TECHNISCHE MECHANIK, Band 14, Heft 2, (1994), 105-114
Manuskripteingang: 21. Februar 1994

Impulsfassung bei axialsymmetrischen Kreiseln

F.P.J. Rimrott, U. Förster

In der Dynamik werden die Bewegungsgleichungen eines mechanischen Systems oft über das D'Alembertsche Prinzip, ausgedrückt in Verschiebungskoordinaten, hergeleitet. Es gibt ein alternatives Vorgehen, bei dem die Bewegungsgleichungen über das D'Alembertsche Prinzip, ausgedrückt in Impulskoordianten, hergeleitet werden. Diese alternative Methode ist bei linearen Schwingern erfolgreich angewendet worden. In der vorliegenden Abhandlung wird sie auf Starrkörper erweitert, bei denen Kreiselmomente in den dynamischen Gleichgewichtsbedingungen auftreten. Es wird gezeigt, wie man vorgehen kann, und als Illustration wird das Verhalten des klassischen Spielkreisels mittels Impulskoordinaten untersucht.

1 Einleitung

Das Verhalten mechanischer Systeme kann bekanntlich durch die Gleichung

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} = Q_i \tag{1}$$

dargestellt werden. Wenn

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i'$$

kann man auch schreiben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i' \tag{3}$$

Gleichung (3) wird oft in Form der wohlbekannten Lagrangeschen Gleichung geschrieben

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i' \tag{4}$$

mit

$$L = T^* - V \tag{5}$$

Gleichung (4) läßt sich aus Gleichung (3) herleiten, vorausgesetzt daß

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0 \tag{6}$$

eine Bedingung, die typischerweise von mechanischen Systemen erfüllt wird.
Benutzt man verallgemeinerte Impulskoordinaten S_j (Tabelle 1), dann läßt sich das Verhalten mechanischer Systeme durch die Gleichung

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{S}_j} + \dot{e}_j' = s_j \tag{7}$$

ausdrücken, wobei $\dot{S}_j$ die Impulsableitungen, $\dot{e}'_j$ die nicht in der potentiellen Koenergie enthaltenen Extensionen und s_j verallgemeinerte Geschwindigkeiten darstellen. Die Formulierung für Gleichung (7) ist bewußt gewählt worden, um eine Vergleichsmöglichkeit mit Gleichung (1) zu schaffen.

Da (Tabelle 1)

$$s_j = \frac{\partial T}{\partial S_j} + s'_j \tag{8}$$

kann man auch schreiben

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial T}{\partial S_j} = s'_j - \dot{e}'_j \tag{9}$$

und erhält eine Gleichung, die sich mit Gleichung (3) vergleichen läßt. Nun liegt die Versuchung nahe, Gleichung (9) auch in Form einer Lagrangeschen Gleichung auszudrücken, nämlich durch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = s'_j - \dot{e}'_j \tag{10}$$

mit einer zu Gleichung (5) komplementären Lagrangeschen Funktion

$$L^* = T - V^* \tag{11}$$

Voraussetzungen für die Gültigkeit von Gleichung (10) sind jedoch, daß

$$\frac{\partial V^*}{\partial S_j} = 0 \tag{12}$$

und

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} = 0 \tag{13}$$

Bedingung (12) ist typisch für mechanische Systeme. Im Gegensatz dazu gilt Gleichung (13) jedoch nur für sogenannte Tabarroksche Systeme. Eine Verwendung der alternativen Lagrangeschen Gleichung ist also nur vorteilhaft, wenn Bedingung (13) erfüllt ist. Für nichttabarroksche Systeme (und natürlich auch für Tabarroksche) gilt jedoch immer Gleichung (9).

In der nun folgenden Impulsfassung eines Kreiselproblems gehen wir davon aus, daß uns Gleichungen für die Verschiebungsfassung bekannt sind. Mit anderen Worten, wir werden die unter Verwendung von Verschiebungskoordinaten q erhaltenen Gleichungen in Gleichungen mit Impulskoordinaten S transformieren. Dabei muß man sich vergegenwärtigen, daß die Zahl der Impulskoordinaten S oft nicht gleich der Zahl der Verschiebungskoordinaten q ist.

Die Verschiebungskoordinaten basieren auf einer Verschiebung der *Massenelemente*, beim Kreisel also auf einer Winkeländerung des Starrkörpers. Die Impulskoordinaten S beruhen auf den Impulsen (oder deren Ableitungen $\dot{S}$, d.h. also verallgemeinerten Kräften) in den *Kraftelementen*. Der Einfachheit halber sei der zu betrachtende Kreisel ein konservatives System (also ohne Dämpfer). Bekanntlich leisten Dämpferkräfte zwar Arbeit, jedoch läßt sich diese nicht als potentielle Energie (oder potentielle Koenergie) ausdrücken. Zum anderen ist es jedoch wichtig, sich darüber klar zu sein, daß gerade beim Kreisel oft solche Drehmomente eine wichtige Rolle spielen, die *keine* Arbeit leisten und aus diesem Grunde weder potentielle Energie noch potentielle Koenergie (siehe Tabarrok, 1986) besitzen. Darüberhinaus muß auch die Tatsache Berücksichtigung finden, daß es aus der kinetischen Energie herrührende Terme gibt, die Drehmomentcharakter haben (entsprechend der Zentrifugalkraft bei einer Punktmasse).

Unsere Aufgabe besteht also darin, zunächst die potentielle Koenergie V^* und dann die kinetische Energie T in Impulskoordinaten auszudrücken, ferner festzustellen, ob Geschwindigkeiten s'_j und $\dot{e}'_j$ ohne Energie oder Koenergie existieren und zum Schluß mit Hilfe von Gleichungen (3) die Bewegungsgleichungen aufzustellen.

Diese Aufgabe ist vor kurzem in einer Abhandlung von Tabarrok et al. (1994) behandelt worden, in der allerdings mit gemischten Koordinaten, d.h. gleichzeitig mit verallgemeinerten Verschiebungskoordinaten q und verallgemeinerten Impulskoordinaten S gearbeitet wurde. Wie im folgenden gezeigt wird, ist dies nicht nötig. Die ganze Aufgabe kann ausschließlich in Impulskoordinaten abgewickelt werden.

2 Impulskoordinaten und potentielle Koenergie

Wir beginnen mit Gleichung (1) und nehmen an, daß es für jedes Drehmoment Q in der Verschiebungsfassung auch ein entsprechendes Drehmoment $\dot{S}$ in der Impulsfassung geben muß, d.h., wir führen drei Impulskoordinaten S ein, für deren Ableitungen folgendes gilt

$$\dot{S}_1 = \dot{S}_\psi = Q_\psi \tag{14a}$$

$$\dot{S}_2 = \dot{S}_\nu = Q_\nu \tag{14b}$$

$$\dot{S}_3 = \dot{S}_\sigma = Q_\sigma \tag{14c}$$

Für die potentielle Energie gilt dann

$$V = -\int Q_i \, dq_i = -\int \dot{S}_i \, de_i \tag{15}$$

und für die potentielle Koenergie

$$V^* = -\int e_i \, d\dot{S}_i = -\int q_i \, dQ_i \tag{16}$$

Als Beispiel sei der Spielkreisel (Bild 1) angeführt, für den

$$\dot{S}_\psi = 0 \tag{17a}$$

$$\dot{S}_\nu = Wl\sin\nu = mgl\sin\nu \tag{17b}$$

$$\dot{S}_\sigma = 0 \tag{17c}$$

wobei $\dot{S}_\psi = \dot{S}_\sigma = 0$, da das angreifende Drehmoment keine Projektionen auf die ψ- und σ-Achsen hat.

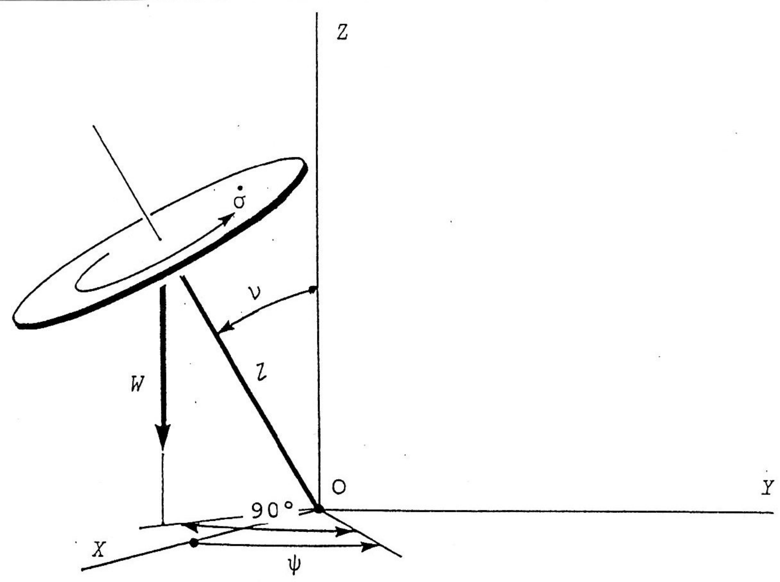

Bild 1. Spielkreisel

Aus den Gleichungen (17) läßt sich sofort schließen, daß zwei Impulskoordinaten konstant sind.

$$S_\psi = \text{konstant} \tag{18a}$$

$$S_\sigma = \text{konstant} \tag{18b}$$

Die potentielle Energie (15) des Spielkreisels ist

$$V = mgl\int_0^\nu \sin\nu\, d\nu = -mgl(1 - \cos\nu) \tag{19}$$

Die potentielle Koenergie (16) ist, unter Zuhilfenahme von Gleichung (17b)

$$V^* = -\int \nu d\dot{S}_\nu = -\int \arcsin\frac{\dot{S}_\nu}{mgl} d\dot{S}_\nu = -\dot{S}_\nu \arcsin\frac{\dot{S}_\nu}{mgl} - \sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_\nu^2} \tag{20}$$

Es sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, daß V auch als Funktion von $\dot{S}_\nu$, und V^* auch als Funktion von ν ausgedrückt werden kann. Für unsere Zwecke, d.h. für eine spätere Anwendung von Gleichung (9) muß jedoch V^* als Funktion von $\dot{S}_\nu$ erscheinen. Wir kommen zu dem Schluß, daß für den Spielkreisel

$$V^* = V^*(\dot{S}_\nu) \tag{21}$$

3 Dynamisches Gleichgewicht

Eine Bedingung bei der Verwendung von verallgemeinerten Verschiebungskoordinaten ist, daß diese kompatibel (Tabarrok, 1986) sein müssen (Geschwindigkeitspassung). Die komplementäre Bedingung, die bei Verwendung von verallgemeinerten Impulskoordinaten erfüllt sein muß, ist, daß diese sich in dynamischem Gleichgewicht befinden müssen (Kraftpassung, beim Kreisel also Drehmomentpassung). Um die Impulsfassung auf Kreisel anwenden zu können, muß also sichergestellt sein, daß die Impulsableitungen die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen.

Wir setzen als bekannt voraus (Rimrott u.a., 1993), daß die kinetische Koenergie in Verschiebungskoordinaten ausgedrückt, folgendermaßen aussieht:

$$T^* = \frac{1}{2}\left\{A\left(\dot{\psi}^2\sin^2\nu + \dot{\nu}^2\right) + C(\dot{\psi}\cos\nu + \dot{\sigma})^2\right\} \tag{22}$$

Dabei sind A, A, C die drei Hauptträgheitsmomente des Kreisels. Die Anwendung von Gleichung (1) führt dann, unter Verwendung der in Tabelle 1 aufgeführten Definitionen, zu

$$\dot{p}_\psi - \frac{\partial T^*}{\partial \psi} = Q_\psi \tag{23a}$$

$$\dot{p}_\nu - \frac{\partial T^*}{\partial \nu} = Q_\nu \tag{23b}$$

$$\dot{p}_\sigma - \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = Q_\sigma \tag{23c}$$

Nun erkennt man aus Gleichung (22), daß für den axialsymmetrischen Kreisel

$$\frac{\partial T^*}{\partial \psi} = \frac{\partial T^*}{\partial \sigma} = 0 \tag{24}$$

Veränderliche	
Verallgemeinerte Verschiebungen q_i (der Starrkörper) *Müssen Kompatibilitätsbedingungen erfüllen!*	Verallgemeinerte Impulse S_j (der Kraftelemente) *Müssen Gleichgewichtsbedingungen erfüllen!*
Verallgemeinerte Geschwindigkeiten (der Starrkörper) $\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i$	Verallgemeinerte Kräfte (der Kraftelemente) $\dot{S}_j = \frac{d}{dt} S_j$
Dazugehörige Energien und Koenergien	
$V = V(q, t)$ $T^* = T^*(q, \dot{q}, t)$	$T = T(S, \dot{S}, t)$ $V^* = V^*(\dot{S}, t)$
Bewegungsgleichungen	
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T^*}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i'$	$-\frac{d}{dt}\frac{\partial V^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial T}{\partial S_j} = s_j' - \dot{e}_j'$
Lagrangesche Funktion	
$L = T^* - V$	$L^* = T - V^*$
Lagrangesche Gleichung	
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i'$	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} + s_j' - \dot{e}_j'$
Tabarroksche Gleichung	
	$\frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{S}_j} - \frac{\partial L^*}{\partial S_j} = s_j' - \dot{e}_j'$ wenn $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{S}_j} = 0$
Verallgemeinerte Bewegungsschwünge (der Starrkörper) $p_i = \frac{\partial T^*}{\partial \dot{q}_i}$	Verallgemeinerte Verschiebungen †† (der Kraftelemente) $e_j = -\frac{\partial V^*}{\partial \dot{S}_j} + e_j'$
Verallgemeinerte Kräfte † (auf Starrkörper eingeprägt) $Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i'$	Verallgemeinerte Geschwindigkeiten ††† (auf Kraftelemente eingeprägt) $s_j = \frac{\partial T}{\partial S_j} + s_j'$
D'Alembertsches Prinzip	
$\left[Q_i - \left(\dot{p}_i - \frac{\partial T^*}{\partial q_i}\right)\right]\delta q_i = 0$	$\left[s_j - \dot{e}_j\right]\delta S_j = 0$

† Die Größe Q_i' ist derjenige Teil der verallgemeinerten Kraft Q_i, der nicht in der potentiellen Energie enthalten ist (z.B. eine Dämpferkraft)

†† Die Größe e_j' ist derjenige Teil der verallgemeinerten Verschiebung e_j, der nicht in der potentiellen Koenergie enthalten ist (z.B. eine Starrkörperverschiebung oder eine Dämpferverschiebung)

††† Die Größe s_j' ist derjenige Teil der verallgemeinerten Geschwindigkeit s_j, der nicht in der kinetischen Energie enthalten ist (z.B. Geschwindigkeit eines Punktes ohne Masse)

Tabelle 1. Gegenüberstellung von Verschiebungs- und Impulsfassung (Quelle: Rimrott, 1994)

Man kann also schreiben

$$\dot{p}_\psi = Q_\psi \tag{25a}$$

$$\dot{p}_\nu = Q_\nu + \frac{\partial T^*}{\partial \nu} \tag{25b}$$

$$\dot{p}_\sigma = Q_\sigma \tag{25c}$$

Nun führen wir eine zusätzliche Impulskoordinate S_4 ein, für deren Ableitung gilt

$$\dot{S}_4 = \frac{\partial T^*}{\partial \nu} \tag{26}$$

Unter Zuhilfenahme von Gleichungen (14), (23) und (26) erhalten wir dann die dynamischen Gleichgewichtsbedingungen

$$\dot{p}_\psi = \dot{S}_\psi \tag{27a}$$

$$\dot{p}_\nu = \dot{S}_\nu + \dot{S}_4 \tag{27b}$$

$$\dot{p}_\sigma = \dot{S}_\sigma \tag{27c}$$

Nach Integration (mit verschwindenden Integrationskonstanten) ergibt sich eine Beziehung zwischen den kovarianten Drallprojektionen p und den Impulskoordinaten.

$$p_\psi = S_\psi \tag{28a}$$

$$p_\nu = S_\nu + S_4 \tag{28b}$$

$$p_\sigma = S_\sigma \tag{28c}$$

4 Kinetische Energie

Wir setzen wiederum als bekannt voraus (Rimrott u.a., 1993), daß die kinetische Energie in Verschiebungskoordinaten folgendes Aussehen hat:

$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A\sin^2\nu}p_\psi^2 + \frac{1}{A}p_\nu^2 + \left(\frac{1}{C} + \frac{\cos^2\nu}{A\sin^2\nu}\right)p_\sigma^2 - \frac{2\cos\nu}{A\sin^2\nu}p_\psi p_\sigma\right\} \tag{29}$$

Wenn nun die in Gleichung (29) erscheinenden Drallprojektionen p durch die Impulskoordinaten S ersetzt werden, erhält man mit Hilfe von Gleichungen (28)

$$T = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{A\sin^2\nu}\left(S_\psi - S_\sigma\cos\nu\right)^2 + \frac{1}{A}\left(S_\nu + S_4\right)^2 + \frac{1}{C}S_\sigma^2\right\} \tag{30}$$

also

$$T = T(S_\nu, S_4, \nu)$$

Gleichung (30) ist allgemein für axialsymmetrische Starrkörperkreisel gültig. Den Puristen wird stören, daß in Gleichung (30) nicht nur die gewünschten Impulskoordinaten erscheinen, sondern auch immer noch eine Verschiebungskoordinate, nämlich der Nutationswinkel ν. Der Praktiker wird darauf hinweisen, daß zur Erstellung von Bewegungsgleichungen, d.h. für die Anwendung von Gleichung (9), lediglich $\frac{\partial T}{\partial S_j}$ gefragt ist.

So lange also die Verschiebung ν keine Funktion der Impulskoordinaten selbst ist, besteht kein Anlaß, die Verschiebung ν zu ersetzen. Andererseits war es jedoch unsere ursprüngliche Absicht, die kinetische Energie ausschließlich in Impulskoordinaten S (und deren Ableitungen $\dot{S}$) auszudrücken. Dies ist z. B. möglich, wenn, wie im Falle des als Beispiel herangezogenen Spielkreisels, eine Beziehung zwischen dem Nutationswinkel ν und der Ableitung $\dot{S}_\nu$ der Impulskoordinate S_ν besteht.

Aus Gleichung (17) erhält man

$$\sin\nu = \frac{\dot{S}_\nu}{mgl} \tag{31}$$

und kann nun diesen Wert sowie

$$\cos\nu = \sqrt{1 - \frac{\dot{S}_\nu^2}{(mgl)^2}} \tag{32}$$

in Gleichung (30) einsetzen, was zu folgendem Ausdruck für die kinetische Energie führt:

$$T = \frac{1}{2A}\frac{\left(mglS_\psi - S_\sigma\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_\nu^2}\right)^2}{\dot{S}_\nu^2} + \frac{1}{2A}(S_\nu + S_4)^2 + \frac{1}{2C}S_\sigma^2 \tag{33}$$

Die kinetische Energie ist jetzt eine reine Funktion der Impulskoordinaten S sowie deren Ableitungen $\dot{S}$. Nimmt man die Gleichungen (18) zur Kenntnis, dann kommt man zu dem Schluß, daß für den Spielkreisel

$$T = T(S_\nu, S_4, \dot{S}_\nu) \tag{34}$$

5 Nichtholonome Bindung

Eine zusätzliche Impulskoordinate hat ihre Berechtigung, wenn das System durch eine nichtholonome Bindung gekennzeichnet ist. Gleichungen (22) und (26) ergeben

$$\dot{S}_4 = (A - C)\dot{\psi}^2\sin\nu\cos\nu - C\dot{\psi}\dot{\sigma}\sin\nu \tag{35}$$

Nun sind (Rimrott u.a., 1993)

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{\partial T}{\partial p_\psi} = \frac{1}{A\sin^2\nu}p_\psi - \frac{\cos\nu}{A\sin^2\nu}p_\sigma\\ \dot{\psi} &= \frac{1}{A\sin^2\nu}S_\psi - \frac{\cos\nu}{A\sin^2\nu}S_\sigma\end{aligned} \tag{36}$$

und

$$\begin{aligned}\dot{\sigma} &= \frac{\partial T}{\partial p_\sigma} = -\frac{\cos\nu}{A\sin^2\nu}p_\psi + \left(\frac{1}{C} + \frac{\cos^2\nu}{A\sin^2\nu}\right)p_\sigma\\ \dot{\sigma} &= -\frac{\cos\nu}{A\sin^2\nu}S_\psi + \left(\frac{1}{C} + \frac{\cos^2\nu}{A\sin^2\nu}\right)S_\sigma\end{aligned} \tag{37}$$

Unter Berücksichtigung von Gleichungen (35), (36) und (37) ergibt sich schließlich

$$\dot{S}_4 = -\frac{(S_\psi - S_\sigma\cos\nu)(S_\sigma - S_\psi\cos\nu)}{A\sin^3\nu} \tag{38}$$

$$\dot{S}_4 = -\frac{\left(mglS_\psi - S_\sigma\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}\right)\left(mglS_\sigma - S_\psi\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}\right)}{A\,\dot{S}_v^3}(mgl) \tag{39}$$

Gleichung (39) stellt eine nichtholonome Bindung zwischen den Impulskoordinaten und deren Ableitungen dar.

6 Die Bewegungsgleichungen für den Spielkreisel

Gleichung (9) kann nun Anwendung finden. Mit Hilfe von Gleichungen (20) und (30) liefert sie Gleichung (40b) für die Koordinate S_v. Für die anderen Koordinaten kommen Gleichungen (17) und (39) in Frage. Es ergibt sich

$$\dot{S}_\psi = 0 \tag{40a}$$

$$\frac{\ddot{S}_v}{\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}} - \frac{S_v + S_4}{A} = 0 \tag{40b}$$

$$\dot{S}_\sigma = 0 \tag{40c}$$

$$\dot{S}_4 + \frac{mgl\left(mglS_\psi - S_\sigma\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}\right)\left(mglS_\sigma - S_\psi\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}\right)}{A\,\dot{S}_v^3} = 0 \tag{40d}$$

Gleichung (40b) ist eine Kompatibilitätsaussage. Jeder Term ist eine Winkelgeschwindigkeit. Gleichung (40d) stellt eine nichtholonome Bindung dar. Das System hat einen Freiheitsgrad. Wegen der *einen* nichtholonomen Bindung ist die Zahl der zur Beschreibung des Systems notwendigen Koordinaten um *eine* größer als der Freiheitsgrad, d.h. zwei Koordinaten, nämlich S_v und S_4, sind zur Beschreibung des Systems notwendig. Die Größen S_ψ und S_σ sind Konstanten des Systems. Mit der Aufstellung des Gleichungssystems (40) ist die Aufgabe der Erstellung der Bewegungsgleichungen an sich gelöst. Es ist jedoch recht interessant, dem Spielkreisel noch etwas weiter nachzugehen und sich über Lösungen der Bewegungsgleichungen (40), insbesondere für kleine Winkelabweichungen von der Vertikalrichtung, Gedanken zu machen.

7 Lösungsansatz

Da S_ψ = konstant und S_σ = konstant sind, bleiben nur noch die Gleichungen (40b) und (40d) übrig. Da Impulse nicht nur wenig interessant, sondern auch schwierig zu handhaben sind, differenzieren wir Gleichung (40b) nach der Zeit und erhalten

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\ddot{S}_v}{\sqrt{(mgl)^2 - \dot{S}_v^2}}\right) - \frac{\dot{S}_v + \dot{S}_4}{A} = 0 \tag{41}$$

mit $\dot{S}_4 = f(\dot{S}_v)$ aus Gleichung (40d). Wir betrachten nun den Fall eines kleinen Drehmomentes

$$\dot{S}_v \ll mgl \tag{42}$$

Unter Berücksichtigung, daß $S_\sigma = S_\psi$ für kleine $\dot{S}_v$ ist, wie sich aus den Gleichungen (28a, c) ersehen läßt, wird Gleichung (40d) dann zu

$$\dot{S}_4 = -\frac{1}{4}\frac{S_\psi^2\dot{S}_v}{mglA} \tag{43}$$

und mit Hilfe von Gleichungen (42) und (43) wird Gleichung (41) zu

$$\ddot{S}_{\mathrm{v}} - \left(\frac{mgl}{A} - \frac{S_{\psi}^{2}}{4A^{2}} \right) \dot{S}_{\mathrm{v}} = 0 \tag{44}$$

Führen wir nun noch der Einfachheit halber $\dot{S}_{\mathrm{v}} = M$ = eingeprägtes Drehmoment ein, dann erhält man aus Gleichung (44)

$$\ddot{M} + \left(\frac{S_{\psi}^{2}}{4A^{2}} - \frac{mgl}{A} \right) M = 0 \tag{45}$$

8 Stabilität der Kreiselhaltung

Gleichung (45) läßt sich dahin interpretieren, daß der in Klammern stehende Ausdruck positiv sein muß, wenn die Größe des Drehmomentes M innerhalb gewisser Grenzen bleiben soll. Für die konstante Drallprojektion S_{ψ} muß also gelten

$$S_{\psi}^{2} \geq 4\, mglA \tag{46}$$

um ein stabil schwingendes Drehmoment M zu gewährleisten. Dieses Ergebnis ist aus der auf Verschiebungskoordinaten basierenden Kreiseltheorie (Magnus, 1972) bekannt.

9 Beibehaltung der Verschiebungskoordinate v

Wir wollen nun noch untersuchen, wie man vorgehen muß, wenn man einen Kunstgriff anwendet und die in dem Ausdruck (30) für die kinetische Energie T erscheinende Verschiebungskoordinate v beibehält, d.h. nicht durch $\dot{S}_{\mathrm{v}}$ ersetzt. Dann gilt

$$T = T(S_{\mathrm{v}}, S_{4}, \mathrm{v}) \tag{47}$$

Dabei muß man jedoch beachten, daß die Verschiebungskoordinate *nur* in der kinetischen Energie beibehalten wird, nicht dagegen im Ausdruck (16) für die potentielle Koenergie, in welchem die Verschiebungskoordinate v durch die Impulskoordinatenableitung $\dot{S}_{\mathrm{v}}$ ersetzt werden *muß*, so daß

$$V^{*} = V^{*}(\dot{S}_{\mathrm{v}}) \tag{48}$$

Man kann nun sogar (Tabarrok u.a., 1994) eine komplementäre Lagrangesche Funktion L^{*} einführen,

$$L^{*}(S_{\mathrm{v}}, \dot{S}_{\mathrm{v}}, S_{4}, \mathrm{v}) = T(S_{\mathrm{v}}, S_{4}, \mathrm{v}) - V^{*}(\dot{S}_{\mathrm{v}}) \tag{49}$$

mit T aus Gleichung (30) und V^{*} aus Gleichung (20) und eine komplementäre Lagrangesche Gleichung (10) verwenden, da durch das Nichterscheinen von $\dot{S}_{\mathrm{v}}$ in Gleichung (47) sichergestellt ist, daß

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{S}_{\mathrm{v}}} = 0 \tag{50}$$

Unter Verwendung von Gleichung (10) für die Koordinate S_{v}, mit $s_{\mathrm{v}}' = \dot{e}_{\mathrm{v}}' = 0$, ergibt sich

$$\frac{\ddot{S}_{\mathrm{v}}}{\sqrt{(mgl)^{2} - \dot{S}_{\mathrm{v}}^{2}}} - \frac{S_{\mathrm{v}} + S_{4}}{A} = 0 \tag{51a}$$

sowie aus Gleichung (38)

$$\dot{S}_4 - \frac{\left(S_\psi - S_\sigma \cos\nu\right)\left(S_\sigma - S_\psi \cos\nu\right)}{A \sin^3\nu} = 0 \tag{51b}$$

Die Gleichungen (51) entsprechen den Gleichungen (40). Es gilt selbstverständlich weiterhin, daß S_ψ und S_σ konstant sind. Wir gehen nun in ähnlicher Weise vor wie in Abschnitt 7, um einen Lösungsansatz für kleine Drehmomente $\dot{S}_\nu = M$ zu erhalten. Es gilt also Ungleichung (42) und außerdem

$$\nu \approx 0 \tag{52}$$

d.h. $\cos\nu = \sqrt{1 - \sin^2\nu} \approx 1 - \frac{1}{2}\nu^2$ und $\sin\nu \approx \nu$. Man erhält schließlich

$$\dot{S}_4 = -\frac{1}{4}\frac{S_\psi^2}{A}\nu \tag{53}$$

Gleichungen (53) und (17b) gestatten uns, Gleichung (51a) in die Form von Gleichung (44) zu überführen. Von da an kann man wie gehabt fortfahren.

10 Zusammenfassung

Anhand des Spielkreisels ist gezeigt worden, auf welche Weise die Verwendung verallgemeinerter Impulse als unabhängige Veränderliche, anstelle der üblichen verallgemeinerten Verschiebungen, durchgeführt werden kann. Dabei stellt sich heraus, daß eine zusätzliche Veränderliche eingeführt werden muß. Die Bewegungsgleichung, die sich dann aus einer Summe von Geschwindigkeiten ergibt, stellt also eine Kompatibilitätsbedingung dar. Die Lösung dieser Gleichung führt zu Impulsen als Funktionen der Zeit. Da Impulse weder leicht zu handhaben noch von großem Interesse sind, differenziert man die Bewegungsgleichungen geschickterweise nach der Zeit und erhält dann Gleichungen mit verallgemeinerten Kräften als Veränderliche.

Förderung

Die Autoren danken dem Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Sachsen-Anhalt für die Förderung vorliegender Arbeit im Rahmen des Projektes "FKZ 1105A02110023: Zusammenfassende Auswertung von Theorie und Versuch des Verhaltens dissipativer drehmomentfreier symmetrischer Festkörperkreisel"

Literatur

1. Magnus, K.: Kreisel. Springer-Verlag, (1971), 493 S.

2. Rimrott, F.P.J.; Szczygielski, W.M.; Tabarrok, B.: Kinetic Energy and Complementary Kinetic Energy in Gyrodynamics. ASME Journal of Applied Mechanics, 60, (1993), 398-405.

3. Rimrott, F.P.J.: Der Zentrifugalimpuls als zusätzliche Koordinate bei der Alternativfassung der Lagrangeschen Gleichung. Technische Mechanik, 14, 1, (1994), 15-22.

4. Tabarrok, B.: Variational Methods in Dynamics. Lecture Notes, University of Toronto, (1986).

5. Tabarrok, B.; Tong, X.; Rimrott, F.P.J.: The Spinning Top: A Complementary Approach. ZAMM 74, ?, (1994), ?-?

Anschrift: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. F.P.J. Rimrott und Dipl.-Phys. Ursula Förster, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg