

# Wölbkrafttorsion und Querkraftschubspannungen in einem Balken bei FE-Diskretisierung seines Querschnitts

S. Koczyk

*Die Beanspruchung eines Balkens durch Torsion und Querkraftschub führt bei beliebiger Querschnittsform auf eine Verwölbung seiner Querschnittsfläche. Diese zunächst noch unbekannte Verwölbung wird mittels einer Finite-Elemente-Diskretisierung des Querschnitts bestimmt. Man erhält daraus die Verteilung der Schubspannungen für eine beliebige Querschnittsform, wobei diese im Falle des Querkraftschubes nur eine Näherung darstellt, da die Veränderung der Querschnittsform nicht berücksichtigt wird. Es wird ferner die Verteilung der Normalspannungen und der Zusatzschubspannungen bei Wölbbehinderung angegeben.*

## 1 Allgemeines

Die Berechnung der Torsions- und Querkraftschubspannungen in einem Balken wird häufig immer noch auf der Grundlage bestimmter Näherungsverfahren ausgeführt, die in der Regel an eine bestimmte Form des Querschnitts gebunden sind. Allgemein bekannt sind die Formeln für dünnwandige offene und geschlossene Profile, mit deren Hilfe man globale Größen wie Torsionssteifigkeit und Wölbwiderstand recht genau bestimmen kann. Die Verteilung der Schubspannungen kann demgegenüber nur näherungsweise angegeben werden, und gerade an Querschnittsübergängen, wo Spannungsspitzen zu erwarten sind, versagen diese Verfahren.

Das Problem der St.-Venantschen Torsion wurde auf der Grundlage der Wölbfunktion schon früher behandelt (Koczyk, 1991). In der vorliegenden Arbeit wird die Bestimmung der Querkraftschubspannungen verallgemeinert. Wie allgemein bekannt, bestimmt man einen Mittelwert  $\tau_m$  in einer beliebigen Schnittlinie des Querschnitts nach einer Gleichgewichtsbetrachtung aus der Formel

$$\tau_m(F_{qy}) = \frac{F_{qy} \cdot S_x}{I_{xx} \cdot b} \quad (1)$$

Dabei sind  $F_{qy}$  die Querkraft,  $I_{xx}$  das Flächenträgheitsmoment bezogen auf die  $x$ -Achse des Querschnitts ( $x, y$  werden als Hauptachsen des Querschnitts vorausgesetzt.),  $S_x$  das statische Moment der Teilquerschnittsfläche und  $b$  die Breite des Querschnitts an der Stelle, wo die Schubspannung bestimmt werden soll. Eine entsprechende Beziehung gilt für  $F_{qx}$ .

Im allgemeinen ist der Einfluß der Querkraftschubspannungen auf das Festigkeitsverhalten eines Biegeträgers gering. Handelt es sich jedoch um einen Träger oder Balken, der aus mehreren Teilen zusammengefügt, geschweißt oder geklebt ist, so können die Schubspannungen an diesen Stellen durchaus wesentlich für sein Festigkeitsverhalten werden, und ihre genauere Bestimmung ist wünschenswert.

Man kann andererseits dieses Problem mit Hilfe der Methode der finiten Elemente und unter Verwendung echt räumlicher Elemente in einer ganz allgemeinen Weise lösen. Trotz der enormen Fortschritte in der Rechentechnik würde der Aufwand schon für ein relativ kleines Tragwerk unverhältnismäßig hoch, so daß der Balken nach wie vor das dominierende Element in der Baustatik bleibt.

Zwischen dem Problem der St.-Venantschen Torsion und dem der Bestimmung der Querkraftschubspannungen besteht ein enger Zusammenhang. Die Anwendung der Methode der finiten Elemente führt auf dieselbe Steifigkeitsmatrix bei beiden Lastfällen. Es unterscheiden sich lediglich die Lastvektoren. Die Lösung des Torsionsproblems ermöglicht also ganz nebenbei auch eine wesentlich genauere Berechnung der Querkraftschubspannungen. Die Kenntnis der Wölbfunktion des tordierten Stabes gestattet letztlich auch die Behandlung der Wölbbehinderung und damit der Wölbkrafttorsion. Die Ausgangsgleichungen der

Wölbkrafttorsion bleiben unverändert, aber das Sektorträgheitsmoment und damit der Wölbwiderstand sowie die Verteilung der Normalspannungen und der sekundären Schubspannungen erfolgen mit einer wesentlich höheren Genauigkeit.

## 2 Grundgleichungen und elastisches Potential

### 2.1 St.-Venantsche Torsion

Für einen Stab beliebiger Querschnittskontur (Bild 1) sei  $\varphi$  der Verdrehwinkel von Querschnitt B gegenüber A und  $\omega$  die Wölbfunktion. Für die Verschiebung eines beliebigen Punktes gilt unter der Voraussetzung kleiner Verformungen:

$$\begin{aligned} u_x &= -\frac{\varphi}{l} \cdot z \cdot y, \\ u_y &= \frac{\varphi}{l} \cdot z \cdot x, \\ u_z &= \frac{\varphi}{l} \cdot \omega(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

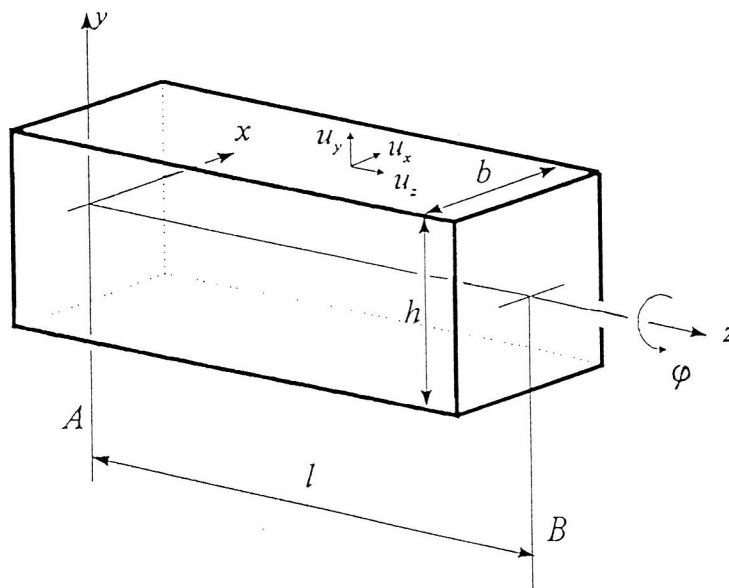


Bild 1. Koordinaten und Verschiebungen

Aus diesem Verschiebungsansatz folgt mit dem Gleitmodul  $G$  und dem Torsionsmoment  $M_t$  das elastische Potential zu

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\varphi^2}{l} \cdot \int_{(A)} G \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA - M_t \cdot \varphi \quad (3)$$

Die Variation des elastischen Potentials bezüglich  $\varphi$  führt bei konstantem Gleitmodul auf die bekannte Beziehung

$$\varphi = \frac{M_t l}{G I_t} \quad (4)$$

wobei das Torsionsträgheitsmoment  $I_t$  gemäß

$$I_t = \int_{(A)} \left[ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right] dA \quad (5)$$

berechnet werden kann, sobald die Wölbfunktion bekannt ist.

## 2.2 Querkraftschub

Die elementare Biegetheorie des Balkens benutzt auch im Falle der Querkraftbiegung die Bernoullische Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte, obwohl durch die Schubverzerrung der Querkraftschubspannungen eine Verwölbung des Querschnitts notwendigerweise erfolgt. Die Wirkung der Querkraftschubspannungen führt auch zu zusätzlichen Neigungen  $\gamma_{0x}$  und  $\gamma_{0y}$  der Stabachse. Diese werden im folgenden als konstant vorausgesetzt, weil sonst die Annahme der unverformten Querschnittskontur nicht mehr aufrechterhalten werden kann. Bezeichnet man die Verwölbung des Querschnitts infolge einer Querkraftbeanspruchung mit  $u_z$ , so gilt für die Verzerrungen insgesamt

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \gamma_{0x} \quad \text{und} \quad \gamma_{zy} = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \gamma_{0y} \quad (6)$$

Die Verwölbung  $u_z$  muß den Bedingungen

$$\begin{aligned} \int_{(A)} u_z(x, y) dA &= 0, \\ \int_{(A)} u_z(x, y) x dA &= 0, \\ \int_{(A)} u_z(x, y) y dA &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

genügen, die neben der Verhinderung einer Starrkörperbewegung Gleichungen zur Bestimmung von  $\gamma_{0x}$  und  $\gamma_{0y}$  liefern.

Die auf ein Stabelement bezogene elastische Energie der Schubverzerrung  $W_i$  führt dann auf den folgenden Ausdruck:

$$W_i = \frac{1}{2} \int_{(A)} G \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \gamma_{0x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \gamma_{0y} \right)^2 \right] dA \quad (8)$$

Da bei der Querkraftbiegung die Biegemomente und damit auch die Normalspannungen veränderlich sind, folgt eine Spannungsdifferenz  $d\sigma_z$  für beide Seiten des Balkenelementes, die bei einer Verwölbung des Querschnitts zu folgendem Ausdruck für die auf  $dz$  bezogene Arbeit führt:

$$W_a = \int_{(A)} u_z \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA \quad (9)$$

Ausgehend von der allgemeinen Formel für die Normalspannungen

$$\sigma_z = \frac{F_L}{A} + \frac{M_x I_{yy} + M_y I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} y + \frac{M_x I_{xy} + M_y I_{xx}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} x \quad (10)$$

und unter Berücksichtigung der bekannten statischen Beziehungen

$$F_{qx} = \frac{dM_y}{dz} \quad \text{und} \quad F_{qy} = \frac{dM_x}{dz} \quad (11)$$

folgt

$$W_a = \frac{F_{qx} I_{xx} + F_{qy} I_{xy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \int_{(A)} u_z x dA + \frac{F_{qx} I_{xy} + F_{qy} I_{yy}}{I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2} \int_{(A)} u_z y dA \quad (12)$$

Das elastische Potential folgt dann unter Berücksichtigung von Gleichungen (8) und (12) zu

$$\Pi = W_i - W_a \quad (13)$$

Die Verwölbung und damit auch die Querkraftschubspannungen ergeben sich hier als sekundäre Größen aus dem als bekannt vorausgesetzten Verlauf der Biegespannungen  $\sigma_z$ . Aufgrund dieser Vereinfachung können Querschnittsverwölbung und Querkraftschubspannungen nur näherungsweise angegeben werden. Eine genauere Analyse muß die Verformung des Querschnitts berücksichtigen, wie z. B. von Stickforth (1986) gezeigt wird. Eine analytische Lösung dieses elastizitätstheoretischen Problems gelingt nur für bestimmte Spezialfälle (Hahn, 1990). Die hier verwendeten Ansätze sichern jedoch aufgrund von (9) das Gleichgewicht an einem Stabelement. Unter der Voraussetzung kleiner Verformungen unterscheidet sich der exakte Verlauf der Querkraftschubspannungen von der im folgenden angegebenen Näherung nur durch einen zusätzlichen Eigenspannungszustand.

### 2.3 Die Potentialgleichung und deren Lösung

Im Falle der St.-Venantschen Torsion folgt aus der Variation des elastischen Potentials (3), wie bekannt, die Laplace-Gleichung  $\Delta \omega = 0$ . Die Variation von (13) führt unter Berücksichtigung von Gleichungen (8) und (12) und Anwendung des Gauß-Greenschen Integralsatzes auf die folgende inhomogene Potentialgleichung:

$$\Delta u_z = - \frac{F_{qx} I_{xx} + F_{qy} I_{xy}}{G(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \cdot x - \frac{F_{qx} I_{xy} + F_{qy} I_{yy}}{G(I_{xx} I_{yy} - I_{xy}^2)} \cdot y \quad (14)$$

Der Gleitmodul  $G$  wurde als konstant vorausgesetzt. Die zugehörigen Randbedingungen lauten:

$$G \left[ \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \gamma_{0x} \right) dx - \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \gamma_{0y} \right) dy \right] = 0 \quad (15)$$

Dies entspricht der Bedingung  $\tau_n = 0$ , d.h. die Schubspannung normal zum Rand verschwindet.

### 1. Beispiel: Rechteckquerschnitt

Für einen Rechteckquerschnitt der Höhe  $h$  und der Breite  $b$  reduziert sich Gleichung (14) auf

$$\frac{d^2 u_z}{dy^2} = - \frac{F_{\varphi y}}{G I_{xx}} y \quad (16)$$

und man erhält die bekannte Lösung  $\gamma_{0y} = \frac{6}{5} \frac{F_{\varphi y}}{G b h}$  (17)

mit der Verwölbung  $u_z = \frac{F_{\varphi y}}{G b} \left[ \frac{3}{10} \frac{y}{h} - 2 \left( \frac{y}{h} \right)^3 \right]$  (18)

und der Schubspannung  $\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{F_{\varphi y}}{b h} \left[ 1 - \left( \frac{2y}{h} \right)^2 \right]$  (19)

Diese Lösung entspricht der exakten Lösung, wenn die Querdehnzahl  $\nu$  verschwindet, da dann die Querschnittskontur erhalten bleibt. Die exakte Lösung unter Berücksichtigung der Verformung der Querschnittskontur findet sich in Göldner (1981).

### 2. Beispiel: Kreisquerschnitt

Für den Kreisquerschnitt ist die Verwendung von Polarkoordinaten zweckmäßig. Es sei  $R$  der Radius und  $A$  die Fläche des Querschnitts. Gleichung (14) geht über in

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \psi^2} = - \frac{F_{\varphi y}}{G I_{xx}} r \sin \psi \quad (20)$$

mit der Lösung

$$\gamma_{\varphi y} = \frac{7}{6} \frac{F_{\varphi y}}{G A} \quad (21)$$

der Querschnittsverwölbung  $u_z = \frac{F_{\varphi y}}{2 G A} R \left[ \frac{2}{3} \frac{r}{R} - \left( \frac{r}{R} \right)^3 \right] \sin \psi$  (22)

und der Schubspannungsverteilung in kartesischen Koordinaten

$$\tau_{zx} = - \frac{F_{\varphi y}}{A} \frac{xy}{R^2} \quad (23)$$

$$\tau_{zy} = \frac{3}{2} \frac{F_{\varphi y}}{A} \left[ 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right] \quad (24)$$

Auch diese Lösung ist bekannt und ergibt sich wieder als Spezialfall der exakten Lösung bei verschwindender Querkontraktion (siehe z. B. Hahn, 1990). Sie unterscheidet sich allerdings schon wesentlich von der, die man mit Hilfe von Formel (1) gewinnt. Für Querschnitte beliebiger Form ist die Lösung der Potentialgleichung (14) nur mit erheblichem Aufwand zu gewinnen, während für die Methode der finiten Elemente die Form des Querschnitts kein Hindernis darstellt.

### 3 Die Methode der finiten Elemente

#### 3.1 Isoparametrische Elemente

Zur Lösung zweidimensionaler Probleme haben sich die isoparametrischen 8-Knoten-Viereckelemente und die daraus abgeleiteten 6-Knoten-Dreieckelemente der Serendipity-Klasse bestens bewährt. Sie werden im folgenden verwendet. Eine Erläuterung bzw. Beschreibung derselben ist nicht nötig, da sie allgemein bekannt sind (Zienkiewicz, 1984). Die Darstellung der Verwölbung in einem beliebigen Element erfolgt mit Hilfe der Ansatzfunktionen  $N_i(\xi, \eta)$  im lokalen elementbezogenen Koordinatensystem  $\xi, \eta$ .

$$u_z = \sum_i u_{zi} N_i(\xi, \eta) \quad (25)$$

Die  $u_{zi}$  sind die Funktionswerte in den Knotenpunkten des Elementes. Eine entsprechende Darstellung gilt für die Koordinaten  $x, y$  des globalen Bezugssystems:

$$x = \sum_i x_i N_i(\xi, \eta) \quad \text{und} \quad y = \sum_i y_i N_i(\xi, \eta). \quad (26)$$

Dies liefert mit Gleichung (38) eine Parameterdarstellung der Verwölbung im Innern eines jeden Elementes. Differentiationen von  $u_z$  nach  $x$  und  $y$  können ohne Mühe ausgeführt und Integrationen numerisch realisiert werden. Die Stetigkeit der Verwölbung auf den Rändern angrenzender Elemente ist gesichert. Die noch unbekanntenen Knotenverschiebungen  $u_{zi}$  werden so bestimmt, daß das elastische Potential einen minimalen Wert annimmt.

#### 3.2 Steifigkeitsmatrix und Lastvektoren

Ein Vergleich des elastischen Potentials (3) des tordierten Stabes mit den entsprechenden Beziehungen (8), (12) und (13) des Querkraftschubes zeigt Übereinstimmung in den quadratischen Gliedern der Verwölbung bzw. der Wölbfunktion, während unterschiedliche Ausdrücke in den linearen Gliedern vorliegen. Die Variation des elastischen Potentials bezüglich der unbekanntenen Funktionswerte in den Knotenpunkten liefert daher in beiden Fällen dieselbe Steifigkeitsmatrix. Diese werden elementweise durch numerische Integration bestimmt und anschließend je nach Art des gewählten Lösungsverfahrens zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt. Man erhält für das Element  $i, j$  der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  eines beliebigen finiten Elementes:

$$K_{ij} = \int_{(A)} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dA_e \quad (27)$$

Die Elemente der Lastvektoren unterscheiden sich, und man erhält im Falle der Torsion für die Komponente  $i$  eines zu einem beliebigen Element gehörigen Lastvektors:

$$F_i = - \int_{(A_e)} \left( x \frac{\partial N_i}{\partial y} - y \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) dA_e \quad (28)$$

Bei Querkraftbelastung erhält man für das gleiche finite Element bei Belastung durch  $F_{qx}$

$$F_i = \frac{F_{qx}}{G(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \left( I_{xy} \int_{(A_e)} N_i y dA_e + I_{xx} \int_{(A_e)} N_i x dA_e \right) \quad (29)$$

und bei Belastung durch  $F_{qy}$

$$F_i = \frac{F_{qy}}{G(I_{xx}I_{yy} - I_{xy}^2)} \left( I_{yy} \int_{(A_e)} N_i y dA_e + I_{xy} \int_{(A_e)} N_i x dA_e \right) \quad (30)$$

Die Verbindung der Elementmatrizen und der zugehörigen Lastvektoren führt schließlich auf die Matrixgleichung

$$\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{f} \quad (31)$$

Mit der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , der Spaltenmatrix  $\mathbf{f}$  der 3 Lastvektoren und der Spaltenmatrix  $\mathbf{v}$ , welche die zugehörigen Querschnittsverwölbungen enthält. Torsion und Querkraftschub können daher in einem gemeinsamen Rechengang bearbeitet werden, da die Steifigkeitsmatrix dieselbe ist und nur drei unterschiedliche Lastvektoren abzarbeiten sind.

Die Bezugnahme auf die Verwölbung, d.h. die Anwendung der Deformationsmethode, bietet gegenüber der Einführung einer Spannungsfunktion wesentliche Vorteile hinsichtlich der Befriedigung der Randbedingungen. Da in den Randbedingungen nur die Ableitungen der Verwölbung bzw. der Wölbfunktion erscheinen, also keine wesentlichen Randbedingungen vorliegen, genügt die Fixierung eines Knotenpunktes zur Verhinderung einer Starrkörperbewegung. Die nach Auflösung von Gleichung (31) in den Lösungsvektoren noch vorhandenen konstanten und linear veränderlichen Anteile werden mit Hilfe von Gleichung (7) eliminiert. Man erhält im Falle der Torsion die Koordinaten des Schubmittelpunktes und im Falle der Querkraftbelastung die Neigungen  $\gamma_{0x}$  und  $\gamma_{0y}$  jeweils für  $F_{qx}$  und  $F_{qy}$ .

## 4 Wölbkrafttorsion

### 4.1 Lösungsansatz und Gleichung des tordierten Stabes

Das Problem der Wölbbehinderung des tordierten Stabes wird unter der vereinfachenden Annahme betrachtet, daß sich die Verwölbung in der durch die querschnittsspezifische Wölbfunktion  $\omega$  gegebenen Weise ausbildet, der Verdrehwinkel  $\varphi$  aber eine Funktion von  $z$  ist. Der Ansatz (2) wird also modifiziert durch

$$u_z = \frac{d\varphi}{dz} \omega(x, y) \quad (32)$$

wobei  $\omega$  jetzt als bekannt vorausgesetzt werden kann. Gibt man jetzt das elastische Potential des tordierten Stabes an, so enthält dieses auch Anteile, die aus den Normalspannungen infolge der Wölbbehinderung resultieren. Es gilt:

$$\Pi = \frac{EI_\omega}{2} \int_{(1)} \left( \frac{d^2\varphi}{dz^2} \right)^2 dz + \frac{GI_t}{2} \int \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz - \sum_i M_i \varphi_i \quad (33)$$

Hier erscheint das Sektorträgheitsmoment  $I_\omega$  als neue Größe

$$I_\omega = \int_{(A)} \omega^2(x, y) dA \quad (34)$$

Da die Wölbfunktion bereits vorliegt, bereitet es keine Mühe, dieses Integral auszuwerten. Die Lösung der aus der Variation von Gleichung (33) resultierenden Differentialgleichung

$$EI_{\omega} \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GI_t \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0 \quad (35)$$

ist bekannt und soll hier nicht weiter erörtert werden. Aus Gleichung (32) gewinnt man dann die aus der Wölbbehinderung resultierenden Normalspannungen:

$$\sigma_z = E \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \omega(x, y) \quad (36)$$

#### 4.2 Bestimmung der sekundären Schubspannungen

Die Wölbbehinderung bedingt gleichzeitig eine Verminderung der ursprünglichen St.-Venantschen Schubspannungen. Diese werden durch sogenannte sekundäre Schubspannungen kompensiert, die wie die Querkraftschubspannungen durch eine Gleichgewichtsbetrachtung an einem Stabelement gewonnen werden. Die Überlegungen hierzu sind die gleichen wie in Abschnitt 2.2, es ist in Gleichung (9) lediglich  $\sigma_z$  durch den Ausdruck (36) zu ersetzen. Setzt man voraus, daß  $\varphi = \varphi(z)$  inzwischen bekannt ist, so folgt mit einer fiktiven Verschiebung  $\bar{u}_z$  das Variationsproblem

$$\Pi = \frac{1}{2} G \int_{(A)} \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \right)^2 \right] dA - E \frac{d^3 \varphi}{dz^3} \int_{(A)} \bar{u}_z \omega(x, y) dA \quad (37)$$

Die Bestimmung von  $\bar{u}_z$  kann daher mit der schon vorliegenden Steifigkeitsmatrix ausgeführt werden. Es ist lediglich ein neuer Lastvektor aufzubauen. In Analogie zu (28) bzw. (29) folgt für ein Element bei innerhalb des Querschnitts unveränderlichen elastischen Konstanten bis auf den Faktor  $\frac{E}{G} \frac{d^3 \varphi}{dz^3}$ :

$$F_i = \int_{(A_e)} N_i \omega dA_e \quad (38)$$

Da die Dreieckszerlegung der Steifigkeitsmatrix schon realisiert wurde, müssen lediglich nochmals die Multiplikationen mit der oberen und der unteren Dreiecksmatrix (Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen) ausgeführt werden. Die sekundären Schubspannungen berechnet man dann, nachdem der Verschiebungsvektor vorliegt, aus:

$$\bar{\tau}_{zx} = G \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x} \quad \text{und} \quad \bar{\tau}_{zy} = G \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y} \quad (39)$$

Man muß allerdings bemerken, daß die Genauigkeit der so bestimmten sekundären Schubspannungen nicht sehr groß ist. Dies ist durch die nochmalige Verwendung der bereits aus einer FE-Rechnung hervorgegangenen Wölbfunktion als Belastungsgröße bedingt, denn diese ist ja selbst aufgrund der vorgenommenen Diskretisierung nur eine Näherung.



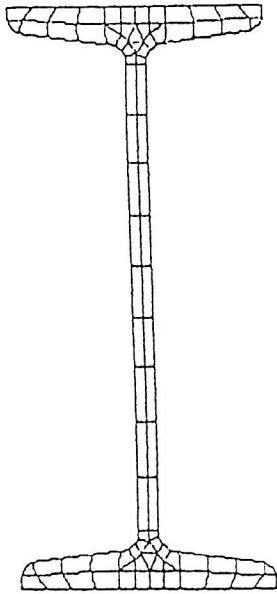


Bild 2. Vernetzung des I 200 DIN 1025

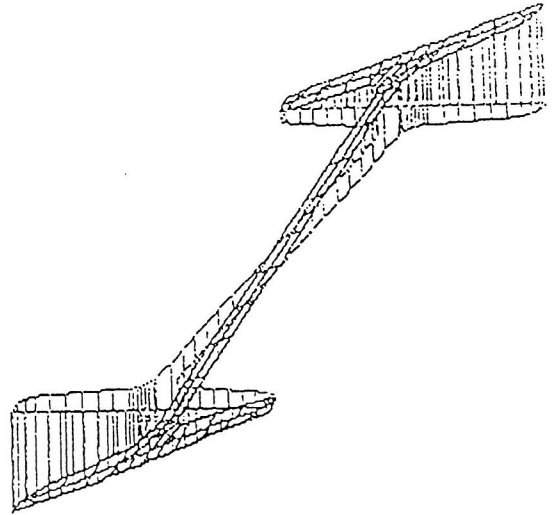


Bild 3. Normalspannungen aus  $F_L$ ,  $M_x$ ,  $M_y$

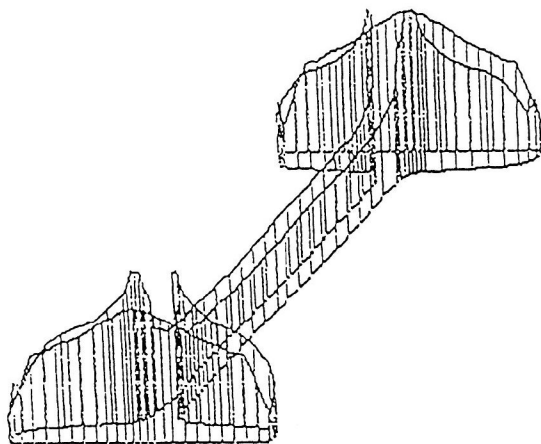


Bild 4. Schubspannungen aus  $M_t$

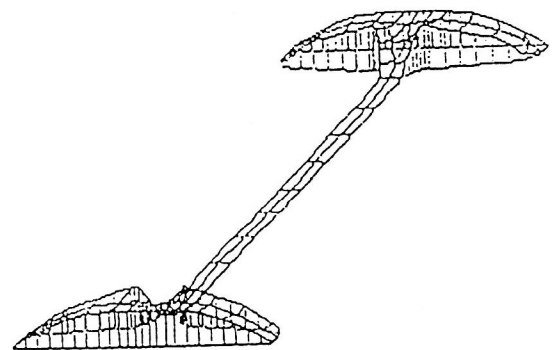


Bild 5. Schubspannungen aus  $F_{qx}$

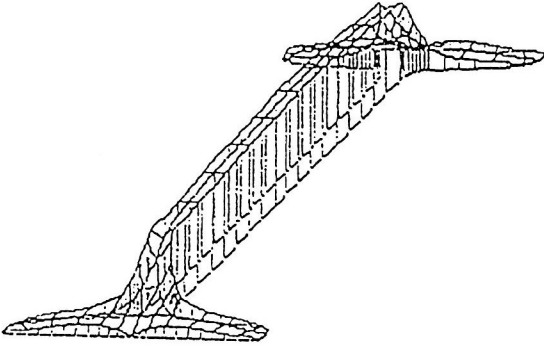


Bild 6: Schubspannungen aus  $F_{qy}$

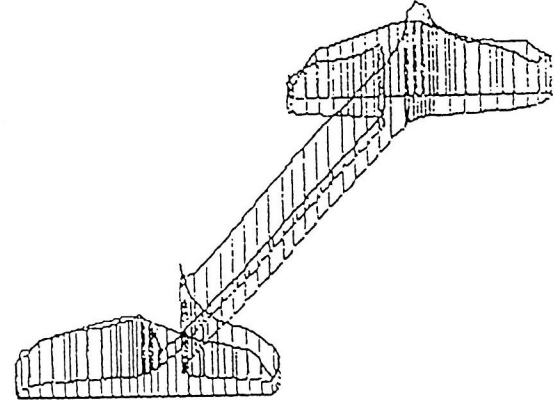


Bild 7. Vergleichsspannungen nach der Gestaltänderungshypothese (Maßstab gegenüber Bild 3 bis 6 geändert)

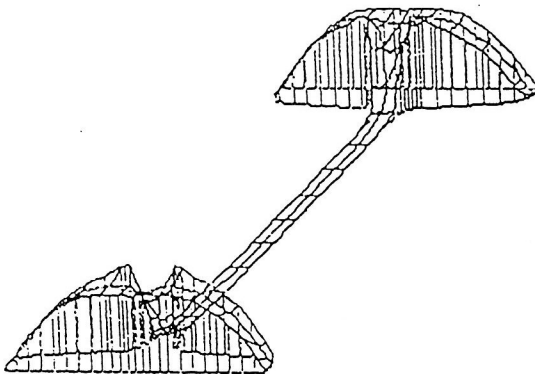


Bild 8. Sekundäre Schubspannungen bei Wölbbehinderung (Maßstab geändert)

## 5 Beispiel

Die Berechnung des Spannungszustandes infolge Torsion mit Wölbbehinderung und Querkraftschub entsprechend der vorgestellten Näherung ist besonders für dünnwandige Querschnitte interessant und hier vor allem dadurch, daß die Spannungsspitzen an den Querschnittsübergängen wesentlich genauer bestimmt werden können. Ein Normprofil I 200 DIN 1025 sei in der folgenden Weise belastet (Die Bezeichnung der Achsen  $x$ ,  $y$  entspricht der Profiltafel):

$$\begin{aligned} F_L &= 10 \text{ kN} & M_t &= 10^6 \text{ Nmm} \\ F_{qx} &= 50 \text{ kN} & M_x &= 10^7 \text{ Nmm} \\ F_{qy} &= 100 \text{ kN} & M_y &= 10^6 \text{ Nmm} \end{aligned}$$

Ein solches Profil wird im allgemeinen als dünnwandiger offener Querschnitt behandelt. Die FE-Diskretisierung (Bild 2) führt bei den Normalspannungen auf den bekannten linearen Verlauf (Bild 3). Demgegenüber ergeben sich bei den Schubspannungen aus  $M_t$  (Bild 4),  $F_{qx}$  (Bild 5) und  $F_{qy}$  (Bild 6) wesentlich genauere Werte. Der Verlauf nach der vereinfachten Theorie des dünnwandigen Querschnittes ist zwar noch zu erkennen, doch die Spannungsspitzen treten an den Übergängen auf und sind mit dieser Methode nicht zu erfassen. Der Maßstab der Spannungen ist in den Bildern 3 bis 6 gleich und wurde lediglich in Bild 7 verändert. Die Darstellung der sekundären Schubspannungen aus der Wölbbehinderung (Bild 8) entspricht formal der Querkraftschubspannungen aus  $F_{qx}$  (Bild 5). Da hier die Beträge der Schubspannungen dargestellt sind, kommt nicht zum Ausdruck, daß die Richtung der sekundären Schubspannungen in beiden Flanschen gegensätzlich ist, während die Schubspannungen aus  $F_{qx}$  gleich gerichtet sind.

## 6 Zusammenfassung

Zur Berechnung der Normal- und Schubspannungen in einem Balken wird die Querschnittskontur als konstant vorausgesetzt. Diese Annahme ermöglicht die Berechnung der Querkraftschubspannungen sowie der sekundären Schubspannungen bei Torsion mit Wölbbehinderung. Obwohl die so ermittelten Schubspannungen nicht die exakte Lösung des elastizitätstheoretischen Problems darstellen, denn diese erfordert die Berücksichtigung der Verformung der Querschnittskontur, sind sie doch wesentlich genauer als die Mittelwerte entlang einer Schnittlinie durch den Querschnitt, welche man üblicherweise in der Technischen Mechanik angibt. Besonders an Übergängen und Schweißnähten in dünnwandigen Querschnitten kann man diese genauer berechnen. Diese Berechnung erfolgt in ähnlicher Weise wie die der Schubspannungen der St.-Venantschen Torsion. Die FE-Diskretisierung führt auf dieselbe Steifigkeitsmatrix. Es sind lediglich andere Lastvektoren aufzubauen. Die näherungsweise Bestimmung der Querkraftschubspannungen ergibt sich, ebenso wie die der sekundären Schubspannungen der Wölbkrafttorsion, gewissermaßen als Nebenprodukt bei der Lösung der St.-Venantschen Torsion. Die Methode ist nicht auf dünnwandige Querschnitte beschränkt. Es bleibt die Frage, wie eine Verformung der als starr vorausgesetzten Querschnittskontur das Ergebnis beeinflusst. Die Art der Lasteinleitung wird besonders bei dünnwandigen Hohlquerschnitten, aber auch bei massiven dickwandigen Querschnitten zu berücksichtigen sein.

## Literatur

1. Filonenko-Boroditsch, M. M.: Elastizitätstheorie. Moskau, (1959).
2. Friemann, H.: Schub und Torsion in geraden Stäben. Werner - Ingenieur - Texte 78, Werner Verlag Düsseldorf, (1983).
3. Göldner, H. u. a.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre. Fachbuchverlag Leipzig, (1981).
4. Göldner, H. u. a.: Lehrbuch der Höheren Festigkeitslehre Bd. 1. Fachbuchverlag Leipzig, (1984).
5. Hahn, H. G.: Elastizitätstheorie. LAMM Bd. 62, Verlag B. G. Teubner, Stuttgart, (1985).
6. Hahn, H. G.: Technische Mechanik. Carl Hanser Verlag München, (1990).
7. Koczyk, S.; Weese, W.: FEM-Lösung des Problems der St.-Venantschen Torsion mit Hilfe der Wölbfunktion. Technische Mechanik, 12, 2, (1991), 125-130.
8. Kollbrunner, C. F.; Basler, K.: Torsion. Springer-Verlag, (1966).
9. Schardt, R.: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie. Springer-Verlag, (1989).
10. Stickforth, J.: Über den Schubmittelpunkt. Ing.-Arch. 56, (1986), 438-452.
11. Szabo, I.: Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag, (1972).
12. Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag München, (1984).

---

*Anschrift:* Dozent Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität,  
Postfach 4120, 39016 Magdeburg