

Zur überlagerten Torsions- und Zugbelastung von Wellen

Z. Szolgay

Die Arbeit beschreibt das Verhalten von zylindrischen Rohren und Stäben, die gleichzeitig auf Torsion und Zug beansprucht sind, mittels einer quadratischen Theorie, welche genauer ist als die übliche lineare Theorie. Die Verwendung der quadratischen Theorie zeigt, daß unter gewissen Bedingungen auch eine Längenänderung aufgrund der Torsionsbelastung eintritt. Der Verformungs- und Spannungszustand der Welle wird ebenfalls untersucht. Die theoretischen Ergebnisse werden mit den von Poynting beschriebenen experimentellen Daten verglichen.

1 Einleitung

Ziel der Arbeit ist es, den Verzerrungs- und den Spannungszustand von Wellen mit konstantem kreis- bzw. kreisringförmigem Querschnitt bei überlagerter Torsions- und Zugbelastung zu untersuchen. Dabei wird die lineare Festkörpermechanik verlassen und eine erste nichtlineare Erweiterung angewendet. Die wesentlichen Annahmen im Rahmen dieses Konzepts sind unter Bedingungen B.1 bis B.7 zusammengefaßt.

Für das mechanische Modell gelte:

B.1: Das Material der Welle ist homogen und isotrop.

B.2: Es existieren keine Mantelflächenbelastungen sowie Volumenbelastungen. An den beiden Endquerschnitten treten kreissymmetrische Schubspannungen (Torsion) sowie Normalspannungen (Zug) auf.

2 Koordinatendefinitionen und Bezeichnungen

Die Untersuchungen werden in einem Zylinderkoordinatensystem R, Φ, Z durchgeführt, dessen Z -Achse mit der Rotationsachse der Welle identisch ist. Im Punkt $P (R, \Phi, Z)$ schneiden sich die Koordinatenlinien $\Phi, Z = \text{konstant}$; $Z, R = \text{konstant}$; $R\Phi = \text{konstant}$ rechtwinklig und ihre Bogenlängen sind $S_1 = R$, $S_2 = R\Phi$, $S_3 = Z$. Weiterhin gilt: $dS_1 = dR$, $dS_2 = R d\Phi$, $dS_3 = dZ$.

Mit Hilfe der im Punkt P definierten lokalen und zueinander rechtwinkligen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\Phi, \mathbf{e}_Z$ (Bild 1) läßt sich der Ortsvektor des Punktes P in die Form fassen

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R + Z\mathbf{e}_Z \quad (2.1)$$

Die genannten Einheitsvektoren sind differenzierbare Funktionen der Koordinaten R, Φ, Z .

$$\frac{\partial \mathbf{e}_R}{\partial \Phi} = \mathbf{e}_\Phi \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\Phi}{\partial \Phi} = -\mathbf{e}_R \quad (2.2)$$

Alle weiteren partiellen Ableitungen sind identisch Null. Aus Gleichung (2.2) folgt, wie bekannt (z. B. Béda et al, 1986), daß die tangentialen Einheitsvektoren $\mathbf{G}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s_i}$ der Koordinatenlinien ($i = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{e}_R, \quad \mathbf{G}_2 = \mathbf{e}_\Phi, \quad \mathbf{G}_3 = \mathbf{e}_Z \quad (2.3)$$

sind.

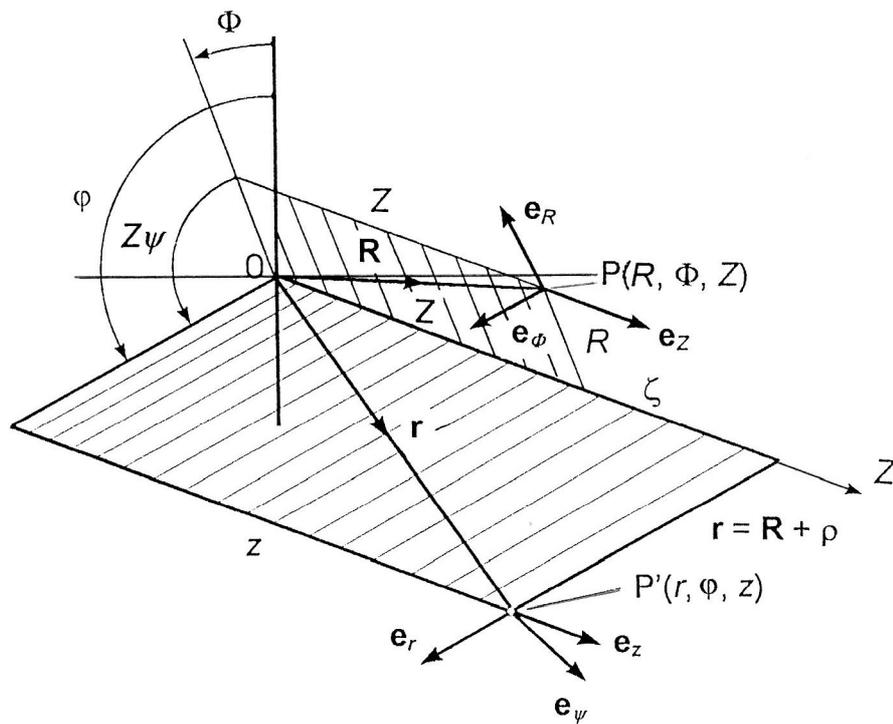


Bild 1. Die Ortsvektoren \mathbf{R} und \mathbf{r}

Es sei P' ein von P unterschiedlicher Punkt des Raumes. Bezeichnen wir die Koordinaten von P' , zur Unterscheidung, mit r, φ, z . Die tangentialen Einheitsvektoren der Koordinatenlinien durch P' seien $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$. Mit Hilfe derselben ist der entsprechende Ortsvektor (Bild 1)

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z \quad (2.4)$$

Es seien $\rho, \alpha = Z\psi, \zeta$ die Koordinatenunterschiede zwischen r, φ, z und R, Φ, Z . So bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r &= R + \rho \\ \varphi &= \Phi + \alpha = \Phi + Z\psi \\ z &= Z + \zeta \end{aligned} \quad (2.5)$$

Mit ψ kann man für die Einheitsvektoren auch die einfache Transformation

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos Z\psi & \sin Z\psi & 0 \\ -\sin Z\psi & \cos Z\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_R \\ \mathbf{e}_\Phi \\ \mathbf{e}_Z \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

formulieren. Nehmen wir an, daß sich der Punkt P der undeformierten Welle im Punkt P' des Koordinatensystems befindet und während der Deformation in die Lage P' kommt. Die Größen ρ , $Z\psi$, ζ sind in diesem Falle die Verschiebungskoordinaten des Punktes P, die als Funktionen von R und Z betrachtet werden dürfen. Von Φ sind sie nicht abhängig wegen der Kreissymmetrie der Querschnitte und der Bedingung B.2:

$$\rho = \rho(R, Z), \quad \psi = \psi(R, Z), \quad \zeta = \zeta(R, Z) \quad (2.7)$$

Im folgenden spielen auch die partiellen Ableitungen von ρ , ψ , ζ eine Rolle. Wir gebrauchen dafür die Bezeichnungen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial R} = \rho_R, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial Z} = \zeta_Z \text{ usw.} \quad (2.8)$$

Wenn wir die Koordinatenlinien auf die Welle übertragen, so werden diese als Linien des Kontinuums deformiert. Die ursprünglichen Bogenlängen S_i gehen dann in die Längen s_i über ($i = 1, 2, 3$). In der Umgebung von P' ist $ds_i = dS_i(1 + \varepsilon_i)$, wobei ε_i die auf die Längeneinheit bezogene Dehnung der i -ten Koordinatenlinie ist. Die tangentialen Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial s_i$ der deformierten Koordinatenlinien sind zueinander nicht mehr orthogonal. Die drei tangentialen Vektoren

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial S_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial S_i} = \mathbf{e}_i(1 + \varepsilon_i) \quad (2.9)$$

charakterisieren dann nicht nur die Winkelverzerrungen, sondern auch die Dehnungen.

3 Bedingungen für die Deformation

Wegen der Bedingung B.2 kann man annehmen, daß die Deformation der Welle, in genügend großer Entfernung von den Endquerschnitten, die folgenden Bedingungen erfüllt:

B.3: Die Querschnitte bleiben zur Z -Achse orthogonale Ebenen und werden in der Ebene gleichförmig deformiert. Die Radien bleiben Geraden.

Aus dieser Bedingung folgt, daß der Wert von ρ nicht von Z abhängt und die Werte von α und ζ nicht von R abhängen.

B.4: Die spezifischen Verschiebungen und Verdrehungen der Querschnitte entlang der Z-Achse, bzw. um die Z-Achse sind konstant:

$$\begin{aligned}\zeta_Z &= k = \text{konstant} \\ \alpha_Z &= \psi = \text{konstant}\end{aligned}\tag{3.1}$$

und an der Stelle $Z = 0$ sind $\zeta = \alpha = 0$.

Es wird also eine Deformation untersucht, wofür die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned}\rho &= \rho(R) \\ \psi &= \text{konstant} (\alpha = \psi Z) \\ k &= \text{konstant} (\zeta = kZ)\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

gültig sind.

Mit Rücksicht auf diese Bedingungen und auf die Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6), sind die Vektoren \mathbf{g}_i in diesem speziellen Fall die folgenden:

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{g}_1 &= (1 + \rho_R) \mathbf{e}_r \\ \mathbf{g}_2 &= \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{g}_3 &= \left(1 + \frac{\rho}{R}\right) R \psi \mathbf{e}_\varphi + (1 + \zeta_z) \mathbf{e}_z\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

4 Der Verzerrungstensor

Mit Hilfe von \mathbf{G}_i und \mathbf{g}_i werden die metrischen Tensoren gebildet:

$$G_{ik} = \mathbf{G}_i \mathbf{G}_k \quad \text{und} \quad g_{ik} = \mathbf{g}_i \mathbf{g}_k\tag{4.1}$$

G_{ik} ist der Einheitstensor, und g_{ik} ist eine nichtlineare Funktion der Koordinaten ρ, ψ, z . Das Linearisieren dieser Funktionen führt zu der linearen (linearisierten) Deformationstheorie. In demjenigen Bereich der Deformationen, wo die lineare Theorie die wirklichen Deformationen genügend genau beschreibt, wird über „kleine Deformationen“ gesprochen. Die „genügende Genauigkeit“ ist eine Definitionsfrage.

B.5: Die folgenden Untersuchungen bleiben im Bereich der oben beschriebenen kleinen Deformationen.

Die Bedingung B.5 macht es möglich, den Verzerrungs- und den Spannungstensor auf den undeformierten Zustand des Körpers zu beziehen. Darum werden im weiteren der Lagrangesche Verzerrungstensor und der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor verwendet. Der Lagrangesche Verzerrungstensor

$$L_{ik} = \frac{(g_{ik} - G_{ik})}{2}\tag{4.2}$$

wird in der teilweise von der linearen Theorie übernommenen Form angewendet:

$$\left. \begin{aligned} L_{ik} &= \varepsilon_i = \sqrt{g_{ik}} - 1 & (i = k) \\ L_{ik} &= \frac{g_{ik}}{2} & (i \neq k) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Im weiteren wird eine „quadratische“ Theorie, als die einfachste Erweiterung der linearen Theorie, verwendet, die durch die folgende Regel definiert ist:

B.6: Zwei Größen, die Funktionen von ρ , ψ , ζ bzw. derer Ableitungen sind, werden als gleichwertig betrachtet, wenn sie sich voneinander nur in Termen unterscheiden, die dritte oder höhere Potenzen der Verschiebungs koordinaten oder derer Ableitungen enthalten. Diese Terme werden sinngemäß als Null betrachtet.

Das Einhalten dieser Regel ist am einfachsten, wenn die untersuchten Funktionen an den Nullstellen ihrer Argumente - wie auch hier - in Taylor-Reihen entwickelt werden können.

5 Die Tensorfelder der konkreten Aufgabe

Bei Kenntnis der Vektoren \mathbf{g}_i sind die Elemente des metrischen Tensors g_{ik} einfach zu errechnen.

$$\begin{aligned} g_{11} &= (1 + \rho_R)^2 \\ g_{22} &= \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^2 \\ g_{33} &= \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^2 R^2 \psi^2 + (1 + \zeta_z)^2 \cong R^2 \psi^2 + (1 + \zeta_z)^2 \\ g_{12} &= g_{21} = 0 \\ g_{23} &= g_{32} = \left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^2 R \psi \cong R \psi + 2\rho \psi \\ g_{31} &= g_{13} = 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Weil der Tensor G_{ik} Einheitstensor ist, sind die Elemente des Verzerrungstensors die folgenden:

$$L_{11} = \varepsilon_1 = \sqrt{(1 + \rho_R)^2} - 1 = \rho_R$$

$$L_{22} = \varepsilon_2 = \sqrt{\left(1 + \frac{\rho}{R}\right)^2} - 1 = \frac{\rho}{R}$$

$$L_{33} = \varepsilon_3 = \sqrt{\left[R^2 \Psi^2 + (1 + \zeta_z)^2\right]} - 1 = \frac{R^2 \Psi^2}{2} + \zeta_z$$
(5.2)

$$L_{12} = L_{21} = 0$$

$$L_{23} = L_{32} = 0$$

$$L_{31} = L_{13} = (R + 2\rho) \frac{\Psi}{2}$$

Die erste Skalarinvariante des Verzerrungstensors ist

$$L_1 = \rho_R + \frac{\rho}{R} + R^2 \frac{\Psi^2}{2} + \zeta_z$$
(5.3)

Es wird angenommen, daß

B.7: die Verbindung zwischen dem Spannungstensor und dem Verzerrungstensor die Form des allgemeinen Hookeschen Gesetzes beibehält.

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2G \left\{ \underline{\underline{L}} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} L_1 \underline{\underline{I}} \right\}$$
(5.4)

In diesem Sinne sind die Elemente des Spannungstensors:

$$\frac{\sigma_1}{2G} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \rho_R + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\frac{\rho}{R} + \frac{R^2 \Psi^2}{2} + \zeta_z \right)$$

$$\frac{\sigma_2}{2G} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{\rho}{R} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\rho_R + \frac{R^2 \Psi^2}{2} + \zeta_z \right)$$

$$\frac{\sigma_3}{2G} = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \left(\frac{R^2 \Psi^2}{2} + \zeta_z \right) + \frac{\nu}{(1-2\nu)} \left(\rho_R + \frac{\rho}{R} \right)$$
(5.5)

$$\frac{\tau_{23}}{2G} = (R + 2\rho) \frac{\Psi}{2}$$

$$\tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{13} = \tau_{31} = 0$$

6 Die Differentialgleichung von ρ

Die Funktion $\rho = \rho(R)$ wird aus der ersten Gleichgewichtsgleichung berechnet. Sie lautet:

$$\frac{d}{dR}(R\sigma_1) - \sigma_2 = \sigma_1 - \sigma_2 + R\sigma_{1R} = 0 \quad (6.1)$$

wobei $\sigma_{1R} = \frac{\partial\sigma_1}{\partial R}$ ist. Der Ausdruck $\sigma_1 - \sigma_2$ ist hier besonders einfach.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \rho_R - \frac{\rho}{R} \quad (6.2)$$

Weiterhin ist

$$\sigma_{1R} = \frac{1-\nu}{1-2\nu}\rho_{RR} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\rho_R}{R} - \frac{\rho}{R^2} + R\psi^2\right) \quad (6.3)$$

wobei ρ_{RR} die zweite Ableitung nach R bedeutet.

Zusammenfassend kommen wir auf eine einfache, gewöhnliche, lineare Differentialgleichung für ρ .

$$R\rho_{RR} + \rho_R - \frac{\rho}{R} = -\frac{\nu}{(1-\nu)}R^2\psi^2 \quad (6.4)$$

Die allgemeine Lösung derselben ist die folgende:

$$\rho = -\frac{1}{8}a_0R^3\psi^2 + C_1R + \frac{C_2}{R} \quad (6.5)$$

Hier ist $a_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$. Die Größen C_1 und C_2 sind Integrationskonstanten, die aus den jeweiligen

Randbedingungen zu errechnen sind. Diese lauten beim Kreisringquerschnitt:

$$\sigma_1(R_1) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_1(R_2) = 0 \quad (6.6)$$

und beim vollen Kreisquerschnitt:

$$\rho(0) = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_1(R_2) = 0 \quad (6.7)$$

Ohne konkrete Rechnungen kann man feststellen, daß C_1 und C_2 auch Funktionen von ζ_z sind.

Kennt man den Spannungszustand, kann man auch die in den Endquerschnitten auftretenden Zugkräfte und Torsionsmomente ausrechnen. Damit ist die gestellte Aufgabe eigentlich gelöst und es ist auch möglich, mit der dargestellten „quadratischen“ Methode numerische Rechnungen durchzuführen.

7 Vollquerschnitt, Beispiel und Folgerungen

7.1 Um die Übersicht nicht zu stören, wird auf die Angabe von Einzelheiten weitgehend verzichtet. Vor allem ist leicht einzusehen, daß aus der Randbedingung $\rho(0) = 0$ die Bedingungen $C_2 = 0$ und $\sigma_1(R_2) = 0$ folgen. Man erhält

$$\frac{1}{8}(1-2\nu)a_0R_2^2\psi^2 + \nu\zeta_z + C_1 = 0 \quad (7.1)$$

7.2 Werden in der Aufgabe ψ und ζ_z als unabhängige Parameter betrachtet, d.h. die spezifische Verdrehung ψ der Querschnitte und die spezifische Dehnung ζ_z der Wellenachse sind vorgeschrieben, dann bestimmen diese, mit Rücksicht auf Gleichung (7.1), die Funktion $\rho = \rho(R, \psi, \zeta_z)$ und dadurch den Verzerrungstensor sowie den Verschiebungszustand. Danach kann mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes auch der Spannungszustand angegeben werden. Weder der Verzerrungstensor, noch der Spannungstensor sind Funktionen der Koordinaten ϕ und Z .

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{L}}(R, \psi, \zeta_z) \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}(R, \psi, \zeta_z) \quad (7.2)$$

Wollen wir z. B. vorschreiben, daß die Länge der Wellenachse bei Einwirkung der Belastung keine Dehnung erleidet, also $\zeta_z = 0$ ist, dann stellt es sich heraus, daß zum Aufrechterhalten dieses Zustandes eine Verteilung

$$\sigma_3 = \frac{2G}{1-\nu} \left(R^2 - \frac{\nu^2}{2} R_2^2 \right) \psi^2 \quad (7.3)$$

der Spannung σ_3 notwendig ist. Bei $R = \frac{\nu}{\sqrt{2}} R_2$ ist $\sigma_3 = 0$.

Die notwendige Zugkraft ist dann

$$F = \int_{(A)} \sigma_3 dA = 2\pi \int_0^R \sigma_3 R dR = \frac{EAR_2^2\psi^2}{4} \quad (7.4)$$

wobei $A = \pi R_2^2$ die Fläche des Querschnittes ist. Dementsprechend ist der durchschnittliche Wert der Zugspannung

$$\sigma_{03} = \frac{F}{A} = \frac{1}{4} ER_2^2\psi^2 > 0 \quad (7.5)$$

7.3 Ist ζ_z nicht Null, dann bekommen wir nach ähnlichen Rechnungen:

$$\frac{\sigma_{03}}{E} = \frac{1}{4} R_2^2\psi^2 + \zeta_z \quad (7.6)$$

$$\zeta_z = \frac{\sigma_{03}}{E} - \frac{1}{4} R_2^2\psi^2 = \frac{F}{AE} - \frac{1}{4} R_2^2\psi^2 \quad (7.7)$$

Im letzteren Ausdruck treten die Wirkungen der Zug- bzw. der Torsionsbelastung getrennt auf. Die Wirkung des Zuges ist mit der der linearen Theorie identisch. Der Einfluß der Torsion ist aber nicht Null, wie bei der Saint-Venantschen Theorie, sondern sie wächst mit ψ quadratisch.

Grob gerechnet - wenn wir im Ausdruck von τ_{23} in Gleichung (5.5) ρ im Vergleich zu R vernachlässigen - ist

$$R\psi = \frac{\tau_{23}}{G}$$

Daraus folgt, daß dieser Einfluß neben den Materialeigenschaften allein vom $\tau_{23}(R_2) = \tau_{23\max}$ abhängt.

7.4 Numerisches Beispiel. In Verbindung mit der geschilderten „quadratischen“ Theorie kann auch die interessante Frage gestellt werden, ob es mit Hilfe dieser Theorie möglich ist, eine Erklärung für die Ergebnisse der bekannten Versuche von Poynting (1909, 1919) zu geben. Die folgende kurze numerische Rechnung beweist, daß diese Frage mit nein beantwortet werden muß. Die numerischen Ergebnisse sind nämlich die folgenden:

Poynting hat seine Versuche unter anderem mit einer Klaviersaite der Länge $l = 1605$ mm und des Durchmessers $2R_2 = 1$ mm durchgeführt. Bei diesem Versuch war die spezifische Verdrehung der Saite $\psi = 8\pi/l$. Das heißt, daß das eine Ende der Saite gegenüber dem anderen viermal verdreht war. Das Ergebnis des Versuches war eine positive Dehnung der Saite um

$$\zeta = 0.011 \text{ mm}$$

Rechnen wir dagegen mit einer Saite von der Länge $L > l$ und vom Durchmesser $2R_2 = 1$ mm, bei der an einer Strecke von der Länge l die Bedingungen B.1 bis B.7 rein erfüllt sind, dann ist für diese Strecke

$$\zeta = -\frac{1}{4}R_2^2\psi^2l = -\frac{1}{4}0.25 \left(64 \frac{\pi^2}{l^2} \right) l \cong -0.025 \text{ mm}$$

Es tritt also eine Verkürzung der untersuchten Strecke ein.

Beim Vergleich dieser Ergebnisse muß man annehmen, daß die Voraussetzungen für die Poyntingschen Versuche den Bedingungen B.1 - B.7 (oder wenigstens einer oder einigen von denen) nicht entsprachen.

8 Zusammenfassung

Die in der vorliegenden Arbeit dargestellte quadratische Theorie gibt über den mechanischen Zustand der untersuchten Wellen ein genaueres Bild, als die lineare Theorie. Die gewonnenen Ergebnisse spielen eine bedeutende Rolle auch beim Beurteilen der Eigenschaften der Torsionsschwingungssysteme (Szolgay, 1989). Die Zugbeanspruchung verändert die Eigenfrequenzen der Torsionsschwingungen und kann leicht zu parametererregten oder nichtlinearen Schwingungen führen. Die lineare Theorie gibt über solche Erscheinungen keine Informationen.

Literatur

1. Béda, Gyula; Kozák, Imre; Verhás, József: Kontinuummechanika (Kontinuumsmechanik, ungarisch) Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1986).
2. Green, A. E.; Zerna, W.: Theoretical Elasticity, Oxford, Clarendon Press, (1963).
3. Műszaki zsebkönyv (Technisches Taschenbuch, ungarisch), Herausgeber: L. Kovács, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, (1979).
4. Poynting, J. H.: On pressure perpendicular to the shearplanes in finite pure shears, and on the lengthening of loaded wires when twisted. Proc. R. Soc. Lond. A 82. 546-559, (1909).
5. Poynting, J. H.: On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distortional waves in steel. Proc. R. Soc. Lond. A 86, 534-561, (1912).
6. Szolgay, Zsófia: Torziós rezgő rendszerek, doktori értekezés, (Torsionsschwingungssysteme, ungarisch, Dissertation), Miskolc, (1989).

Anschritt: Dr. Zsófia Szolgay, Institut für Angewandte Mechanik, TU Budapest, H-1111 Budapest, Műegyetem rkp. 1-3