

# Selbstsynchronisation statisch und dynamisch unwuchtiger Vibratoren. Teil II: Ausführung und Beispiele

L. Sperling

*Die im Teil I angegebenen allgemeinen Existenz- und Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen von Rotoren, deren Achsen fest mit bestimmten Punkten eines linearen Schwingungssystems mit beliebig vielen Freiheitsgraden und möglicherweise viskoser Dämpfung verbunden sind, werden mittels der Frequenzgänge dieses Systems ("harmonische Einflußkoeffizienten") dargestellt und für speziellere Fälle (z. B. gleichartige Rotoren auf dämpfungsfreiem Schwingungssystem) aufbereitet. Abschließend wird die allgemeine Methode an zwei elementaren Aufgaben für zwei statisch bzw. für zwei dynamisch unwuchtige Rotoren demonstriert.*

## 5 Vorbemerkungen

Im Teil I der vorliegenden Arbeit wurden allgemeine Existenz- und Stabilitätsbedingungen für selbstsynchronisierte Bewegungen von Unwuchttrotoren auf einem beliebigen linearen Schwingungssystem aus den Bewegungsgleichungen der Rotoren entwickelt. Es sei darauf hingewiesen, daß außer den aus diesen Gleichungen folgenden instabilen und damit nicht realisierbaren Bewegungen weitere, mit den Bewegungsgleichungen des Schwingungssystems zusammenhängende, Instabilitätsbereiche - im Sinne des sogenannten Sommerfeld-Effektes - in Resonanznähe zu erwarten sind, die hier nicht mit erfaßt werden.

Die Aufstellung der Bedingungen nach Teil I erfordert im konkreten Falle noch die Lösung von Standardaufgaben der Theorie linearer Schwingungssysteme. Ziel des vorliegenden Teiles II ist es, diese Aufgabe möglichst weitgehend allgemein aufzubereiten und die Anwendung für den Nutzer unabhängig von der Herleitung der Bedingungen im Teil I zu ermöglichen und durch einfache Beispiele zu demonstrieren. Die Gleichungs-Nummern (1) bis (94) und die Literatur-Nummern [1] bis [9] sind die des Teiles I der vorliegenden Arbeit (Sperling, 1994).

## 6 Darstellung der Vibrationsmomente mittels der Frequenzgänge für ein lineares Schwingungssystem

Um die Existenz- und Stabilitätsbedingungen im konkreten Falle auswerten zu können, benötigt man die expliziten Ausdrücke der Vibrationsmomente (83) in Abhängigkeit von den Phasendifferenzen. Sie sind bestimmt durch die Bewegungsgleichungen des Gesamtsystems, bestehend aus Schwingungssystem und Unwuchttrotoren. Beziehung (83) macht jedoch deutlich, daß vom Schwingungssystem nur die translatorischen und rotatorischen stationären Beschleunigungen in den Punkten  $O_i$  benötigt werden. Diese lassen sich aber durch die sogenannten harmonischen Einflußkoeffizienten sowie die Zentrifugalkräfte und Unwuchtmomente ausdrücken. Daher kann man auch die Vibrationsmomente allgemein in Abhängigkeit von diesen Größen darstellen und damit einen wesentlichen Teil der Bestimmung der Vibrationsmomente allgemein erledigen. Für den Fall nur statisch unwuchtiger Rotoren, also verschwindender Unwuchtmomente, wurde dieser Weg erstmals in [8] beschritten, später unabhängig davon in [3]. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß die harmonischen Einflußkoeffizienten auch experimentell über eine Identifikationsaufgabe bestimmt werden können.

Im folgenden werden die Ausdrücke (57) bis (62), wie bereits im Teil I der vorliegenden Arbeit angekündigt, unter der Voraussetzung kleiner Rotormassen im Vergleich zu repräsentativen Masseparametern des Schwingungssystems näherungsweise durch die Ausdrücke (63) und (64) ersetzt, die sich für die erzeugende Lösung auf die Komponenten der Zentrifugalkraft und des Unwuchtmomentes reduzieren. Dann dürfen die Basisvektoren  $\mathbf{Se}_{ix}$ ,  $\mathbf{Se}_{iy}$ ,  $\mathbf{Se}_{iz}$  (Bild 1) näherungsweise durch  $\mathbf{e}_{ix}$ ,  $\mathbf{e}_{iy}$ ,  $\mathbf{e}_{iz}$  ersetzt werden.

Zur Definition vektorieller harmonischer Einflußkoeffizienten werden zusätzliche Einheitsvektoren

$$\mathbf{e}_{iu} = \mathbf{e}_{ix} \quad \mathbf{e}_{iv} = \sigma_i \mathbf{e}_{iy} \quad \sigma_i \in \{+1, -1\} \quad (95)$$

eingeführt (siehe auch Bild 2 und Bild 3).

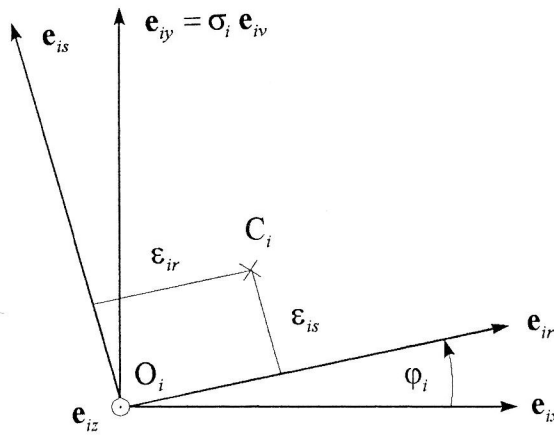


Bild 2.  $\mathbf{e}_{ix} - \mathbf{e}_{iy}$  - Ebene

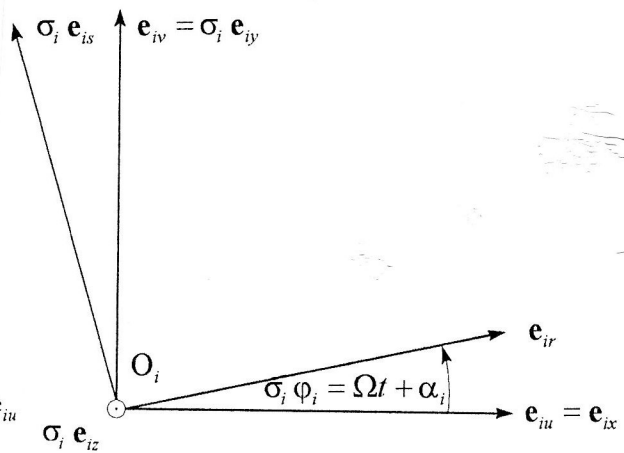


Bild 3.  $\mathbf{e}_{iu} - \mathbf{e}_{iv}$  - Ebene

Eine Kräfteerregung  $f_0 \cos \Omega t$  mit  $f_0 = 1$  in  $O_k$  in  $\mathbf{e}_{ku}$  - Richtung bewirke in  $O_i$  die stationäre Bewegung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_u^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{a}}_u^{ik} \sin \Omega t \quad \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{d}_u^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{d}}_u^{ik} \sin \Omega t \quad (96)$$

die gleiche Erregung in  $O_k$  in  $\mathbf{e}_{kv}$  - Richtung die Bewegung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{a}_v^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{a}}_v^{ik} \sin \Omega t \quad \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{d}_v^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{d}}_v^{ik} \sin \Omega t \quad (97)$$

Eine Momentenerregung  $l_0 \cos \Omega t$  mit  $l_0 = 1$  in  $O_k$  in  $\mathbf{e}_{ku}$  - Richtung bewirke in  $O_i$  die stationäre Bewegung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{c}_u^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{c}}_u^{ik} \sin \Omega t \quad \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{b}_u^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{b}}_u^{ik} \sin \Omega t \quad (98)$$

die gleiche Erregung in  $O_k$  in  $\mathbf{e}_{kv}$  - Richtung die Bewegung

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{c}_v^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{c}}_v^{ik} \sin \Omega t \quad \boldsymbol{\psi}_i = \mathbf{b}_v^{ik} \cos \Omega t + \bar{\mathbf{b}}_v^{ik} \sin \Omega t \quad (99)$$

Für ein konservatives lineares Schwingungssystem sind von den vektoriellen Einflußkoeffizienten  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  mit den entsprechenden Indizes nur diejenigen ohne Querstrich von Null verschieden. Eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfung des Schwingungssystems beeinflusst diese Größen und verursacht darüber hinaus eine Phasenverschiebung der Frequenz-Antwort gegenüber der Erregung, die durch die mit einem Querstrich gekennzeichneten vektoriellen Einflußkoeffizienten erfaßt wird.

Der stationäre, eingeschwungene Zustand entsteht nun entsprechend den Gleichungen (63), (64) und (75) durch die Wirkung der Zentrifugalkraftkomponenten

$$f_{kx} = m_k \varepsilon_{kx}(\varphi) \Omega^2 \quad f_{ky} = m_k \varepsilon_{ky}(\varphi) \Omega^2 \quad (100)$$

und der Unwuchtmomentkomponenten

$$l_{kx} = J_{kyz}(\varphi) \Omega^2 \quad l_{ky} = -J_{kxz}(\varphi) \Omega^2 \quad (101)$$

Unter Beachtung der Gleichungen (11) und (53) folgt daraus (siehe auch Bild 4 und Bild 5):

$$f_{kr} = m_k \varepsilon_{kr} \Omega^2 \quad f_{ks} = m_k \varepsilon_{ks} \Omega^2 \quad (102)$$

$$l_{kr} = J_{ksz} \Omega^2 \quad l_{ks} = -J_{krz} \Omega^2 \quad (103)$$

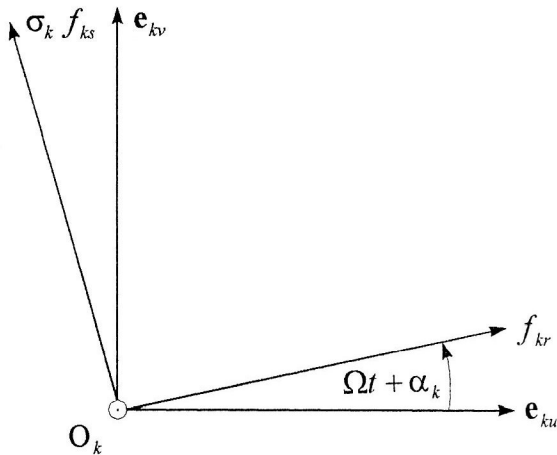


Bild 4. Zentrifugalkraft

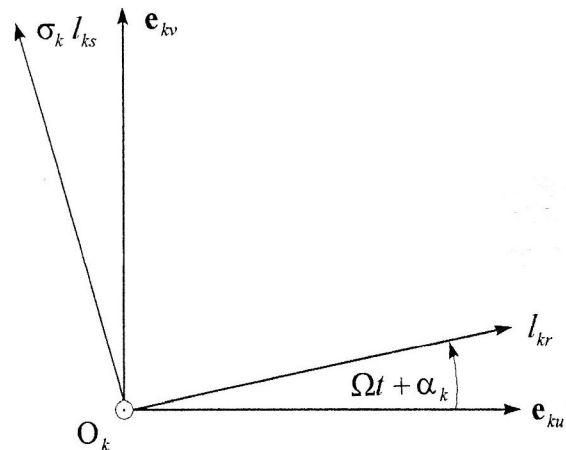


Bild 5. Unwuchtmoment

Um eine kompaktere Darstellung des Vibrationsmomentes zu erreichen, wird für die Kräfte und Momente sowie für die Verschiebungen und Verdrehungen wie folgt eine einheitliche Darstellung eingeführt:

$$q_{kr} := f_{kr} \quad q_{m+k,r} := l_{kr} \quad (104)$$

$$q_{ks} := f_{ks} \quad q_{m+k,s} := l_{ks} \quad k = 1(1)m$$

$$\mathbf{y}_i := \mathbf{r}_i \quad \mathbf{y}_{m+i} := \boldsymbol{\psi}_i \quad i = 1(1)m \quad (105)$$

Damit besteht die Möglichkeit, auch die vektoriellen harmonischen Einflußkoeffizienten gemäß

$$\mathbf{h}_u^{ik} := \mathbf{a}_u^{ik} \quad \mathbf{h}_u^{m+i,k} := \mathbf{d}_u^{ik} \quad \mathbf{h}_u^{i,m+k} := \mathbf{c}_u^{ik} \quad \mathbf{h}_u^{m+i,m+k} := \mathbf{b}_u^{ik} \quad (106)$$

$$i = 1(1)m \quad k = 1(1)m$$

einheitlich darzustellen. Für die Koeffizienten mit dem Index  $v$  und für die mit Querstrich sollen zu den Gleichungen (106) völlig analoge Beziehungen gelten.

Damit werden also Kräfte und Momente zu verallgemeinerten Kräften sowie Verschiebungen und Verdrehungen zu verallgemeinerten Verschiebungen zusammengefaßt. Es soll jedoch berücksichtigt werden, daß  $f_{kr}$  und  $l_{kr}$  jeweils am gleichen Punkt  $O_k$  angreifen sowie  $\mathbf{y}_i$  und  $\boldsymbol{\psi}_i$  jeweils am gleichen Punkt  $O_i$  auftreten. Mit den eingeführten Größen läßt sich die Gesamtantwort an der Stelle  $O_i$  bzw. ihre zweite zeitliche Ableitung wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} [\ddot{\mathbf{y}}_i]_0 = -\Omega^2 [\mathbf{y}_i]_0 = -\Omega^2 \sum_{k=1}^{2m} & \left\{ q_{kr} \left[ (\mathbf{h}_u^{ik} - \bar{\mathbf{h}}_v^{ik}) \cos(\Omega t + \alpha_k) + (\mathbf{h}_v^{ik} + \bar{\mathbf{h}}_u^{ik}) \sin(\Omega t + \alpha_k) \right] \right. \\ & \left. + \sigma_k q_s^k \left[ (\mathbf{h}_v^{ik} + \bar{\mathbf{h}}_u^{ik}) \cos(\Omega t + \alpha_k) - (\mathbf{h}_u^{ik} - \bar{\mathbf{h}}_v^{ik}) \sin(\Omega t + \alpha_k) \right] \right\} \\ & i = 1(1)2m \end{aligned} \quad (107)$$

Nach Einsetzen in Gleichung (83) unter Beachtung der Gleichungen (102) und (103) ist für die Vibrationsmomente folgende Zerlegung möglich:

$$V_i = V_i^r + V_i^\psi \quad i = 1(1)m \quad (108)$$

mit

$$V_i^r = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T \left[ (-\mathbf{e}_{is}^T f_{ir} + \mathbf{e}_{ir}^T f_{is}) \mathbf{r}_i \right]_0 dt \quad (109)$$

$$V_i^\psi = \sigma_i \frac{1}{T} \int_0^T \left[ (-\mathbf{e}_{is}^T l_{ir} + \mathbf{e}_{ir}^T l_{is}) \boldsymbol{\psi}_i \right]_0 dt \quad (110)$$

Die Größe  $V_i^r$  ist der Anteil des Vibrationsmomentes infolge der Translation von  $O_i$ , die Größe  $V_i^\psi$  der Anteil infolge der Rotation an der Stelle  $O_i$ . Die Größen  $\mathbf{r}_i$  und  $\boldsymbol{\psi}_i$  sind jedoch beide sowohl von den Zentrifugalkräften als auch von den Unwuchtmomenten abhängig. Aus den Beziehungen (109) und (110) folgt, daß bei nur statisch unwichtigen Rotoren die Drehschwingungen  $\boldsymbol{\psi}_i(t)$  und bei nur dynamisch unwichtigen Rotoren die translatorischen Schwingungen  $\mathbf{r}_i(t)$  der Rotorachsen keinen Beitrag zu den Vibrationsmomenten liefern.

Mit (siehe Bild 3)

$$(\mathbf{e}_{ir})_0 = \mathbf{e}_{iu} \cos(\Omega t + \alpha_i) + \mathbf{e}_{iv} \sin(\Omega t + \alpha_i) \quad (111)$$

$$(\mathbf{e}_{is})_0 = \sigma_i \left[ -\mathbf{e}_{iu} \sin(\Omega t + \alpha_i) + \mathbf{e}_{iv} \cos(\Omega t + \alpha_i) \right] \quad (112)$$

folgt

$$\begin{aligned} V_i^r = \frac{1}{T} \int_0^T & \left[ \left\{ \mathbf{e}_{iu}^T \sin(\Omega t + \alpha_i) - \mathbf{e}_{iv}^T \cos(\Omega t + \alpha_i) \right\} q_{ir} \mathbf{y}_i + \left\{ \mathbf{e}_{iu}^T \cos(\Omega t + \alpha_i) + \mathbf{e}_{iv}^T \sin(\Omega t + \alpha_i) \right\} \sigma_i q_{is} \mathbf{y}_i \right]_0 dt \\ & i = 1(1)m \end{aligned} \quad (113)$$

Unter Beachtung von

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\Omega t + \alpha_i) \sin(\Omega t + \alpha_k) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\Omega t + \alpha_i) \cos(\Omega t + \alpha_k) dt = \frac{1}{2} \cos(\alpha_i - \alpha_k)$$

und

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin(\Omega t + \alpha_i) \cos(\Omega t + \alpha_k) dt = \frac{1}{2} \sin(\alpha_i - \alpha_k)$$

findet man nach Ausführung der Integration schließlich

$$V_i^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \left\{ \left[ \mathbf{e}_{iu}^T (\mathbf{h}_u^{ik} - \bar{\mathbf{h}}_u^{ik}) + \mathbf{e}_{iv}^T (\mathbf{h}_v^{ik} + \bar{\mathbf{h}}_v^{ik}) \right] \left[ (q_{ir} q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) \right] \right. \\ \left. - \left[ \mathbf{e}_{iv}^T (\mathbf{h}_u^{ik} - \bar{\mathbf{h}}_v^{ik}) - \mathbf{e}_{iu}^T (\mathbf{h}_v^{ik} + \bar{\mathbf{h}}_u^{ik}) \right] \left[ (q_{ir} q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) - (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) \right] \right\} \\ i = 1(1)m \quad (114)$$

Beachtet man

$$\sigma_{m+i} = \sigma_i \quad \mathbf{e}_{u,m+i} = \mathbf{e}_{ui} \quad \mathbf{e}_{v,m+i} = \mathbf{e}_{vi} \quad \alpha_{m+i} = \alpha_i \quad (115)$$

so läßt sich der durch die Drehschwingungen  $\psi_i$  bedingte zweite Anteil des Vibrationsmomentes wie folgt darstellen:

$$V_i^\psi = V_{m+i}^r \quad (116)$$

Mit Gleichung (108) ist dann das gesamte Vibrationsmoment dargestellt.

Im folgenden sollen noch Bezeichnungen für die  $u$ - und die  $v$ -Komponenten der vektoriellen harmonischen Einflußkoeffizienten eingeführt werden:

$$H_{uu}^{ik} = \mathbf{e}_{iu}^T \mathbf{h}_u^{ik} \quad H_{vv}^{ik} = \mathbf{e}_{iv}^T \mathbf{h}_v^{ik} \\ H_{uv}^{ik} = \mathbf{e}_{iv}^T \mathbf{h}_u^{ik} \quad H_{vu}^{ik} = \mathbf{e}_{iu}^T \mathbf{h}_v^{ik} \quad i = 1(1)2m \quad k = 1(1)2m \quad (117)$$

Ganz entsprechende Bezeichnungen werden für die quergestrichenen Größen definiert. Diese Komponenten werden in [1], [2] als "harmonische Einflußkoeffizienten zweiter Art" bezeichnet, im Unterschied zu den in [3] für die Selbstsynchronisation verwendeten "harmonischen Einflußkoeffizienten erster Art" in Form von Amplitude und Phasendifferenz.

Die harmonischen Einflußkoeffizienten 2. Art stellen offenbar nichts anderes dar als bestimmte Elemente der Frequenzgangmatrix. Für sie gelten die folgenden Symmetriegesetze:

$$H_{uu}^{ik} = H_{uu}^{ki} \quad H_{vv}^{ik} = H_{vv}^{ki} \quad H_{uv}^{ik} = H_{uv}^{ki} \quad i = 1(1)2m \quad k = 1(1)2m \quad (118)$$

Ganz entsprechende Beziehungen gelten für die quergestrichenen Größen. Mit diesen Größen erhält man für die Vibrationsmomente anstelle von (114) die alternative, völlig gleichwertige Darstellung:

$$V_i^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \left\{ \left( H_{uu}^{ik} - \bar{H}_{vu}^{ik} + H_{vv}^{ik} + \bar{H}_{uv}^{ik} \right) \left[ (q_{ir} q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) \right] \right. \\ \left. - \left( H_{uv}^{ik} - \bar{H}_{vv}^{ik} - H_{vu}^{ik} - \bar{H}_{uu}^{ik} \right) \left[ (q_{ir} q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) - (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) \right] \right\} \\ i = 1(1)m \quad (119)$$

## 7 Auswertung der Existenz- und Stabilitätsbedingungen für spezielle Fälle

Zerlegt man das Vibrationsmoment (108) mit (116) und (119) gemäß

$$V_i = \hat{V}_i + \bar{V}_i \quad (120)$$

in die von den harmonischen Einflußkoeffizienten zweiter Art ohne bzw. mit Querstrich abhängigen Anteile  $\hat{V}_i$  bzw.  $\bar{V}_i$ , so gilt:

$$\hat{V}_i = \hat{V}_i^r + \hat{V}_i^\psi \quad \bar{V}_i = \bar{V}_i^r + \bar{V}_i^\psi \quad (121)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{V}_i^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \{ & (H_{uu}^{ik} + H_{vv}^{ik}) [(q_{ir}q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k)] \\ & - (H_{uv}^{ik} - H_{vu}^{ik}) [(q_{ir}q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) - (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k)] \} \end{aligned} \quad (122)$$

$$\begin{aligned} \bar{V}_i^r = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2m} \{ & (\bar{H}_{uv}^{ik} - \bar{H}_{vu}^{ik}) [(q_{ir}q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k) + (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k)] \\ & + (\bar{H}_{uu}^{ik} + \bar{H}_{vv}^{ik}) [(q_{ir}q_{kr} + \sigma_i q_{is} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_i - \alpha_k) - (\sigma_i q_{is} q_{kr} - q_{ir} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_i - \alpha_k)] \} \end{aligned} \quad (123)$$

$$\hat{V}_i^\psi = \hat{V}_{m+i}^r \quad \bar{V}_i^\psi = \bar{V}_{m+i}^r \quad i = 1(1)m \quad (124)$$

Unter Beachtung der Symmetriegesetze (118) findet man

$$\frac{\partial \hat{V}_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial \hat{V}_j}{\partial \alpha_i} \quad (125)$$

$$\frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \alpha_j} = -\frac{\partial \bar{V}_j}{\partial \alpha_i} \quad i = 1(1)m \quad (126)$$

Die Gleichungen (125) sind die Integrabilitätsbedingungen für die Existenz einer Funktion  $\Lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , aus der sich die Vibrationsmomente für konservatives Schwingungssystem gemäß

$$\hat{V}_i = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_i} \quad (127)$$

bestimmen lassen. Diese Funktion hat offenbar die Gestalt

$$\begin{aligned} \Lambda_0 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2m} \sum_{k=j+1}^{2m} \{ & (H_{uu}^{jk} + H_{vv}^{jk}) [(q_{jr}q_{kr} + \sigma_j q_{js} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_j - \alpha_k) - (\sigma_j q_{js} q_{kr} - q_{jr} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_j - \alpha_k)] \\ & - (H_{uv}^{jk} - H_{vu}^{jk}) [-(q_{jr}q_{kr} + \sigma_j q_{js} \sigma_k q_{ks}) \sin(\alpha_j - \alpha_k) - (\sigma_j q_{js} q_{kr} - q_{jr} \sigma_k q_{ks}) \cos(\alpha_j - \alpha_k)] \} + C \end{aligned} \quad (128)$$

mit  $\alpha_{m+i} = \alpha_i$ ,  $i = 1(1)m$  und  $C$  als einem von  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  unabhängigen Glied. (Ohne Beweis sei erwähnt, daß  $\Lambda_0$  als Mittelwert der Lagrangeschen Funktion des Schwingungssystems für die erzeugende Lösung gedeutet werden kann.)

Da  $\Lambda_0$  nur von den Differenzen der  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  abhängt, gilt für beliebiges  $\alpha_0$ :

$$\Lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \Lambda_0(\alpha_1 + \alpha_0, \dots, \alpha_m + \alpha_0) \quad (129)$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_0} = 0 \quad (130)$$

Aus den Gleichungen (88), (127) und (130) folgt für ein konservatives Schwingungssystem

$$\sum_{i=1}^m k_i P_i = \sum_{i=1}^m \left[ k_i (\Omega_i - \Omega) - \frac{\partial \Lambda_0}{\partial \alpha_i} \right] = \sum_{i=1}^m k_i (\Omega_i - \Omega) = 0 \quad (131)$$

d. h.

$$\Omega = \frac{1}{k_{ges}} \sum_{i=1}^m k_i \Omega_i \quad (132)$$

oder wegen der Gleichung (87)

$$\Omega = \frac{1}{k_{ges}} \sum_{i=1}^m \sigma_i L_i^o \quad \text{mit} \quad k_{ges} = \sum_{i=1}^m k_i \quad (133)$$

Die synchrone Winkelgeschwindigkeit kann in diesem Falle also unabhängig von den Phasendifferenzen berechnet werden. Bei bekanntem  $\Omega$  können dann aus  $m-1$  Gleichungen des Systems (88) die  $m-1$  Phasendifferenzen berechnet werden, womit wegen der Bedingung (92) die  $m$ -te Gleichung des Systems (88) identisch befriedigt wird.

Für Rotoren mit gleichen Partialwinkelgeschwindigkeiten auf einem konservativen Schwingungssystem lassen sich die Existenz- und Stabilitätsbedingungen für die selbstsynchronisierte Bewegung zu einer Extremwertaufgabe zusammenfassen. Existiert nämlich eine Funktion  $D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  so, daß gilt

$$P_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = -\frac{1}{k} \frac{\partial D(\alpha_1, \dots, \alpha_m)}{\partial \alpha_i}, \quad k = \text{konst.} \quad (134)$$

so wird durch die Existenzbedingungen (88) ein stationärer Wert von  $D$  bestimmt. Dieser ist ein Minimum (siehe z. B. [1]), wenn alle Wurzeln der Gleichung (89) negative Realteile haben.

Für

$$k_1 = k_2 = \dots = k_m = k \quad (135)$$

existiert im betrachteten Falle eine solche Funktion in der Gestalt

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = -k \sum_{i=1}^m \alpha_i (\Omega_i - \Omega) + \Lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (136)$$

und aus Gleichung (131) folgt

$$\Omega = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Omega_i \quad (137)$$

d. h.,  $\Omega$  ist der Mittelwert der Partialwinkelgeschwindigkeiten. Stimmen darüber hinaus sämtliche Momente  $\sigma_i L_i^0$  und damit nach Gleichung (87) sämtliche Partialwinkelgeschwindigkeiten überein,

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \dots = \Omega_m = \Omega \quad (138)$$

so folgt aus Gleichung (136):

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \Lambda_0(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad (139)$$

Wegen der mit Gleichung (92) begründeten Nullwurzel der Gleichung (89) wird  $D$  bzw.  $\Lambda_0$  im vorliegenden autonomen Fall (innere Selbstsynchronisation) nur im Raum von  $m-1$  Phasendifferenzen zu einem wirklichen Minimum.

Beschränkt man im vorliegenden Fall die Anzahl der Rotoren auf  $m = 2$ , so gilt nach den Gleichungen (93) und (94) die Stabilitätsbedingung

$$\lambda = \frac{\partial(P_1 - P_2)}{\partial\alpha_1} = \frac{\partial P_1}{\partial\alpha_1} - \frac{\partial P_2}{\partial\alpha_2} = 2 \frac{\partial P_1}{\partial\alpha_1} < 0 \quad (140)$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \Lambda_0}{\partial\alpha_1^2} < 0 \quad (141)$$

Daher können die Existenz- und die Stabilitätsbedingung in dem einfachsten Fall zweier Rotoren mit  $k_1 = k_2 = k$  und  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$  auf einem konservativen Schwingungssystem mit

$$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

in der einfachen Form

$$\Lambda_0(\alpha, 0) = \text{Minimum} \quad (142)$$

zusammengefaßt werden.

Mit

$$A_{uu}^{ik} := H_{uu}^{ik} \quad D_{uu}^{ik} := H_{uu}^{m+i,k} \quad C_{uu}^{ik} := H_{uu}^{i,m+k} \quad B_{uu}^{ik} := H_{uu}^{m+i,m+k} \quad (143)$$

analog den Gleichungen und analogen Bezeichnungen für die unteren Indizes  $vv, uv, vu$  kann  $\Lambda_0$  in diesem Fall in folgender Form ausführlich ausgeschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\alpha, 0) = & -\frac{1}{2} \left[ \left\{ \left( A_{uu}^{12} + A_{vv}^{12} \right) \cos\alpha + \left( A_{uv}^{12} - A_{vu}^{12} \right) \sin\alpha \right\} \left( f_{1r} f_{2r} + \sigma_1 f_{1s} \sigma_2 f_{2s} \right) \right. \\ & - \left\{ \left( A_{uu}^{12} + A_{vv}^{12} \right) \sin\alpha - \left( A_{uv}^{12} - A_{vu}^{12} \right) \cos\alpha \right\} \left( \sigma_1 f_{1s} f_{2r} - f_{1r} \sigma_2 f_{2s} \right) \\ & + \left\{ \left( C_{uu}^{12} + C_{vv}^{12} \right) \cos\alpha + \left( C_{uv}^{12} - C_{vu}^{12} \right) \sin\alpha \right\} \left( f_{1r} l_{2r} + \sigma_1 f_{1s} \sigma_2 l_{2s} \right) \\ & + \left\{ \left( C_{uu}^{12} + C_{vv}^{12} \right) \sin\alpha + \left( C_{uv}^{12} - C_{vu}^{12} \right) \cos\alpha \right\} \left( f_{1r} l_{2r} + \sigma_1 f_{1s} \sigma_2 l_{2s} \right) \\ & - \left\{ \left( C_{uu}^{12} + C_{vv}^{12} \right) \sin\alpha - \left( C_{uv}^{12} - C_{vu}^{12} \right) \cos\alpha \right\} \left( \sigma_1 f_{1s} l_{2r} - f_{1r} \sigma_2 l_{2s} \right) \\ & + \left\{ \left( D_{uu}^{12} + D_{vv}^{12} \right) \cos\alpha + \left( D_{uv}^{12} - D_{vu}^{12} \right) \sin\alpha \right\} \left( l_{1r} f_{2r} + \sigma_1 l_{1s} \sigma_2 f_{2s} \right) \\ & - \left\{ \left( D_{uu}^{12} + D_{vv}^{12} \right) \sin\alpha - \left( D_{uv}^{12} - D_{vu}^{12} \right) \cos\alpha \right\} \left( \sigma_1 l_{1s} f_{2r} - l_{1r} \sigma_2 f_{2s} \right) \\ & + \left\{ \left( B_{uu}^{12} + B_{vv}^{12} \right) \cos\alpha + \left( B_{uv}^{12} - B_{vu}^{12} \right) \sin\alpha \right\} \left( l_{1r} l_{2r} + \sigma_1 l_{1s} \sigma_2 l_{2s} \right) \\ & - \left. \left\{ \left( B_{uu}^{12} + B_{vv}^{12} \right) \sin\alpha - \left( B_{uv}^{12} - B_{vu}^{12} \right) \cos\alpha \right\} \left( \sigma_1 l_{1s} l_{2r} - l_{1r} \sigma_2 l_{2s} \right) \right] \quad (144) \end{aligned}$$



Hier ist noch eine Vielfalt von verschiedenen statisch und dynamisch unwichtigen Rotoren erfaßt.

Betrachtet man nur statisch unwichtige Rotoren, so wird man  $\mathbf{e}_{1r}$  bzw.  $\mathbf{e}_{2r}$  durch die Massenmittelpunkte  $C_1$  bzw.  $C_2$  legen (siehe Bild 2), und Beziehung (144) vereinfacht sich zu

$$\Lambda_0(\alpha, 0) = -\frac{1}{2} f_{1r} f_{2r} \left\{ (A_{uu}^{12} + A_{vv}^{12}) \cos \alpha + (A_{uv}^{12} - A_{vu}^{12}) \sin \alpha \right\} \quad (145)$$

Analog dazu kann man für nur dynamisch unwichtige Rotoren in dem Sonderfall, daß eine Hauptträgheitsachse normal zur Rotorachse gerichtet ist,  $\mathbf{e}_{1r}$  bzw.  $\mathbf{e}_{2r}$  so einführen, daß

$$J_{1rz} = 0, \quad J_{2rz} = 0 \quad (146)$$

und damit nach Gleichung (103)

$$l_{1s} = 0, \quad l_{2s} = 0 \quad (147)$$

gilt, und Beziehung (144) vereinfacht sich zu

$$\Lambda_0(\alpha, 0) = -\frac{1}{2} l_{1r} l_{2r} \left\{ (B_{uu}^{12} + B_{vv}^{12}) \cos \alpha + (B_{uv}^{12} - B_{vu}^{12}) \sin \alpha \right\} \quad (148)$$

## 8 Einfache Beispiele

Für die am Schluß von Abschnitt 7 betrachteten Sonderfälle sollen die einfachsten Beispiele betrachtet werden. Für den nur statisch unwichtigen Rotor wird die symbolische Darstellung nach Bild 6 gewählt.

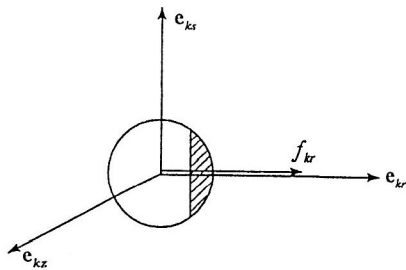


Bild 6. Statische Unwucht in der Nullstellung

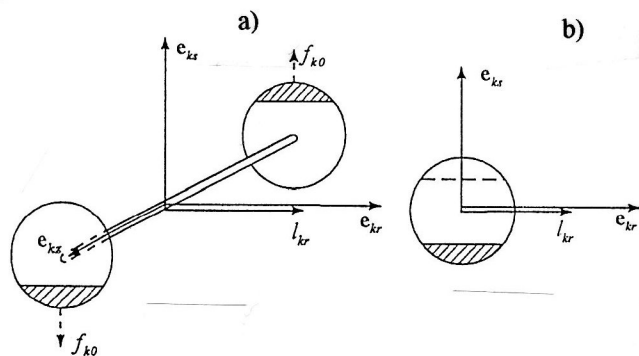


Bild 7. Dynamische Unwucht in der Nullstellung

Bild 7a zeigt eine dem am Schluß von Abschnitt 7 erwähnten Sonderfall entsprechende dynamische Unwucht in Form zweier starr miteinander verbundener statischer Unwuchten. Für diesen Körper gilt offensichtlich

$$J_{krs} = 0 \quad J_{krz} = 0 \quad J_{ksz} > 0 \quad (149)$$

d.h.,  $\mathbf{e}_{kr}$  ist Hauptachsenrichtung. Demzufolge gilt nach Gleichung (103)

$$l_{ks} = 0 \quad (150)$$

und  $I_{kr}$  hat - unabhängig vom Drehsinn des Rotors - die positive  $e_{kr}$ -Richtung. Dieser Richtungssinn des Unwuchtmomentes läßt sich anschaulich auch leicht aus dem Drehsinn des in Bild 7a durch die Kräfte  $f_{k0}$  angedeuteten Kräftepaars der beiden Zentrifugalkräfte der statischen Unwuchten ableiten.

Bei ebener Darstellung soll die dynamische Unwucht symbolisch nach Bild 7b dargestellt werden.

### Beispiel 1

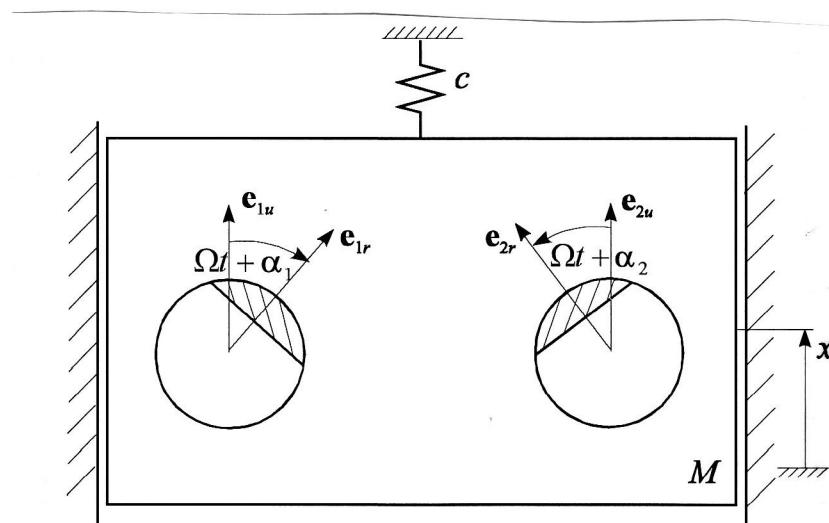


Bild 8. Selbstsynchronisation zweier statisch ungewichtiger Rotoren

Zwei gleiche, statisch ungewichtige Rotoren sollen einen linearen ungedämpften translatorischen Schwinger mit einem Freiheitsgrad zu Schwingungen erregen.

Nach den Gleichungen (142) und (145) lautet die Bedingung für die stabile synchronisierte Bewegung:

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{2} A_{uu} f_{1r} f_{2r} \cos \alpha = \text{Minimum} \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (151)$$

Die benötigte Frequenz-Anwort erhält man aus der Bewegungsgleichung

$$M\ddot{x} + cx = f_o \cos \Omega t \quad f_o = 1 \quad (152)$$

und ihrer stationären Lösung

$$x = \frac{1}{M(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t = A_{uu} \cos \Omega t \quad (153)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{c}{M} \quad (154)$$

zu

$$A_{uu} = \frac{1}{M(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (155)$$

Daher wird die Existenz- und Stabilitätsbedingung (151) im unterkritischen Bereich  $\Omega^2 < \omega^2$  durch die Winkeldifferenz  $\alpha = 0$  befriedigt. Es erfolgt eine Schwingungserregung durch die gleichphasigen vertikalen Fliehkraftkomponenten, während sich die horizontalen Fliehkraftkomponenten gegenseitig aufheben.

Im überkritischen Bereich  $\Omega^2 > \omega^2$  dagegen ist die stabile selbstsynchronisierte Bewegung durch die Winkeldifferenz  $\alpha = \pi$  bestimmt, und die Masse  $M$  bleibt in der der Rechnung zugrunde gelegten Näherung in Ruhe. Dabei überlagern sich die horizontalen Fliehkraftkomponenten, wodurch die vertikale Führung belastet wird. Rotieren beide Rotoren mit dem gleichen Drehsinn, so heben sich die horizontalen Fliehkräfte im Sinne des Kräftegleichgewichtes gegenseitig auf; die vertikale Führung wird aber durch ein harmonisch veränderliches Kräftepaar belastet.

### Beispiel 2

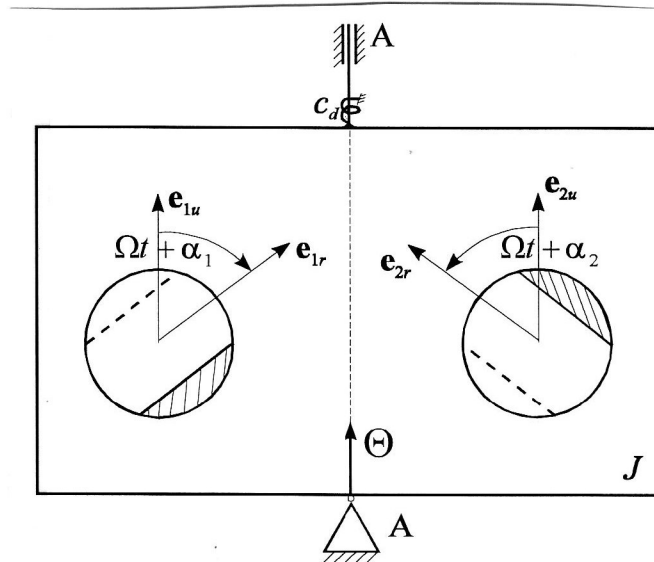


Bild 9. Selbstsynchronisation zweier dynamisch ungewichtiger Rotoren

Dieses Beispiel ist weitgehend das Analogon für dynamisch ungewichtige Rotoren zu Beispiel 1. Zwei gleiche dynamisch ungewichtige Rotoren sollen einen linearen ungedämpften Drehschwinger mit dem auf die Drehachse AA bezogenen Massenträgheitsmoment  $J$  und der Drehfederkonstante  $c_d$  zu Schwingungen erregen. Nach den Gleichungen (142) und (148) lautet die Bedingung für die stabile synchronisierte Bewegung:

$$\Lambda_0 = -\frac{1}{2} B_{uu} l_{1r} l_{2r} \cos \alpha = \text{Minimum} \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2 \quad (156)$$

Die benötigte Frequenz-Anwort erhält man aus der Bewegungsgleichung

$$J \ddot{\theta} + c_d \theta = l_0 \cos \Omega t \quad l_0 = 1 \quad (157)$$

und ihrer stationären Lösung

$$\theta = \frac{1}{J(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t = B_{uu} \cos \Omega t \quad (158)$$

mit

$$\omega^2 = \frac{c_d}{J} \quad (159)$$

zu

$$B_{uu} = \frac{1}{J(\omega^2 - \Omega^2)} \quad (160)$$

Es folgt wieder  $\alpha = 0$  für den unterkritischen und  $\alpha = \pi$  für den überkritischen Bereich. Im unterkritischen Bereich heben sich die horizontalen Momentenkomponenten gegenseitig auf. Im überkritischen Bereich überlagern sie sich, so daß sie die Lagerung belasten; gleicher Drehsinn beider Rotoren führt hier aber dazu, daß sich die gesamten Unwuchtmomente gegenseitig aufheben.

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

Die im Teil I (Sperling, 1994) hergeleiteten Existenz- und Stabilitätsbedingungen für die selbstsynchronisierte Bewegung allgemeiner (d.h. statisch und dynamisch unwuchtiger) Rotoren wurden in Abhängigkeit von "harmonischen Einflußkoeffizienten" (bestimmten Frequenzgängen) dargestellt und für speziellere Fälle weiter aufbereitet. Zum Schluß wurde die Methode an Hand der einfachsten, seit langem bekannten Anordnung für zwei statisch unwuchtige und an einer neuen Anordnung für zwei dynamisch unwuchtige Rotoren demonstriert.

In Zukunft sollen aus der Vielfalt der Kombinationsmöglichkeiten unterschiedlicher Rotoren theoretisch und praktisch interessante Fälle ausfindig gemacht werden. Darüber hinaus sollen Untersuchungen zu Dämpfungseinflüssen, zu Rotoren mit unterschiedlichen Partialwinkelgeschwindigkeiten (z.B. Ausfall des Antriebs eines Rotors) und zur Selbstsynchronisation von mehr als zwei Rotoren folgen. Durch numerische Untersuchungen können zusätzliche Glieder der Differentialgleichungen und weitere, bisher nicht erfaßte Einflüsse (wie z.B. die Eigendynamik der Antriebe) berücksichtigt sowie instationäre Vorgänge analysiert werden.

Besonders wichtig sind künftige experimentelle Untersuchungen zur Überprüfung der Ergebnisse und gegebenenfalls zur Korrektur der Modelle der analytischen und der numerischen Untersuchungen.

## Literatur

10. Sperling, L.: Selbstsynchronisation statisch und dynamisch unwuchtiger Vibratoren. Teil I: Grundlagen, Technische Mechanik, 14, 1, (1994), 61-76.

---

*Anschrift:* Professor Dr.-Ing. habil. Lutz Sperling, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg