

Der Zentrifugalimpuls als zusätzliche Koordinate bei der Alternativfassung der Lagrangeschen Gleichung

F.P.J. Rimrott

Mechanische Systeme lassen sich sowohl mittels der allgemein üblichen verallgemeinerten Verschiebungskoordinaten als auch alternativ durch verallgemeinerte Impulskoordinaten beschreiben. Die Bewegungsgleichungen lassen sich dann durch Verwendung Lagrangescher Gleichungen aufstellen. Bei der alternativen Fassung führt das Auftreten einer Zentrifugalkraft zu einer nichtholonomen Bindung, die in der vorliegenden Arbeit im einzelnen untersucht wird.

1 Einleitung

Bei der alternativen Fassung der Lagrangeschen Gleichung wird unangenehmerweise schon die immerhin verhältnismäßig oft auftretende Zentrifugalkraft durch eine nichtholonome Bindung gekennzeichnet. Im folgenden ist eine allgemeine Beschreibung des Auftretens dieser nichtholonomen Bindung gegeben und der Fall untersucht, für den diese Bindung holonom wird. Um die Beschreibungen möglichst einfach zu halten seien die nachfolgenden Betrachtungen auf lediglich aus Punktmassen und Federn zusammengesetzte mechanische Systeme beschränkt. Bei der Herleitung der allgemein gültigen Gleichungen sind der Vollständigkeit halber allerdings auch nichtkonservative Kraftelemente (Dämpfer) berücksichtigt.

2 D'Alembertsches Prinzip

In seiner üblichen Fassung lautet das D'Alembertsche Prinzip

$$\delta W_1 = (\mathbf{F}_k - \dot{\mathbf{B}}_k) \cdot \delta \mathbf{r}_k = 0 \quad (1)$$

wobei δW_1 die virtuelle Arbeit erster Art ist, \mathbf{F}_k die an der k -ten Punktmasse angreifende resultierende Kraft, \mathbf{B}_k der Bewegungsschwung der k -ten Punktmasse und $\delta \mathbf{r}_k$ die virtuelle Verschiebung der k -ten Punktmasse. Die virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{r}_k$ muß den Kompatibilitätsbedingungen des Systems genügen.

Gleichung (1) läßt sich auch mittels verallgemeinerter Verschiebungen q_i ausdrücken und lautet dann

$$\delta W_1 = \left(Q_i - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right) \right) \delta q_i = 0 \quad (2)$$

wobei $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q'_i$ die an der i -ten Masse angreifende verallgemeinerte Kraft der benachbarten Kraftelemente ist. Die Größe V ist die *potentielle Energie* des Systems. Die Größe Q'_i ist eine nicht in der potentiellen Energie V enthaltene Kraft.

Die Größe

$$p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} \quad (3)$$

ist der verallgemeinerte Bewegungsschwung der i -ten Punktmasse (Tabelle 1).

Die Größe T^* ist die *kinetische Koenergie*

$$T^* = \int \mathbf{B}_k \cdot d\mathbf{v}_k \quad (4)$$

während das später auftretende T die zu (4) komplementäre *kinetische Energie* ist, mit

$$T = \int \mathbf{v}_k \cdot d\mathbf{B}_k \quad (5)$$

wobei

\mathbf{B}_k = Bewegungsschwung der k -ten Punktmasse

\mathbf{v}_k = Geschwindigkeit der k -ten Punktmasse

Der in Gleichung (2) in großen Klammern erscheinende Ausdruck gleich null gesetzt, stellt die bekannte *Lagrangesche Bewegungsgleichung* dar, die für konservative mechanischen Systeme die folgende Standardform hat

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (6)$$

wobei

$$L = L(q, \dot{q}, t) = T^*(q, \dot{q}, t) - V(q, t) \quad (7)$$

die *Lagrangesche Funktion* ist. Der Vollständigkeit sei noch hinzugefügt, daß beim Vorhandensein einer nicht in der potentiellen Energie V enthaltenen verallgemeinerten Kraft Q'_i Gleichung (6) die Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i \quad (8)$$

annimmt.

Wenn anstelle virtueller Verschiebungen $\delta \mathbf{r}_k$ virtuelle Impulse $\delta \mathbf{I}_l$ zur Beschreibung der virtuellen Arbeit eines Systems Verwendung finden, dann erhält man die komplementäre Alternativform des D'Alembertschen Prinzips (Rimrott, 1993)

$$\delta W_{II} = (\mathbf{v}_l - \dot{\mathbf{u}}_l) \cdot \delta \mathbf{I}_l = 0 \quad (10)$$

wobei δW_{II} die virtuelle Arbeit zweiter Art ist, \mathbf{v}_l die an der l -ten Feder angreifende resultierende Geschwindigkeit, \mathbf{u}_l die Längenänderung der l -ten Feder und $\delta \mathbf{I}_l$ der virtuelle Impuls der l -ten Feder. Der virtuelle Impuls $\delta \mathbf{I}_l$ muß den Gleichgewichtsbedingungen des Systems genügen.

Für das in Bild 1 gezeigte System als Beispiel gilt $k = 1, 2$ und $l = 1, 2, 3$.

Gleichung (10) läßt sich auch mittels verallgemeinerter Impulse S_j ausdrücken und lautet dann

$$\delta W_{II} = (s_j - \dot{e}_j) \delta S_j = 0 \quad (11)$$

wobei

$$s_j = \frac{\partial T}{\partial S_j} + s'_j \quad (12)$$

die am j -ten Kraftelement angreifende Geschwindigkeit (der benachbarten Massenelemente) ist. Die Größe s'_j stellt eine nicht in der kinetischen Energie T enthaltene Geschwindigkeit dar.

Veränderliche	
Verallgemeinerte Verschiebungen q_i (der Punktmassen) <i>Müssen Kompatibilitätsbedingungen erfüllen!</i>	Verallgemeinerte Impulse S_j (der Kraftelemente) <i>Müssen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen!</i>
Verallgemeinerte Geschwindigkeiten (der Punktmassen) $\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i$	Verallgemeinerte Kräfte (der Kraftelemente) $\dot{S}_j = \frac{d}{dt} S_j$
Dazugehörige Energien und Koenergien	
$V = V(q, t)$	$T = T(S, \dot{S}, t)$
$T^* = T^*(q, \dot{q}, t)$	$V^* = V^*(\dot{S}, t)$
Lagrangesche Funktion	
$L = T^* - V$	$L^* = T - V^*$
Lagrangesche Gleichung	
$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i$	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} + s'_j - \dot{e}'_j$
Tabarokische Gleichung	
	$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = s'_j - \dot{e}'_j$ wenn $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} = 0$
Verallgemeinerte Bewegungsschwünge (der Punktmassen) $p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}$	Verallgemeinerte Verschiebungen \ddagger (der Kraftelemente) $e_j = -\frac{\partial V^*}{\partial \dot{S}_j} + e'_j$
Verallgemeinerte Kräfte \dagger (auf Punktmassen eingepägt) $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q'_i$	Verallgemeinerte Geschwindigkeiten $\ddagger\ddagger$ (auf Kraftelemente eingepägt) $s_j = \frac{\partial T}{\partial S_j} + s'_j$
D'Alembertsches Prinzip	
$\left[Q_i - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0$	$[s_j - \dot{e}'_j] \delta S_j = 0$

† Die Größe Q'_i ist derjenige Teil der verallgemeinerten Kraft Q_i , der nicht in der potentiellen Energie enthalten ist (z.B. eine Dämpferkraft)

†† Die Größe e'_j ist derjenige Teil der verallgemeinerten Verschiebung e_j , der nicht in der potentiellen Koenergie enthalten ist (z.B. eine Starrkörperverschiebung oder eine Dämpferverschiebung)

††† Die Größe s'_j ist derjenige Teil der verallgemeinerten Geschwindigkeit s_j , der nicht in der kinetischen Energie enthalten ist (z.B. Geschwindigkeit eines Punktes ohne Masse)

Tabelle 1. Gegenüberstellung von Verschiebungs- und Impulsfassung

Die Größe

$$e_j = -\frac{\partial V^*}{\partial \dot{s}_j} + e'_j \quad (13)$$

ist die verallgemeinerte Längenänderung (Extension) des j -ten Kraftelements. Die Größe e'_j stellt eine nicht in der potentiellen Koenergie V^* enthaltene Extension dar.

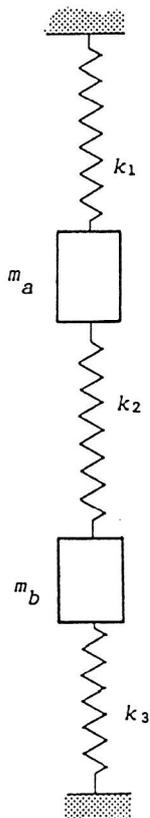


Bild 1. Mechanisches System mit 2 Verschiebungsfreiheitsgraden und 3 impulsiven Freiheitsgraden

Die Größe V^* ist die potentielle Koenergie

$$V^* = \int \mathbf{r} \cdot d\mathbf{F} \quad (14)$$

während das bereits in Gleichung (2) erschienene V die potentielle Energie ist, für welche

$$V = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (15)$$

gilt.

Der in Gleichung (11) in Klammern erscheinende Ausdruck gleich null gesetzt, ergibt, als Gegenstück zu Gleichung (8), die folgende Bewegungsgleichung

$$-\frac{d}{dt} \frac{\partial V^*}{\partial \dot{s}_j} - \frac{\partial T}{\partial s_j} = s'_j - \dot{e}'_j \quad (16)$$

ein Ergebnis, das nicht gerade dazu einlädt, eine Kombination der in Gleichung (7) verwendeten Art anzustreben. Trotzdem wird dies in der Praxis oft getan und soll daher im folgenden Abschnitt näher untersucht werden.

3 Alternativform der Lagrangeschen Gleichung

Verständlicherweise liegt die Versuchung nahe, eine Alternativform der Lagrangeschen Gleichung (8) aufzustellen. Führt man eine Komplementärfunktion zu Gleichung (7), nämlich

$$L^*(S, \dot{S}, t) = T(S, \dot{S}, t) - V^*(\dot{S}, t) \quad (17)$$

ein und setzt den in der Klammer von Gleichung (11) stehenden Ausdruck zu null, dann erhält man

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} + s'_j - e'_j \quad (18)$$

eine offensichtlich unangemessene Komplikation von Gleichung (16), da der auf der rechten Seite erscheinende Term $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j}$ ja nur dazu dient, denselben, in L^* versteckten Term auf der linken Seite aufzuheben.

Gleichung (18) wird erst dann interessant, wenn

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} = 0 \quad (19)$$

ein Umstand, der verhältnismäßig oft eintritt. Dann liegt ein *Tabarroksches* System vor und es gilt die von Tabarrok (1986) angegebene Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = s'_j - e'_j \quad (20)$$

mit

$$L^*(S, \dot{S}, t) = T(S, t) - V^*(\dot{S}, t) \quad (21)$$

die z. B. für solche Fälle gilt, bei denen die kinetische Energie T nicht expliziert von \dot{S} abhängt. Die vorliegende Arbeit ist jedoch der Beschreibung eines nichttabarrokschen Systems gewidmet, für welche wir die Alternativform (18) der Lagrangeschen Gleichung heranziehen oder die viel einfachere Gleichung (16).

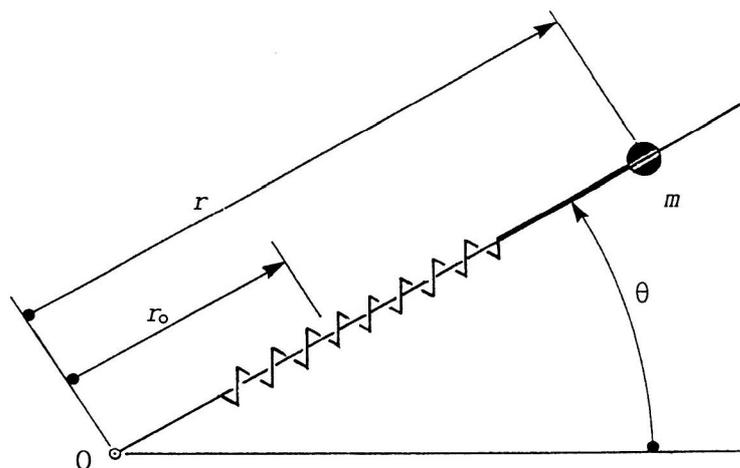


Bild 2. Horizontal rotierendes System

4 Rotierendes System mit nichtholonomer Bindung

In Bild 2 ist ein einfaches rotierendes System gezeigt. Seine Beschreibung mittels verallgemeinerter Impulsveränderlicher wird erst durch die Einführung einer zusätzlichen dritten Veränderlichen ermöglicht, die durch eine nichtholonome Bindung gekennzeichnet ist.

Wir verwenden als verallgemeinerte Impulse

$$S_1 = S_r \quad (22a)$$

$$S_2 = S_\theta = mr^2\dot{\theta} \quad (22b)$$

$$S_3 \quad (22c)$$

Ferner sei

$$\dot{S}_r = -k(r - r_0) \quad = \text{Federkraft} \quad (23a)$$

$$\dot{S}_\theta \quad = \text{Drehmoment} \quad (23b)$$

$$\dot{S}_3 = mr\dot{\theta}^2 \quad = \text{Zentrifugalkraft} \quad (23c)$$

Die verallgemeinerten Impulse müssen untereinander die Gleichgewichtsbedingung erfüllen. Diese sei als

$$m\dot{r} - mr\dot{\theta}^2 + k(r - r_0) = 0 \quad (24)$$

bekannt, woraus wir schließen, daß

$$m\dot{r} = \dot{S}_r + \dot{S}_3 \quad (25)$$

und

$$m\dot{r} = S_r + S_3 \quad (26)$$

bei verschwindender Integrationskonstante ist.

Die kinetische Koenergie des Systems von Bild 2 sei bekannt als

$$T^* = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} mr^2\dot{\theta}^2 \quad (27)$$

Da $T = T^*$ für Newtonsche Systeme können wir die verallgemeinerten Impulse (22) als neue Veränderliche einführen und erhalten dann für die kinetische Energie

$$T = T(S, \dot{S}) = \frac{1}{2} \frac{(S_r + S_3)^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{k^2 S_q^2}{m(kr_0 - \dot{S}_r)^2} \quad (28)$$

Die potentielle Koenergie des Systems ist

$$V^* = V^*(\dot{S}) = \frac{1}{2} \frac{\dot{S}_r^2}{k} \quad (29)$$

5 Nichtholonome Bindung

Als nächstes erhebt sich die Frage, ob eine Bindung zwischen den drei Variablen S_r , S_θ , S_3 besteht.

Dies ist der Fall. Die Zentrifugalkraft läßt sich in der Tat schreiben als

$$\dot{S}_3 = \frac{k^3 S_\theta^2}{m(kr_0 - \dot{S}_r)^3} \quad (30)$$

wie man unter Heranziehen von Gleichungen (22b), (23a) und (23c) feststellt. Gleichung (46) stellt eine *nichtholonome* Bindung dar, welche dazu noch *nichtlinear* ist.

Die Erstellung von drei Bewegungsgleichungen, aus Gleichung (16) für S_r , aus Gleichung (23b) für S_θ sowie aus Gleichung (30), ist somit möglich und ergibt für den in Bild 1 dargestellten Fall

$$\frac{\dot{S}_r}{k} + \frac{S_r}{m} + \frac{S_3}{m} = 0 \quad (31a)$$

$$S_\theta = \text{konstant} \quad (31b)$$

$$\dot{S}_3 - \frac{k^3 S_\theta^2}{m(kr_o - \dot{S}_r)^3} = 0 \quad (31c)$$

Damit ist die Aufgabe der Erstellung von Bewegungsgleichungen gelöst. Es sei noch bemerkt, daß jedes Glied in Gleichung (31a) eine Geschwindigkeit darstellt. Gleichung (31a) ist also eine Kompatibilitätsaussage.

6 Holonome Bindung

Als letztes stellen wir nun noch die Frage, ob und wann die nichtholonome Bindung (30) integrierbar ist und dann zu einer leichter handzuhabenden *holonomen* Bindung wird. Gleichung (30) ist in der Tat dann integrierbar, wenn das auf Bild 2 gezeigte System mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\theta} = \omega_\theta$ umläuft.

Zunächst ziehen wir Gleichung (16) für S_θ heran.

$$0 = \frac{\partial T}{\partial S_\theta} + s'_j - e'_j \quad (32)$$

mit $s'_\theta = 0$ und $e'_\theta = \dot{\theta} = \omega_\theta$, einer zur nicht in der potentiellen Koenergie (29) erscheinenden Koordinate S_θ gehörenden Geschwindigkeit.

Gleichungen (22b) und (32) zusammen führen zu

$$S_\theta = \frac{m\omega_\theta}{k^2}(kr_o - \dot{S}_r)^2 \quad (33)$$

Verwendung des Ergebnisses (33) in Gleichung (30) führt zu

$$\dot{S}_3 = \frac{m\omega_\theta^2}{k}(kr_o - \dot{S}_r) \quad (34)$$

welches sich zu einer holonomen Bindung

$$S_3 = \frac{m\omega_\theta^2}{k}(kr_o t - S_r) \quad (35)$$

integrieren läßt, wobei $t_o = 0$ gesetzt worden ist.

Mit Hilfe der holonomen Bindung (35) und des bereits verwendeten Ergebnisses (34), lassen sich die kinetische Energie

$$T = T(S, \dot{S}, t) = \frac{1}{2m} \left(\left(1 - \frac{m\omega_\theta^2}{k} \right) S_r + mr_o \omega_\theta^2 t \right)^2 + \frac{1}{2k} \frac{m\omega_\theta^2}{k} (kr_o - \dot{S}_r)^2 \quad (36)$$

sowie die potentielle Koenergie bestimmen.

$$V^* = V^*(\dot{S}) = \frac{1}{2k} \dot{S}_r^2 \quad (37)$$

Eine Anwendung von Gleichung (16) mit $s'_r = \dot{e}'_r = 0$ ergibt dann eine Bewegungsgleichung.

$$\frac{\ddot{S}_r}{k} + \left(1 - \frac{m\omega_\theta^2}{k}\right) \frac{S_r}{m} = -r_o \omega^2 t \quad (38)$$

Jedes Glied dieser Gleichung stellt eine Translationsgeschwindigkeit dar. Die Gleichung selbst ist also eine Kompatibilitätsaussage.

An sich könnten wir unsere Aufgabe mit der Aufstellung der Bewegungsgleichung (38) als beendet betrachten. Zum anderen ist die Lösung der Bewegungsgleichung (38) jedoch so einfach, daß wir diese noch schnell betrachten wollen. Als Lösung von Gleichung (38) ergibt sich

$$S_r = A \sin \omega_n t + B \cos \omega_n t - \frac{k}{k - m\omega_\theta^2} m r_o \omega_\theta^2 t \quad (39)$$

mit

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k - m\omega_\theta^2}{m}}$$

Die Federkraft \dot{S}_r erhält man durch Ableitung von Gleichung (39) nach der Zeit. Der Drehimpuls S_θ läßt sich dann aus Gleichung (33) bestimmen und das zur Aufrechterhaltung von $\omega_\theta = \text{konstant}$ notwendige Drehmoment \dot{S}_θ durch Ableitung nach der Zeit. Schließlich kann man den Zentrifugalimpuls S_3 und die Zentrifugalkraft \dot{S}_3 als Funktion der Zeit angeben, indem man Gleichungen (39), (35) und (34) heranzieht.

7 Zusammenfassung

Zunächst ist gezeigt worden, daß das Auftreten der Zentrifugalkraft in rotierenden mechanischen Systemen zu einer nichtholonomen Bindung führt, wenn die Impulsfassung zur Beschreibung des Systems herangezogen wird. Dann ist gezeigt, daß die Bindung bei konstanter Winkelgeschwindigkeit holonom wird und zu einer erheblichen Vereinfachung der Beschreibung führt, so daß für den praktisch sehr wichtigen Fall von Systemen mit konstanter Winkelgeschwindigkeit die Verwendung der Impulsfassung ohne mathematische Komplikation möglich ist.

Förderung

Die vorliegende Arbeit wurde vom Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Sachsen-Anhalt im Rahmen des Projekts "Zusammenfassende Auswertung von Theorie und Versuch des Verhaltens dissipativer drehmomentfreier symmetrischer Festkörperkreisel" gefördert (FKZ 1105A02110023).

Literatur

1. Rimrott, F.P.J.; Tabarrok, B.: Conventional and Complementary Variational Formulation in Dynamics. Proceedings, COBEM '93, Brasilia, 29-32.
2. Tabarrok, B.: Variational Methods in Dynamics. Lecture Notes, University of Toronto, (1986).

Anschrift: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. F.P.J. Rimrott, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg