors und des Schwingungssystems hergeleitet. Danach werden die allgemeinen Existenz- und Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen der Rotoren angegeben. Diese Bedingungen werden im Teil II unter der Voraussetzung kleiner Rotormassen im Vergleich zu repräsentativen Masseparametern des Schwingungssystems (d. h. unter Vernachlässigung auch der linearen Glieder der Einwirkung der Rotoren auf das Schwingungssystem) mittels der Frequenzgänge des Schwingungssystems weiterentwickelt und an Beispielen demonstriert.

1 Einleitung

Dynamische Systeme in Natur und Technik haben eine allgemeine Tendenz zur Synchronisation, d.h. zu bestimmten stationären Bewegungen mit rationalen Frequenzverhältnissen und bestimmten stabilen Phasendifferenzen (siehe z. B. die hinsichtlich solcher Erscheinungen nahezu enzyklopädische Monographie von Blechman, 1971). Synchronisationseffekte sind seit langem und in vielen Bereichen bekannt, z. B. bei Pendeluhren (Christian Huygens, 17. Jahrhundert), bei Musikinstrumenten (Lord Rayleigh), in Elektrotechnik und Elektronik oder bei bestimmten Vorgängen im Gehirn (Norbert Wiener) (siehe auch Strogatz und Stewart, 1993).

In der Mechanik spielen Synchronisationserscheinungen vor allem bei Vibratoren in Form von Unwuchttrotoren oder allgemeineren Mechanismen eine Rolle. Sich selbsttätig synchronisierende Rotoren haben für die Schwingungstechnik große praktische Bedeutung (siehe z. B. Blechman, 1971, 1981; Jordan u. a., 1967; Mahrenholtz, 1970; Sperling, 1967). Auf diesem Gebiet wurden besonders in den 60er Jahren intensive Untersuchungen angestellt (siehe z. B. Chodźaev, 1967; Jordan u. a., 1967; Kirnarskij, 1969; Mahrenholtz, 1970; Sperling, 1967). Ausführliche Literaturverzeichnisse findet man in den Monografien von Blechman (1971, 1981).

Als grundlegendste und einfachste Ergebnisse wurden die Existenz- und Stabilitätsbedingungen für synchrone Bewegungen gleicher Rotoren mit gleichen und gleich eingestellten Antriebsmotoren auf linearen ungedämpften Schwingern hergeleitet und nach der synchronen Drehzahl und den stabilen Phasendifferenzen aufgelöst. Dabei wurden die Rotormassen als klein gegenüber repräsentativen Masseparametern des Schwingungssystems vorausgesetzt. Daneben wurden auch schon Untersuchungen zur Selbstsynchronisation bei ungleichen Rotoren, für gedämpfte Systeme, für Systeme, in denen Stöße vorkommen, zur Selbstsynchronisation für Rotoren mit ungleichen Drehzahlen bei rationalem Drehzahlverhältnis u. a. (siehe z. B. Blechman, 1971, 1981; Sperling, 1967) sowie Untersuchungen zu instationären Bewegungen (siehe z. B. Mahrenholtz, 1970) und experimentelle Untersuchungen (siehe z. B. Blechman, 1971; Mahrenholtz, 1970; Sperling, 1967) durchgeführt.

Zur Herleitung der allgemeinen Existenz- und Stabilitätsbedingungen der Selbstsynchronisation haben sich besonders die von Blechman und anderen aus der Theorie der periodischen Lösungen nach Poincaré und Ljapunov und der Theorie der Stabilität einer Bewegung nach Ljapunov entwickelten Verfahren als angemessen und effektiv erwiesen. Die dabei in Erscheinung tretenden sogenannten Vibrationsmomente, die die mittlere Rückwirkung des Schwingers auf die Rotoren erfassen, lassen sich besonders vorteilhaft mit Hilfe bestimmter Elemente der Frequenzgangmatrix des Schwingungssystems, der sogenannten harmonischen Einflußkoeffizienten, darstellen, die erstmals von Sperling (1967), danach unabhängig von Chodźaev (1967), verwendet wurden (siehe auch Blechman, 1971, 1981). Dieses Verfahren wurde in der Folge fast ausschließlich in der russischsprachigen Literatur behandelt. In der vorliegenden Arbeit wird es nochmals ausführlich beschrieben und dabei für auch dynamisch unwichtige Rotoren ("Taumelvibratoren", Rotorachse ist keine Hauptträgheitsachse) verallgemeinert. Der Selbstsynchronisation spezieller Taumelvibratoren ist vermutlich

auch die nicht zugängliche Arbeit von Kirnarskij (1969) gewidmet. Für solche Rotoren sind neue interessante Bewegungsformen zu erwarten, die in der Schwingungstechnik nützliche Anwendung finden könnten.

Das erneute Aufgreifen der Problematik der Selbstsynchronisation ist auch durch die Möglichkeit der heutigen Rechentechnik und die Weiterentwicklung numerischer Verfahren gerechtfertigt, die es gestatten, instationäre Bewegungen auch komplizierterer und stark nichtlinearer Systeme zu analysieren und dabei solche Erscheinungen wie "Einfangen von Vibratoren" (Mitnahme) oder das eventuelle Auftreten chaotischer Bewegungen auch unter dem Einfluß von Kreiseffekten festzustellen.

Der vorliegende Teil I behandelt die Grundlagen. Zunächst werden für ein Schwingungssystem mit einem Unwuchttrotor die aus der kinetischen Energie des Rotors folgenden linearisierten Glieder für die Bewegungsgleichungen des Rotors und des Schwingungssystems hergeleitet. Für die Aufstellung der Existenz- und der Stabilitätsbedingungen selbstsynchronisierter Bewegungen der Rotoren benötigt man im Falle kleiner Rotormassen für das Schwingungssystem nur die von den Schwingungskoodinaten unabhängigen Glieder. Damit die vorliegende Arbeit als Grundlage für weitere analytische, numerische und experimentelle Untersuchungen geeignet ist, werden aber auch für die Einwirkung auf das Schwingungssystem die linearen Glieder zunächst mit angegeben. Für den Fall einer beliebigen Anzahl von Unwuchttrotoren werden sodann die Existenz- und die Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen in Abhängigkeit von den Vibrationsmomenten allgemein entwickelt.

Im Teil II werden die Vibrationsmomente für den Fall kleiner Rotormassen in Abhängigkeit von den harmonischen Einflußkoeffizienten dargestellt. Darüber hinaus werden die Existenz- und die Stabilitätsbedingungen für bestimmte einfachere Sonderfälle aufbereitet, und es wird ihre Anwendung an einfachen Beispielen demonstriert.

2 Lineares Schwingungssystem mit Unwuchttrotor

Es wird ein Schwingungssystem betrachtet, das durch einen angetriebenen Unwuchttrotor (Unwuchtvibrator) zu Schwingungen angeregt wird. Von Einflüssen des Unwuchttrotors abgesehen, wird das Schwingungssystem als linear vorausgesetzt. Der Rotor sei ein starrer Körper mit dem einen Freiheitsgrad der durch die relative Winkelkoordinate φ beschriebenen Rotation um seine Achse (Bild 1).

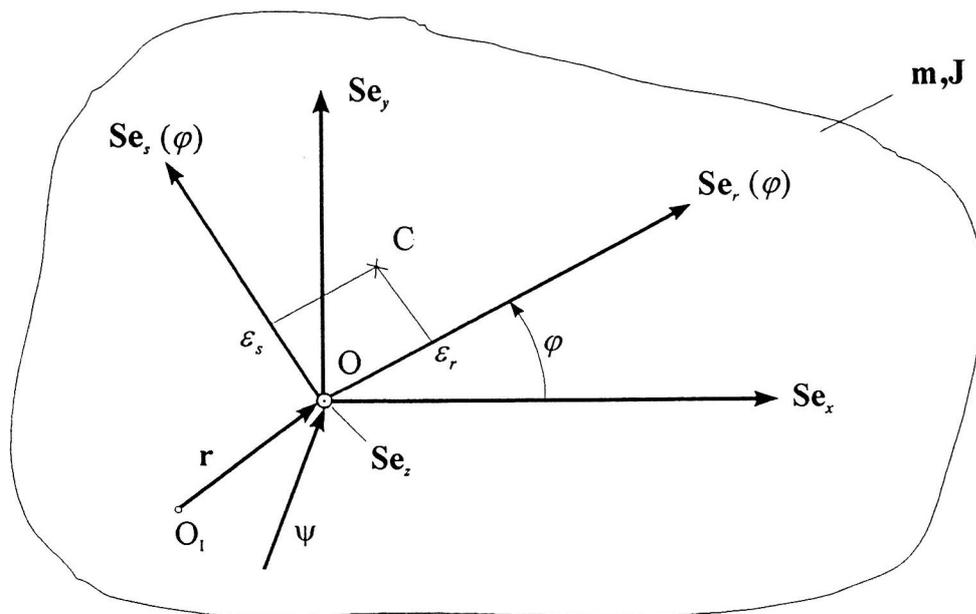


Bild 1. Unwuchttrotor

Die Rotorachse sei fest mit dem Schwingungssystem verbunden, so daß ihre Position (Lage und Orientierung) jederzeit vollständig durch die kleinen translatorischen und rotatorischen Schwingungen im Punkte O bestimmt ist. Dabei ist O der Durchstoßpunkt der Rotorachse durch die den Massenmittelpunkt C des Rotors enthaltende Ebene senkrecht zur Rotorachse.

Für die folgenden Entwicklungen sei

$$\mathbf{e}_x = [1 \ 0 \ 0]^T \quad \mathbf{e}_y = [0 \ 1 \ 0]^T \quad \mathbf{e}_z = [0 \ 0 \ 1]^T \quad (1)$$

eine Basis im Inertialsystem (der Index T kennzeichnet die Transponierte einer Matrix).

Die kleinen Schwingungen im Punkte O werden beschrieben durch den auf O_1 , einen in einem Inertialsystem festen Punkt, bezogenen Ortsvektor

$$\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T \quad (2)$$

und durch den kleinen, auf das Inertialsystem bezogenen Schwingwinkel

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_x \ \psi_y \ \psi_z]^T \quad (3)$$

\mathbf{r} und $\boldsymbol{\psi}$ sind auf die Basis (1) bezogen.

Die Matrix S sei die durch $\boldsymbol{\psi}$ bestimmte Drehmatrix infolge der kleinen Schwingungen an der Stelle O,

$$\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T \quad (4)$$

die entsprechende Winkelgeschwindigkeit.

Mittels der Drehmatrix der Relativbewegung

$$\Phi = \Phi(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

seien die Vektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \mathbf{e}_r(\varphi) = \Phi \mathbf{e}_x = [\cos \varphi \ \sin \varphi \ 0]^T \\ \mathbf{e}_s &= \mathbf{e}_s(\varphi) = \Phi \mathbf{e}_y = [-\sin \varphi \ \cos \varphi \ 0]^T \end{aligned} \quad (6)$$

eingeführt mit

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\varphi} \mathbf{e}_s \quad \dot{\mathbf{e}}_s = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_r \quad (7)$$

Im Bild 1 sind die folgenden auf die Basis (1) bezogenen Einheitsvektoren dargestellt:

- $\mathbf{Se}_x, \mathbf{Se}_y$ - in der OC-Ebene, schwingungssystemfest,
- $\mathbf{Se}_r, \mathbf{Se}_s$ - in der OC-Ebene, rotorfest,
- \mathbf{Se}_z - in Richtung der Rotorachse, schwingungssystem- und rotorfest.

Die kinetische Energie des Rotors setzt sich aus der translatorischen Energie T_{tr} und der rotatorischen Energie T_{rot} zusammen:

$$T = T_{tr} + T_{rot} \quad (8)$$

$$T_{tr} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_a^T \mathbf{v}_a \quad T_{rot} = \frac{1}{2} \omega_a^T \mathbf{J}_1 \omega_a \quad (9)$$

Es sind m die Rotormasse, \mathbf{v}_a die auf (1) bezogene Absolutgeschwindigkeit von C, \mathbf{J}_1 die auf C bezogene in das Inertialsystem transformierte Trägheitsmatrix des Rotors und ω_a seine absolute Winkelgeschwindigkeit. Für die weitere Entwicklung werden die folgenden, von den rotorfesten, konstanten Koordinaten ε_r , ε_s von C abhängigen Größen verwendet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\varphi) = \varepsilon_r \mathbf{e}_r + \varepsilon_s \mathbf{e}_s = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ 0]^T \quad (10)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x(\varphi) = \varepsilon_r \cos \varphi - \varepsilon_s \sin \varphi \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y(\varphi) = \varepsilon_r \sin \varphi + \varepsilon_s \cos \varphi \quad (11)$$

$$\dot{\varepsilon}_x = -\dot{\varphi} \varepsilon_y \quad \dot{\varepsilon}_y = \dot{\varphi} \varepsilon_x \quad (12)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_r \dot{\mathbf{e}}_r + \varepsilon_s \dot{\mathbf{e}}_s = [\dot{\varepsilon}_x \ \dot{\varepsilon}_y \ 0]^T = \dot{\varphi} \boldsymbol{\tau} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\varphi) = \varepsilon_r \mathbf{e}_s - \varepsilon_s \mathbf{e}_r = [-\varepsilon_y \ \varepsilon_x \ 0]^T \quad (14)$$

$$\varepsilon^2 = \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 = \varepsilon_r^2 + \varepsilon_s^2 \quad (15)$$

Damit hat der Massenmittelpunkt C den auf O_1 und die Basis (1) bezogenen Ortsvektor

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{r} + \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (16)$$

Durch Differentiation von \mathbf{r}_a nach der Zeit t erhält man unter Verwendung der sogenannten Poissonschen Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{S}} = \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{S} \quad (17)$$

mit

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

die Absolutgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{S} \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\varphi} \mathbf{S} \boldsymbol{\tau} \quad (19)$$

Der Tilde-Operator zur Bildung von $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ aus $\boldsymbol{\omega}$ gestattet die Ausführung des äußeren Vektorproduktes; Gleichung (19) ist aus der Theorie der Relativbewegung bekannt.

Für die absolute Winkelgeschwindigkeit des Rotors gilt:

$$\omega_a = \omega + \dot{\varphi} \mathbf{S} \mathbf{e}_z \quad (20)$$

Mittels der Transformationsregeln für Tensoren im Matrizenkalkül erhält man

$$\mathbf{J}_I = \mathbf{S} \Phi \mathbf{J} \Phi^T \mathbf{S}^T \quad (21)$$

mit der konstanten, auf rotorfeste Achsen bezogenen Trägheitsmatrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{rr} & J_{rs} & J_{rz} \\ J_{rs} & J_{ss} & J_{sz} \\ J_{rz} & J_{sz} & J_{zz} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Mit den Gleichungen (20) und (21) folgt aus Gleichung (9) für die rotatorische Energie

$$T_{rot} = \frac{1}{2} (\omega^T + \dot{\varphi} \mathbf{e}_z^T \mathbf{S}^T) \mathbf{S} \Phi \mathbf{J} \Phi^T \mathbf{S}^T (\omega + \dot{\varphi} \mathbf{S} \mathbf{e}_z) \quad (23)$$

Im folgenden werden die aus T resultierenden, in den Komponenten von \mathbf{r} und ψ linearen Glieder der Bewegungsgleichungen für den Rotor und das Schwingungssystem hergeleitet. Dabei soll der Einfachheit halber folgende Vereinbarung gelten: Sind gegenüber dem vorhergehenden Ausdruck für eine Größe Glieder, die keine Beiträge zu den linearisierten Gleichungen liefern, unberücksichtigt geblieben, so wird anstelle von \approx das Zeichen \approx verwendet. Im Rahmen dieser Näherung gilt für die Drehmatrix

$$\mathbf{S} \approx \mathbf{E} + \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \tilde{\psi} \quad (24)$$

mit \mathbf{E} als der 3 x 3-Einheitsmatrix und für die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega \approx \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \right) \dot{\psi} \quad (25)$$

bzw.

$$\tilde{\omega} \approx \dot{\tilde{\psi}} + \frac{1}{2} (\tilde{\psi} \dot{\tilde{\psi}} - \dot{\tilde{\psi}} \tilde{\psi}) \quad (26)$$

(siehe z. B. Nour-Omid und Rankin, 1991). Damit folgt

$$\tilde{\omega} \mathbf{S} \approx \dot{\tilde{\psi}} + \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\psi}} \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \dot{\tilde{\psi}}) \quad (27)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (24) und (27) in Gleichung (19) oder durch Differentiation der aus den Gleichungen (16) und (24) folgenden Beziehung

$$\mathbf{r}_a \approx \mathbf{r} + \left(\mathbf{E} + \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \tilde{\psi} \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad (28)$$

erhält man

$$\mathbf{v}_a \approx \dot{\mathbf{r}} + \left(\dot{\tilde{\psi}} + \frac{1}{2} (\dot{\tilde{\psi}} \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \dot{\tilde{\psi}}) \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\varphi} \left(\mathbf{E} + \tilde{\psi} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \tilde{\psi} \right) \boldsymbol{\tau} \quad (29)$$

Entsprechend ergibt sich aus Gleichung (23) nach Einsetzen der Gleichungen (24) und (25):

$$T_{rot} \approx \frac{1}{2} \dot{\psi}^T \Phi \mathbf{J} \Phi^T \dot{\psi} + \dot{\phi} \dot{\psi}^T \left(\mathbf{E} - \frac{1}{2} \tilde{\psi} \right) (\mathbf{E} + \tilde{\psi}) \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\phi}^2 \quad (30)$$

bzw.

$$T_{rot} \approx \frac{1}{2} \dot{\psi}^T \Phi \mathbf{J} \Phi^T \dot{\psi} + \dot{\phi} \dot{\psi}^T \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \right) \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\phi}^2 \quad (31)$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichung des Rotors werden von den Beziehungen (29) und (31) nur die folgenden Glieder benötigt:

$$\mathbf{v}_a \approx \dot{\mathbf{r}} + \dot{\tilde{\psi}} \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} (\mathbf{E} + \tilde{\psi}) \boldsymbol{\tau} \quad (32)$$

$$T_{rot} \approx \dot{\phi} \dot{\psi}^T \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z + \frac{1}{2} J_{zz} \dot{\phi}^2 \quad (33)$$

Für die Differentiation von T_r nach einer skalaren Größe gilt nach Gleichung (9) allgemein

$$\frac{\partial T_r}{\partial \lambda} = m \frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \lambda} \mathbf{v}_a \quad (34)$$

Aus (32) ergibt sich

$$\frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \dot{\phi}} = \boldsymbol{\tau}^T (\mathbf{E} - \tilde{\psi}) \quad (35)$$

Berücksichtigt man

$$\mathbf{e}_r^T \dot{\tilde{\psi}} \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_s^T \dot{\tilde{\psi}} \mathbf{e}_s = 0 \quad \mathbf{e}_s^T \dot{\tilde{\psi}} \mathbf{e}_r = -\mathbf{e}_r^T \dot{\tilde{\psi}} \mathbf{e}_s = \dot{\psi}_z \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T \dot{\tilde{\psi}} \boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon^2 \dot{\psi}_z \quad (37)$$

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = \varepsilon^2 \quad (38)$$

so erhält man entsprechend Gleichung (34) mit den Gleichungen (35) und (32)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \approx m \boldsymbol{\tau}^T \dot{\mathbf{r}} + m \varepsilon^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi}_z) + \dot{\psi}^T \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z + J_{zz} \dot{\phi} \quad (39)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m \boldsymbol{\tau}^T \ddot{\mathbf{r}} - m \dot{\phi} \varepsilon^T \dot{\mathbf{r}} + m \varepsilon^2 (\ddot{\phi} + \ddot{\psi}_z) + \ddot{\psi}^T \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z + \dot{\phi} \dot{\psi}^T \frac{d\Phi}{d\phi} \mathbf{J} \mathbf{e}_z + J_{zz} \ddot{\phi} \quad (40)$$

Mit

$$\frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \dot{\phi}} = -\boldsymbol{\tau}^T \dot{\tilde{\psi}} - \dot{\phi} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\mathbf{E} - \tilde{\psi}) \quad (41)$$

folgt entsprechend

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} \approx -m\dot{\varphi}\varepsilon^T\dot{\mathbf{r}} + \dot{\varphi}\dot{\psi}^T \frac{d\Phi}{d\varphi} \mathbf{J} \mathbf{e}_z \quad (42)$$

Unter Beachtung von

$$\Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z = J_{rz} \mathbf{e}_r + J_{sz} \mathbf{e}_s + J_{zz} \mathbf{e}_z \quad (43)$$

und mit

$$J := J_{zz} + m\varepsilon^2 \quad (44)$$

erhält man schließlich die in den Komponenten von \mathbf{r} und ψ linearisierte Bewegungsgleichung des Rotors

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = J(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}_z) + B = Q_\varphi \quad (45)$$

mit der Abkürzung

$$B = \mathbf{e}_s^T (m\varepsilon_r \ddot{\mathbf{r}} + J_{sz} \ddot{\psi}) + \mathbf{e}_r^T (-m\varepsilon_s \ddot{\mathbf{r}} + J_{rz} \ddot{\psi}) \quad (46)$$

Die Größe Q_φ ist das um die Rotorachse auf den Rotor wirkende Moment.

Zur Herleitung der in den Komponenten von \mathbf{r} und ψ linearen Anteile für die Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems ist von den Beziehungen (8) und (9) mit (29) und (31) auszugehen. Die Herleitung ist detaillierter im Anhang der vorliegenden Arbeit ausgeführt. Es werden folgende Ausdrücke bzw. Bezeichnungen verwendet:

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_s^2) + \frac{1}{2} (\varepsilon_r^2 - \varepsilon_s^2) \cos 2\varphi - \varepsilon_r \varepsilon_s \sin 2\varphi \quad (47)$$

$$\varepsilon_y^2 = \frac{1}{2} (\varepsilon_r^2 + \varepsilon_s^2) - \frac{1}{2} (\varepsilon_r^2 - \varepsilon_s^2) \cos 2\varphi + \varepsilon_r \varepsilon_s \sin 2\varphi \quad (48)$$

$$\varepsilon_x \varepsilon_y = \frac{1}{2} (\varepsilon_r^2 - \varepsilon_s^2) \sin 2\varphi + \varepsilon_r \varepsilon_s \cos 2\varphi \quad (49)$$

$$J_{xx} = \frac{1}{2} (J_{rr} + J_{ss}) + \frac{1}{2} (J_{rr} - J_{ss}) \cos 2\varphi - J_{rs} \sin 2\varphi \quad (50)$$

$$J_{yy} = \frac{1}{2} (J_{rr} + J_{ss}) - \frac{1}{2} (J_{rr} - J_{ss}) \cos 2\varphi + J_{rs} \sin 2\varphi \quad (51)$$

$$J_{xy} = \frac{1}{2} (J_{rr} - J_{ss}) \sin 2\varphi + J_{rs} \cos 2\varphi \quad (52)$$

$$J_{xz} = J_{rz} \cos \varphi - J_{sz} \sin \varphi \quad J_{yz} = J_{rz} \sin \varphi + J_{sz} \cos \varphi \quad (53)$$

$$\bar{J}_{xx} = J_{xx} + m\varepsilon_y^2 \quad \bar{J}_{yy} = J_{yy} + m\varepsilon_x^2 \quad \bar{J}_{xy} = J_{xy} - m\varepsilon_x \varepsilon_y \quad (54)$$

Der Einheitlichkeit halber wird für das auf die Rotorachse bezogene Massenträgheitsmoment des Rotors noch die neue Bezeichnung

$$\bar{J}_{zz} := J = J_{zz} + m\varepsilon^2 \quad (55)$$

eingeführt.

Verwendet man die Abkürzung

$$Q_{q_i} := \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (56)$$

wobei q_i für $r_x, r_y, r_z, \psi_x, \psi_y$ bzw. ψ_z steht, so erhält man schließlich:

$$Q_{r_x} = m \left[\ddot{r}_x - \varepsilon_y \ddot{\psi}_z - 2\varepsilon_x \dot{\phi} \dot{\psi}_z + \dot{\phi}^2 (-\varepsilon_x + \varepsilon_y \psi_z) + \ddot{\phi} (-\varepsilon_y - \varepsilon_x \psi_z) \right] \quad (57)$$

$$Q_{r_y} = m \left[\ddot{r}_y + \varepsilon_x \ddot{\psi}_z - 2\varepsilon_y \dot{\phi} \dot{\psi}_z + \dot{\phi}^2 (-\varepsilon_y - \varepsilon_x \psi_z) + \ddot{\phi} (\varepsilon_x - \varepsilon_y \psi_z) \right] \quad (58)$$

$$Q_{r_z} = m \left[\ddot{r}_z + \varepsilon_y \ddot{\psi}_x - \varepsilon_x \ddot{\psi}_y + 2\dot{\phi} (\varepsilon_x \dot{\psi}_x + \varepsilon_y \dot{\psi}_y) + \dot{\phi}^2 (-\varepsilon_y \psi_x + \varepsilon_x \psi_y) + \ddot{\phi} (\varepsilon_x \psi_x + \varepsilon_y \psi_y) \right] \quad (59)$$

$$Q_{\psi_x} = m \varepsilon_y \ddot{r}_z + \bar{J}_{xx} \ddot{\psi}_x + \bar{J}_{xy} \ddot{\psi}_y + J_{xz} \ddot{\psi}_z + \dot{\phi} \left[-2\bar{J}_{xy} \dot{\psi}_x + (\bar{J}_{xx} - \bar{J}_{yy} + \bar{J}_{zz}) \dot{\psi}_y - 2J_{yz} \dot{\psi}_z \right] \\ + \dot{\phi}^2 \left(-J_{yz} - \frac{1}{2} J_{xz} \psi_z \right) + \ddot{\phi} \left(J_{xz} + \frac{1}{2} \bar{J}_{zz} \psi_y - \frac{1}{2} J_{yz} \psi_z \right) \quad (60)$$

$$Q_{\psi_y} = -m \varepsilon_x \ddot{r}_z + \bar{J}_{xy} \ddot{\psi}_x + \bar{J}_{yy} \ddot{\psi}_y + J_{yz} \ddot{\psi}_z + \dot{\phi} \left[(\bar{J}_{xx} - \bar{J}_{yy} - \bar{J}_{zz}) \dot{\psi}_x + 2\bar{J}_{xy} \dot{\psi}_y + 2J_{xz} \dot{\psi}_z \right] \\ + \dot{\phi}^2 \left(J_{xz} - \frac{1}{2} J_{yz} \psi_z \right) + \ddot{\phi} \left(J_{yz} - \frac{1}{2} \bar{J}_{zz} \psi_x + \frac{1}{2} J_{xz} \psi_z \right) \quad (61)$$

$$Q_{\psi_z} = -m \varepsilon_y \ddot{r}_x + m \varepsilon_x \ddot{r}_y + J_{xz} \ddot{\psi}_x + J_{yz} \ddot{\psi}_y + \bar{J}_{zz} \ddot{\psi}_z + \dot{\phi}^2 (J_{xz} \psi_x + J_{yz} \psi_y) \\ + \ddot{\phi} \left(\bar{J}_{zz} + \frac{1}{2} J_{yz} \psi_x - \frac{1}{2} J_{xz} \psi_y \right) \quad (62)$$

Es sei auf die starke Kopplung dieser Gleichungen mit der Bewegungsgleichung (45) des Rotors nicht nur durch die Faktoren $\dot{\phi}$ und $\ddot{\phi}$, sondern auch durch die ϕ -Abhängigkeit vieler Koeffizienten hingewiesen. Die Ausdrücke (57) bis (62) müssen nun je nach Art des Schwingungssystems in dessen Bewegungsgleichungen eingearbeitet werden. Der mechanischen Bedeutung nach sind sie Kräfte und Momente, die in jeweils negativer Koordinatenrichtung in O auf das Schwingungssystem einwirken. Ist das Schwingungssystem diskret und sind für O bestimmte der sechs Bewegungsmöglichkeiten $r_x, r_y, r_z, \psi_x, \psi_y, \psi_z$ verhindert, so sind diese Größen und ihre zeitlichen Ableitungen in den Gleichungen (57) bis (62) gleich Null zu setzen. Auch für kompliziertere Zwangsbedingungen kann man von den Gleichungen (57) bis (62) ausgehen, wenn man z. B. mit Lagrangeschen Multiplikatoren arbeitet.

In den Arbeiten zur Selbstsynchronisation werden die Rotormassen gewöhnlich als klein im Vergleich zu repräsentativen Masseparametern des Schwingungssystems vorausgesetzt. Dementsprechend werden im Teil II der vorliegenden Arbeit von den Ausdrücken (57) bis (62) nur die von den Bewegungskoodinaten des Schwingungssystems unabhängigen Glieder

$$Q_{r_x}^0 = -m(\varepsilon_x \dot{\phi}^2 + \varepsilon_y \ddot{\phi}) \quad Q_{r_y}^0 = -m(\varepsilon_y \dot{\phi}^2 - \varepsilon_x \ddot{\phi}) \quad Q_{r_z}^0 = 0 \quad (63)$$

$$Q_{\psi_x}^0 = -J_{yz} \dot{\phi}^2 + J_{xz} \ddot{\phi} \quad Q_{\psi_y}^0 = J_{xz} \dot{\phi}^2 + J_{yz} \ddot{\phi} \quad Q_{\psi_z}^0 = J \ddot{\phi} \quad (64)$$

benötigt. Diese Glieder können auch leicht unter Verwendung der Ausdrücke (32) und (33) anstelle von (29) und (31) hergeleitet werden. Sie erfassen die Einwirkung des Rotors mit ruhender Achse auf seine Umgebung. Im Sonderfall konstanter Winkelgeschwindigkeit ($\ddot{\phi} = 0$) reduziert sich die Wirkung des Rotors auf die Zentrifugalkraft und auf das Unwuchtmoment.

Für die Herleitung der vollständigeren Ausdrücke (57) bis (62) in der vorliegenden Arbeit sind folgende Gründe maßgebend:

- Die Arbeit soll als Grundlage für weitere analytische, numerische und experimentelle Untersuchungen geeignet sein.
- Die vollständigeren Gleichungen gestatten eine Schätzung des Fehlers infolge Vernachlässigung der von r und ψ abhängigen Glieder.
- Sie gestatten auch die Ermittlung von Sonderfällen, für die die Fehler völlig vermeidbar sind.

Bewegt sich das Schwingungssystem z. B. in O nur translatorisch, so folgt aus den Gleichungen (57) bis (59):

$$Q_{rx}^* = m \left[\ddot{r}_x - (\varepsilon_x \dot{\varphi}^2 + \varepsilon_y \ddot{\varphi}) \right] \quad Q_{ry}^* = m \left[\ddot{r}_y - (\varepsilon_y \dot{\varphi}^2 - \varepsilon_x \ddot{\varphi}) \right] \quad Q_{rz}^* = m \ddot{r}_z \quad (65)$$

Ergänzt man das Modell des Schwingungssystems durch eine diskrete Masse m im Punkt O, so erfaßt man damit bereits die Glieder $m\ddot{r}_x$, $m\ddot{r}_y$, $m\ddot{r}_z$, und die Gleichungen (65) gehen in die Gleichungen (63) über.

Komplizierter ist die Situation, wenn sich das System in O rotatorisch bewegt. Ist z. B. ausschließlich eine Bewegung ψ_x möglich, so folgt aus Gleichung (60)

$$Q_{\psi x}^* = \bar{J}_{xx} \ddot{\psi}_x - 2\bar{J}_{xy} \dot{\varphi} \dot{\psi}_x - J_{yz} \dot{\varphi}^2 + J_{xz} \ddot{\varphi} \quad (66)$$

Dieser Ausdruck geht wieder in den Ausdruck für $Q_{\psi x}^0$ nach Gleichung (64) über, wenn man das Modell des Schwingungssystems durch ein diskretes Massenträgheitsmoment \bar{J}_{xx} um die Achse in x -Richtung durch O ergänzt und den Rotor zusätzlich so gestaltet, daß die Bedingung

$$\bar{J}_{xy} = \frac{1}{2} \left[J_{rr} - J_{ss} + m(\varepsilon_s^2 - \varepsilon_r^2) \right] \sin 2\varphi + (J_{rs} - m\varepsilon_r \varepsilon_s) \cos 2\varphi = 0 \quad (67)$$

erfüllt ist, d. h. , daß gilt

$$J_{rr} + m\varepsilon_s^2 - (J_{ss} + m\varepsilon_r^2) = 0 \quad (68)$$

$$J_{rs} - m\varepsilon_r \varepsilon_s = 0 \quad (69)$$

3 Existenz- und Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen

Im folgenden wird ein Schwingungssystem betrachtet, auf dem m Unwuchttrotoren im Sinne von Abschnitt 1 angebracht sind. Nach den Gleichungen (45), (44) und (46) lassen sich die Bewegungsgleichungen der Rotoren in der Form

$$J_i (\ddot{\varphi}_i + \ddot{\psi}_{iz}) + B_i = Q_{\varphi i} \quad i = 1(1)m \quad (70)$$

darstellen mit

$$J_i = J_{izz} + m_i \varepsilon_i^2 \quad (71)$$

und

$$B_i = \mathbf{e}_{is}^T (m_i \varepsilon_{ir} \ddot{r}_i + J_{isz} \ddot{\psi}_i) + \mathbf{e}_{ir}^T (-m_i \varepsilon_{is} \ddot{r}_i + J_{irz} \ddot{\psi}_i) \quad (72)$$

Im selbstsynchronisierten Zustand rotieren alle Rotoren unter dem Einfluß aller auf sie einwirkenden Momente näherungsweise mit der gleichen konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω , wobei für jeden Rotor die positive und die negative φ_i -Richtung als Drehrichtung zugelassen sein soll. Es wird deshalb "künstlich" ein kleiner Parameter μ so eingeführt, daß die Bewegungsgleichungen für $\mu = 0$ diesem selbstsynchronisierten Zustand entsprechen:

$$J_i \ddot{\varphi}_i + k_i (\dot{\varphi}_i - \sigma_i \Omega) = \mu f_i \quad (73)$$

Aus den Gleichungen (70) und (73) folgt

$$\mu f_i = Q_{\varphi_i} - B_i + k_i (\dot{\varphi}_i - \sigma_i \Omega) - J_i \ddot{\psi}_{iz} \quad (74)$$

Dabei ist k_i durch die Dämpfungsmomente und die Motorkennlinie bestimmt. Der Faktor σ_i kann die Werte +1 oder -1 annehmen, je nachdem, ob die Synchronisation mit Ω in positiver oder negativer φ_i -Richtung untersucht wird. Die Einführung der Faktoren σ_i verkompliziert zwar die Herleitung der Berechnungsformeln etwas, ermöglicht es aber, mit einer Rechnung gleichzeitig unterschiedliche Synchronisationsfälle zu erfassen.

Der selbstsynchronisierte Bewegungszustand wird durch die sogenannte erzeugende Lösung

$$\varphi_i^0(t) = \sigma_i (\Omega t + \alpha_i) \quad i = 1(1)m \quad (75)$$

der mit $\mu = 0$ aus Gleichung (73) folgenden Differentialgleichungen beschrieben. Die erzeugende Lösung hängt noch von den m Nullphasenwinkeln $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ ab.

Die auf der Theorie periodischer Lösungen nach Poincaré und Ljapunov basierenden Entwicklungen (siehe Blechman, 1971,1981; Sperling, 1967) zeigen, daß Selbstsynchronisation im vorliegenden Fall nur für solche Phasenwinkel α_i möglich ist, für die die sogenannten Existenzbedingungen

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \frac{\sigma_i}{k_i} \frac{1}{T} \int_0^T [\mu f_i]_0 dt = 0 \quad (76)$$

erfüllt sind.

Dabei ist T die Periodendauer,

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} \quad (77)$$

und der Index $[\dots]_0$ bedeutet, daß der Klammerinhalt für die erzeugende Lösung zu nehmen ist. Hinsichtlich der Schwingungskordinaten entspricht der Ω -frequente eingeschwingene Zustand der erzeugenden Lösung.

Damit folgt

$$\int_0^T [k_i (\dot{\varphi}_i - \sigma_i \Omega) - J_i \ddot{\psi}_{iz}]_0 dt = 0 \quad (78)$$

Nach Einsetzen der Gleichungen (74) und (78) in Gleichung (76) erhält man die Existenzbedingungen in der Gestalt

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \frac{\sigma_i}{k_i} \frac{1}{T} \int_0^T [Q_{\varphi_i} - B_i]_0 dt = 0 \quad (79)$$

Bezeichnet man das Zeitmittel des auf den i -ten Rotor wirkenden Motormomentes mit M_i , das mittlere Dämpfungsmoment mit R_i , so gilt:

$$M_i - R_i = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T [Q_{\varphi_i}(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)]_0 dt \quad (80)$$

und die Existenzbedingungen lassen sich in der Form

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \frac{1}{k_i} (M_i - R_i - V_i) = 0 \quad (81)$$

darstellen mit den für die Selbstsynchronisation wesentlichen Vibrationsmomenten

$$V_i = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T [B_i]_0 dt \quad (82)$$

Mit Gleichung (72) folgt:

$$V_i = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T [\mathbf{e}_{is}^T (m_i \varepsilon_{ir} \ddot{\mathbf{r}}_i + J_{isz} \ddot{\Psi}_i) + \mathbf{e}_{ir}^T (-m_i \varepsilon_{is} \ddot{\mathbf{r}}_i + J_{irz} \ddot{\Psi}_i)]_0 dt \quad (83)$$

Die weitere Untersuchung der Vibrationsmomente erfolgt im Teil II, wobei zur Bestimmung der stationären Systemreaktionen $[\ddot{\mathbf{r}}_i]_0$ und $[\ddot{\Psi}_i]_0$ die vereinfachten Ausdrücke (63) und (64) verwendet werden.

Zur konkreten Darstellung des Momentes $M_i - R_i$ wird

$$Q_{\varphi_i} = L_i(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) - k_i^R \dot{\varphi}_i \quad (84)$$

gesetzt mit k_i^R als dem Dämpfungskoeffizienten der als linear von $\dot{\varphi}_i$ abhängig vorausgesetzten, auf den i -ten Rotor einwirkenden dissipativen Momente und dem Motormoment

$$L_i = L_i^0 - k_i^M \dot{\varphi}_i \quad L_i^0 \text{ und } k_i^M \text{ -konstant} \quad (85)$$

das im Zustand der Selbstsynchronisation näherungsweise durch die linearisierte statische Kennlinie erfaßt werden darf. Die nun folgenden Aussagen bleiben auch dann gültig, wenn L_i^0 und k_i^M mittelwertfreie Funktionen von φ_i mit einer Periode von 2π überlagert werden.

Unter Beachtung von Gleichung (75) findet man:

$$M_i - R_i = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T [Q_{\varphi_i}(\varphi_i, \dot{\varphi}_i)]_0 dt = \sigma_i L_i^0 - k_i \Omega \quad k_i = k_i^R + k_i^M \quad (86)$$

Führt man noch die sogenannten Partialwinkelgeschwindigkeiten

$$\Omega_i = \frac{\sigma_i L_i^0}{k_i} \quad (87)$$

ein, mit denen die Rotoren bei ruhender Lagerung (Schwinger arretiert) rotieren würden, so kann man die Existenzbedingungen (81) auch in folgender Form schreiben:

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \Omega_i - \Omega - \frac{1}{k_i} V_i = 0 \quad (88)$$

Entstehen k_i^R und k_i^M durch Linearisierung nichtlinearer Kennlinien in der Umgebung von Ω , so sind die Partialgeschwindigkeiten nur fiktive Größen.

Die wichtigste Grundaufgabe bei der Untersuchung der Selbstsynchronisation ist die Bestimmung der den Existenzbedingungen (88) genügenden Nullphasenwinkel $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, genauer gesagt der Winkeldifferenzen; denn im Gegensatz zur sogenannten äußeren (nichtautonomen) Synchronisation, bei der ein Objekt so stark überwiegt, daß seine Bewegung in nullter Näherung von den übrigen unbeeinflusst und damit die synchrone Winkelgeschwindigkeit vorgegeben ist, kann bei der hier vorliegenden sogenannten inneren (autonomen) Synchronisation der Zeitnullpunkt willkürlich festgelegt werden, was nach Gleichung(75) gleichbedeutend mit der Festlegung eines Nullphasenwinkels ist.

Die Existenzbedingungen dienen daher der Bestimmung von $m-1$ Phasendifferenzen, z. B. $\alpha_1 - \alpha_m, \dots, \alpha_{m-1} - \alpha_m$, und der synchronen Winkelgeschwindigkeit Ω .

Die auf der Ljapunovschen Stabilitätstheorie basierenden Entwicklungen zeigen nun (siehe Blechman 1971, 1981; Sperling, 1967), daß die Bewegungen nicht für alle Lösungen der Existenzbedingungen stabil sind. Im Falle der äußeren Synchronisation gehört zu einer Lösung der Existenzbedingungen eine eindeutige und asymptotisch stabile Bewegung, wenn für sie alle Wurzeln der algebraischen Gleichung m -ten Grades in λ

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha^T} - \lambda \mathbf{E}_m\right) = 0 \quad (89)$$

mit

$$\mathbf{P} = [P_1 P_2 \dots P_m]^T \quad \alpha = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m]^T$$

und \mathbf{E}_m als der $m \times m$ -Einheitsmatrix negative Realteile haben.

Bei Vorhandensein auch nur einer Wurzel mit positivem Realteil ist die Bewegung instabil; der Fall verschwindender oder rein imaginärer Wurzeln erfordert im allgemeinen eine zusätzliche Untersuchung.

Es sei bemerkt, daß die Stabilitätsbedingungen eigentlich für das Gesamtsystem einschließlich des Schwingungssystems entwickelt werden müßten. Nach Blechman (1971) sind die zusätzlichen, dem Schwingungssystem zugeordneten Stabilitätsbedingungen aber ohne praktische Bedeutung.

Im vorliegenden Falle der inneren Synchronisation folgt, weil die Existenzbedingungen nur von den Phasendifferenzen abhängen:

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = P_i(\alpha_1 + \alpha_0, \dots, \alpha_m + \alpha_0) \quad (90)$$

mit α_0 als einer beliebigen Konstanten.

Damit erhält man

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial P_i}{\partial \alpha_0} = 0 \quad i = 1(1)m \quad (91)$$

bzw.

$$\det \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \alpha^T} = 0 \quad (92)$$

(Nach Gleichung (91) verschwinden die Summen aller Zeilen.)

Demzufolge hat Gleichung (89) eine Wurzel $\lambda = 0$. Von dieser Wurzel wird jedoch nach einem Satz von Andronov und Vitt die Frage nach der Stabilität nicht berührt. Man kann den Grad der Gleichung (89) im vorliegenden Falle um 1 erniedrigen. Dazu hat man zunächst die letzte Zeile von allen übrigen zu subtrahieren und anschließend die ersten $m-1$ Spalten zur letzten zu addieren. Damit verschwinden alle Elemente der letzten Spalte bis auf das Element $(-\lambda)$ auf der Position (m,m) .

Zur Bestimmung der $m-1$ interessierenden Wurzeln verbleibt die Gleichung

$$\det\left(\frac{\partial \mathbf{P}^*}{\partial \boldsymbol{\alpha}^{*T}} - \lambda \mathbf{E}_{m-1}\right) = 0 \quad (93)$$

mit

$$\mathbf{P}^* = [P_1 \quad -P_m \quad \dots \quad P_{m-1} \quad -P_m]^T \quad \boldsymbol{\alpha}^* = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{m-1}]^T \quad (94)$$

4 Zusammenfassung

Für einen statisch und dynamisch unwichtigen starren Rotor, dessen Achse starr mit den translatorischen und rotatorischen Bewegungen eines beliebigen Schwingungssystems im Durchstoßpunkt der Rotorachse durch die den Massenmittelpunkt des Rotors enthaltende Ebene senkrecht zur Rotorachse gekoppelt ist, werden die aus der kinetischen Energie des Rotors folgenden, in den Koordinaten des Schwingungssystems linearisierten Anteile der Bewegungsgleichungen des Rotors und des Schwingungssystems hergeleitet. Anschließend werden die Existenzbedingungen (88) für die selbstsynchronisierte Bewegung von m solchen Rotoren entwickelt, wobei die wesentlichen Vibrationsmomente (83) aus den Bewegungsgleichungen der Gestalt (45) mit (46) für die Rotoren folgen. Für die Stabilität sind die Wurzeln der Gleichung (93) maßgebend.

Im demnächst erscheinenden Teil II der vorliegenden Arbeit werden zunächst die Vibrationsmomente unter Verwendung sogenannter harmonischer Einflußkoeffizienten für lineare Schwingungssysteme weiterentwickelt. Dabei wird die stationäre Bewegung des Schwingungssystems unter der Annahme kleiner Rotormassen infolge der vereinfachten Beziehungen (63) und (64) für die erregenden Kräfte und Momente berechnet. Abschließend wird die Berechnungsvorschrift an einfachen Beispielen demonstriert.

Anhang

Es werden die Zwischenergebnisse zur Herleitung der Beziehungen (57) bis (62) angegeben. Steht μ jeweils für x , y oder z , so folgt aus den Gleichungen (29) und (34)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \dot{r}_\mu} &= \mathbf{e}_\mu^T \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_\mu} &= \frac{\partial T_u}{\partial \dot{r}_\mu} \approx m \left[\dot{r}_\mu + \mathbf{e}_\mu^T \dot{\psi} \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} \mathbf{e}_\mu^T (\mathbf{E} + \tilde{\psi}) \boldsymbol{\tau} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_x} &\approx m \left[\dot{r}_x - \dot{\psi}_z \mathbf{e}_y^T \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} (\mathbf{e}_x^T - \psi_z \mathbf{e}_y^T) \boldsymbol{\tau} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_x} &= m \left[\dot{r}_x - \varepsilon_y (\dot{\phi} + \dot{\psi}_z) - \varepsilon_x \dot{\phi} \psi_z \right] \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_y} &\approx m \left[\dot{r}_y + \dot{\psi}_z \mathbf{e}_x^T \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} (\mathbf{e}_y^T + \psi_z \mathbf{e}_x^T) \boldsymbol{\tau} \right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_y} &= m \left[\dot{r}_y + \varepsilon_x (\dot{\phi} + \dot{\psi}_z) - \varepsilon_y \dot{\phi} \psi_z \right] \end{aligned} \quad (A2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_z} &\approx m\left[\dot{r}_z + (-\dot{\psi}_y \mathbf{e}_x^T + \dot{\psi}_x \mathbf{e}_y^T)\boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi}(-\psi_y \mathbf{e}_x^T + \psi_x \mathbf{e}_y^T)\boldsymbol{\tau}\right] \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{r}_x} &= m\left[\dot{r}_x - \varepsilon_x(\dot{\psi}_y - \dot{\phi}\psi_x) + \varepsilon_y(\dot{\psi}_x + \dot{\phi}\psi_y)\right]\end{aligned}\quad (\text{A3})$$

Wegen

$$\frac{\partial T}{\partial r_\mu} = 0$$

erhalt man aus den Gleichungen (A1), (A2) und (A3) unmittelbar die Beziehungen (57), (58) und (59).

Analog folgt aus den Gleichungen (29) und (34)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \dot{\psi}_\mu} &= \boldsymbol{\varepsilon}^T \left[-\tilde{\mathbf{e}}_\mu + \frac{1}{2}(\tilde{\psi} \tilde{\mathbf{e}}_\mu + \tilde{\mathbf{e}}_\mu \tilde{\psi}) \right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_\mu} &\approx m\boldsymbol{\varepsilon}^T \left\{ -\tilde{\mathbf{e}}_\mu \left[\dot{\mathbf{r}} + \dot{\psi} \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi} \right) \boldsymbol{\tau} \right] + \frac{1}{2} \dot{\phi} \tilde{\psi} \tilde{\mathbf{e}}_\mu \boldsymbol{\tau} \right\} \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_x} &\approx m\boldsymbol{\varepsilon}^T \left[\mathbf{e}_y \left(\dot{r}_z - \varepsilon_x \dot{\psi}_y + \varepsilon_y \dot{\psi}_x + \frac{1}{2} \dot{\phi} \varepsilon_y \psi_y \right) + \frac{1}{2} \mathbf{e}_x \dot{\phi} \varepsilon_x \psi_y \right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_x} &= m \left(\varepsilon_y \dot{r}_z + \varepsilon_y^2 \dot{\psi}_x - \varepsilon_x \varepsilon_y \dot{\psi}_y + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dot{\phi} \psi_y \right) \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_y} &\approx m\boldsymbol{\varepsilon}^T \left[-\mathbf{e}_x \left(\dot{r}_z - \varepsilon_x \dot{\psi}_y + \varepsilon_y \dot{\psi}_x + \frac{1}{2} \dot{\phi} \varepsilon_x \psi_x \right) - \frac{1}{2} \mathbf{e}_y \dot{\phi} \varepsilon_y \psi_x \right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_y} &= m \left(-\varepsilon_x \dot{r}_z - \varepsilon_x \varepsilon_y \dot{\psi}_x + \varepsilon_x^2 \dot{\psi}_y - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \dot{\phi} \psi_x \right) \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_z} &\approx m\boldsymbol{\varepsilon}^T \left[\mathbf{e}_x (\dot{r}_y + \varepsilon_x \dot{\psi}_z + \dot{\phi} \varepsilon_x) - \mathbf{e}_y (\dot{r}_x - \varepsilon_y \dot{\psi}_z - \dot{\phi} \varepsilon_y) \right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_z} &= m \left[-\varepsilon_y \dot{r}_x + \varepsilon_x \dot{r}_y + \varepsilon^2 (\dot{\phi} + \dot{\psi}_z) \right] \\ \frac{\partial \mathbf{v}_a^T}{\partial \dot{\psi}_\mu} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T (\tilde{\mathbf{e}}_\mu \dot{\psi} + \dot{\psi} \tilde{\mathbf{e}}_\mu) + \dot{\phi} \boldsymbol{\tau}^T \left[-\tilde{\mathbf{e}}_\mu + \frac{1}{2} (\tilde{\mathbf{e}}_\mu \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \tilde{\mathbf{e}}_\mu) \right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_\mu} &\approx m \left[-\dot{\phi} \boldsymbol{\tau}^T \tilde{\mathbf{e}}_\mu \left(\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \dot{\psi} \boldsymbol{\varepsilon} + \dot{\phi} \boldsymbol{\tau} \right) + \frac{1}{2} \dot{\phi} \boldsymbol{\varepsilon}^T \tilde{\mathbf{e}}_\mu \dot{\psi} \boldsymbol{\tau} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_x} &= m\dot{\varphi}\left(\varepsilon_x \dot{r}_z - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \dot{\psi}_y\right) \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_y} &\approx m\dot{\varphi}\tau^T\left[-\mathbf{e}_x\left(\dot{r}_z + \frac{1}{2}\varepsilon_x \dot{\psi}_x\right) + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y \varepsilon_x \dot{\psi}_x\right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_y} &= m\dot{\varphi}\left(\varepsilon_y \dot{r}_z + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \dot{\psi}_x\right) \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_z} &\approx m\dot{\varphi}\tau^T\left[\mathbf{e}_x(\dot{r}_y + \dot{\varphi}\varepsilon_x) - \mathbf{e}_y(\dot{r}_x - \dot{\varphi}\varepsilon_y)\right] \\ \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_z} &= -m\dot{\varphi}(\varepsilon_x \dot{r}_x + \varepsilon_y \dot{r}_y)\end{aligned}$$

Damit erhält man die translatorischen Anteile der Beziehungen (60), (61) und (62) zu

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_x} - \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_x} = m\left[\varepsilon_y \ddot{r}_z + \varepsilon_y^2 \ddot{\psi}_x - \varepsilon_x \varepsilon_y \ddot{\psi}_y + 2\dot{\varphi}(\varepsilon_x \varepsilon_y \dot{\psi}_x + \varepsilon_y^2 \dot{\psi}_y) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ddot{\varphi} \psi_y\right] \quad (\text{A4})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_y} - \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_y} = m\left[-\varepsilon_x \ddot{r}_z - \varepsilon_x \varepsilon_y \ddot{\psi}_x + \varepsilon_x^2 \ddot{\psi}_y - 2\dot{\varphi}(\varepsilon_x^2 \dot{\psi}_x + \varepsilon_x \varepsilon_y \dot{\psi}_y) - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \ddot{\varphi} \psi_x\right] \quad (\text{A5})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{tr}}{\partial \dot{\psi}_z} - \frac{\partial T_{tr}}{\partial \psi_z} = m\left[-\varepsilon_y \ddot{r}_x + \varepsilon_x \dot{r}_y + \varepsilon^2(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}_z)\right] \quad (\text{A6})$$

Aus (31) folgt

$$\frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}_\mu} = \mathbf{e}_\mu^T \Phi \mathbf{J} \Phi^T \dot{\psi} + \dot{\varphi} \mathbf{e}_\mu^T \left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}\right) \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}_\mu} = \mathbf{e}_\mu^T \left\{ \Phi \mathbf{J} \Phi^T \ddot{\psi} + \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} (\Phi \mathbf{J} \Phi^T) \dot{\psi} + \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}\right) \left(\ddot{\varphi} \Phi + \dot{\varphi}^2 \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} \dot{\varphi} \dot{\psi} \Phi \right] \mathbf{J} \mathbf{e}_z \right\}$$

$$\frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi_\mu} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \dot{\psi}^T \tilde{\mathbf{e}}_\mu \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z = -\frac{1}{2} \mathbf{e}_\mu^T \dot{\varphi} \dot{\psi} \Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\psi}_\mu} - \frac{\partial T_{rot}}{\partial \psi_\mu} = \mathbf{e}_\mu^T \left\{ \Phi \mathbf{J} \Phi^T \ddot{\psi} + \dot{\varphi} \frac{d}{d\varphi} (\Phi \mathbf{J} \Phi^T) \dot{\psi} + \left[\left(\mathbf{E} + \frac{1}{2} \tilde{\psi}\right) \left(\ddot{\varphi} \Phi + \dot{\varphi}^2 \frac{d\Phi}{d\varphi} \right) + \dot{\varphi} \dot{\psi} \Phi \right] \mathbf{J} \mathbf{e}_z \right\} \quad (\text{A7})$$

Unter Berücksichtigung von

$$\Phi \mathbf{J} \Phi^T = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\frac{d}{d\varphi} (\Phi \mathbf{J} \Phi)^T = \begin{bmatrix} -2J_{xy} & J_{xx} - J_{yy} & -J_{yz} \\ J_{xx} - J_{yy} & 2J_{xy} & J_{xz} \\ -J_{yz} & J_{xz} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Phi \mathbf{J} \mathbf{e}_z = [J_{xz} \quad J_{yz} \quad J_{zz}]^T$$

$$\frac{d\Phi}{d\varphi} \mathbf{J} \mathbf{e}_z = [-J_{yz} \quad J_{xz} \quad 0]^T$$

erhält man aus Gleichung (A7) die rotatorischen Anteile der Beziehungen (60), (61) und (62).

Literatur

1. Blechman, I. I.: Synchronisation dynamischer Systeme (russ.), Nauka, Moskau, (1971).
2. Blechman, I. I.: Synchronisation in Natur und Technik (russ.), Nauka, Moskau, (1981).
3. Chodźaev, K. S.: Synchronisation mechanischer, mit einem linearen Schwingungssystem verbundener Vibratoren (russ.), Inženernyj žurnal Mehanika tverdogo tela (MTT), 2, Nr. 4, (1967) 14-24.
4. Jordan, H.; Mahrenholtz, O.; Röder, G.; Weis, M.: Bedingungen für den selbsttätigen synchronen Betrieb von Wuchtmassenerregern, Industrie-Anzeiger, 89, 86, (1967), 25-28.
5. Kirnarskij, M. S.: Synchronisation gyroskopischer Erzeuger einer "Dyname" (russ.), "Mašiny i mehanizmy vibroudarnogo dejstvija". Arbeiten des Novosibirsker Elektrotechnischen Institutes, 1, Novosibirsk 1969.
6. Mahrenholtz, O.: Synchronisieren von rotierenden Unwuchtmassen, Akustik und Schwingungstechnik, Plenarvorträge und Kurzreferate der VDI-Gemeinschaftstagung, Berlin (1970), 469-477.
7. Nour-Omid, B.; Rankin, C. C.: Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, Computer Meth. in Appl. Mech. and Eng., 93, (1991), 353-384.
8. Sperling, L.: Beitrag zur allgemeinen Theorie der Selbstsynchronisation umlaufender Unwuchtmassen im Nichtresonanzfall, Wiss. Z. d. TH O.v.G. Magdeburg, 11, 1, (1967) 63-87. Gleichnamige Dissertation, TH Magdeburg 1966.
9. Strogatz, S. H.; Stewart, I.: Coupled Oscillators and Biological Synchronization: Scientific American, Vol. 269, No. 6, (1993), 102-109.

Anschrift: Professor Dr.-Ing.habil. Lutz Sperling, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg.