

Flächentragwerkstheorie höherer Ordnung mit speziellen Ansatzfunktionen

E. Nast

Im Beitrag wird eine Flächentragwerkstheorie höherer Ordnung vorgestellt, die besonders für die Analyse dicker, mehrschichtiger Platten sowie für Sandwichplatten geeignet ist. Im Rahmen des theoretischen Konzeptes, welches auf einem Reissnerschen (1984) Variationsprinzip beruht, werden Ansatzfunktionen höherer Ordnung für die Verschiebungen sowie für Spannungen in Querrichtung vorgestellt. Ergebniswerte für Spannungen in der Tragwerkebene werden durch eine spezielle Zusatzfunktion (Murakami, 1986) verbessert. Qualität und Effektivität der vorgeschlagenen Modellierung werden an einem ausgewählten Beispiel nachgewiesen.

1 Einleitung

Verbundwerkstoffe, wie Sandwichkonstruktionen und mehrschichtige Lamine (auch als Komposite bezeichnet), gehören gegenwärtig zu den Konstruktionswerkstoffen mit dem größten Innovationspotential und werden auf Grund ihrer typischen Materialeigenschaften sowohl in der Luft- und Raumfahrt (Rotorblätter, Tragflächen und Leitwerke) als auch im Automobilbau (Blatt- und Spiralfedern, Antriebswellen, Verkleidungen) und dem Bauwesen (Wand- und Deckenkonstruktionen) verstärkt eingesetzt. Neben dem geringen Gewicht bei gleichzeitig hoher Festigkeit sind Komposite durch guten Korrosionsschutz, Wartungsarmut und definierbares Schwingungsdämpfungsverhalten charakterisiert (Jakoni u. a., 1990; Maier, 1990; Chawla, 1987).

Die zunehmende Nutzung von Flächentragwerken aus derartigen Materialien verlangt nach Modellierungskonzepten, die mit hoher Genauigkeit einerseits und in effizienter Weise andererseits eine Analyse des Spannungs- und Deformationsverhaltens ermöglichen.

Obwohl sich prinzipiell jedes Flächentragwerk als dreidimensionales Kontinuum betrachten läßt, beruht die Mehrheit aller Problemlösungen auf der Modellierung des Tragwerkes als zweidimensionales Bauteil (Altenbach, 1988). Sehr selten werden die zweidimensionalen geometrischen Beziehungen, Bewegungsgleichungen und konstitutiven Gleichungen auf direktem Wege über die Identifikation aller Ersatzigenschaften des zweidimensionalen Kontinuums durch Materialeigenschaften des dreidimensionalen Kontinuums hergeleitet. Die überwiegende Mehrheit aller Autoren geht von den Gleichungen der dreidimensionalen Kontinuums- theorie aus. Diese werden entweder mit Hypothesen über den Spannungs- und/oder kinematischen Zustand oder mit speziellen mathematischen Techniken wie Potenzreihenentwicklungen, asymptotischer Integration oder Reihenentwicklungen nach bestimmten Funktionen in eine zweidimensionale Theorie überführt.

Weit verbreitet, da physikalisch eindeutig und relativ einfach in entsprechende Rechensoftware zu implementieren, sind Hypothesen über den Spannungszustand. Sie gehen teilweise bis in das 19. Jahrhundert zurück, wo erstmals die konstruktive Besonderheit der Flächentragwerke (eine Längenausdehnung, die Tragwerksdicke, ist wesentlich geringer als die beiden anderen Ausdehnungen) für eine Reduktion des Lösungsaufwandes genutzt wurde. Allerdings ignorieren derartige Theorien Schub- und Normalspannungen in Dickenrichtung (klassische Flächentragwerkstheorie) oder gehen von einer unrealistischen Schubspannungsverteilung (Theorien der Querschubdeformation erster Ordnung, FSDT) aus. Die klassische Theorie (CLT) nach Kirchhoff/Love basiert auf den Annahmen, daß Schnittflächen bei einer Deformation eben bleiben; Querschubverzerrungen vernachlässigt werden können. Normale zur unverformten Referenzfläche (Tragwerksmittelfläche) sind somit auch Normale zur verformten Referenzfläche. Quernormalspannungen werden als hinreichend klein angesehen. Die klassische Flächentragwerkstheorie liefert für eine Reihe ingenieurtechnischer Aufgaben gute Resultate, bleibt jedoch auf glatte, dünne Tragwerke beschränkt. Sie liefert zu geringe Querdeformationen sowie zu hohe Werte für Beullasten und Eigenkreisfrequenzen - eine Tendenz, die sich mit zunehmender Tragwerksdicke verstärkt. Gleiches ist auch für Komposite, deren Elastizitätsmoduln sich um den Faktor 10 und höher unterscheiden, zu beobachten (Reddy, 1984).

Hier können sogenannte verbesserte Theorien als Ausweg betrachtet werden. Sie führen teilweise auf ein hohes Maß an Übereinstimmung mit der Realität bzw. mit einem Materialmodell des dreidimensionalen Kontinuums

(Elishakoff u.a., 1987; Lewinski, 1987). Entsprechende Theorien (häufig FSDT) können prinzipiell aus der klassischen Flächentragwerkstheorie abgeleitet werden. Ein derartiges Modell, welches auf einer Abschwächung der Kirchhoffschen Hypothesen beruht, wurde von Reissner (1944) und Mindlin (1951) vorgeschlagen. Dabei werden Querschubeinflüsse durch folgende Annahme berücksichtigt: Fasern, die vor der Deformation normal zur Referenzfläche gerichtet sind, müssen nach der Deformation nicht mehr senkrecht auf der Referenzfläche stehen. Eine Folge dieser Annahme ist die Einführung unabhängiger Rotationen der Normalen und daher die Erhöhung des kinematischen Freiheitsgrades für ein differentielles Tragwerkselement auf den Grad fünf. Um die unrealistische Querschubspannungsverteilung der FSDT-Materialmodelle etwas abzuschwächen, werden vielfach sogenannte Schubkorrekturfaktoren eingeführt. Umfangreiche Untersuchungen dazu befinden sich beispielsweise in (Rikards u.a., 1990) und (Whitney, 1973).

Nach ersten Arbeiten bezüglich einer allgemeineren Theorie zur Analyse mehrschichtiger Flächentragwerke (Yang, 1966; Whitney u.a., 1970; Whitney, 1972) wurden in den letzten Jahren eine ganze Reihe Modelle der Querschubdeformation höherer Ordnung (HSDT) vorgeschlagen. Besonders Reddy (1984; 1985; 1992) und Kant (1989) haben intensiv auf diesem Gebiet gearbeitet.

Gekennzeichnet sind die Theorien höherer Ordnung durch eine beispielhafte Approximation der Schub- und Normalspannungen in Querrichtung. Auf der anderen Seite leiden sie mitunter an mangelnder Genauigkeit bei der Ermittlung von Spannungswerten, die in der Referenzebene des Flächentragwerkes liegen.

Im hier vorliegenden Beitrag wird nun der Versuch unternommen, Spannungen und Deformationen sowohl in der Ebene als auch quer dazu mit hohem Maß an Genauigkeit zu approximieren. Hierzu wird eine spezielle C^0 -stetige Funktion, wie sie von Murakami (1986; 1987) für Theorien erster Ordnung vorgeschlagen wurde, in eine Flächentragwerkstheorie höherer Ordnung eingeführt. Ein Vergleich der Qualität von Modellierung und Berechnung wird mit Hilfe von Paganos (1986) exakter Lösung geführt.

2 Grundgleichungen der numerischen Analyse

Wie im vorangegangenen Kapitel erläutert, werden Flächentragwerke in der Regel über zweidimensionale geometrische Beziehungen, Bewegungsgleichungen und konstitutive Gleichungen analysiert. Dabei führt das einfachste kinematische Modell auf nachfolgende Verschiebungsansätze:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_1(x_1, x_2) \\ u_2 &= u_2^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_2(x_1, x_2) \\ u_3 &= u_3^0(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (1)$$

Sind hierbei tangentiale Verschiebungen und Durchbiegungen gekoppelt,

$$\psi_1 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_1} \quad \psi_2 = -\frac{\partial u_3}{\partial x_2} \quad (2)$$

ergibt sich die klassische Flächentragwerkstheorie nach Kirchhoff/Love. Für den Fall unabhängiger Rotationen ψ_α beschreiben die Gleichungen (1) die Theorie der Querschubdeformation erster Ordnung (FSDT).

(Hier und nachfolgend gelte die Einsteinsche Summationskonvention; griechische Indizes variieren von 1 bis 2, lateinische Indizes von 1 bis 3)

In diesem Beitrag soll eine Flächentragwerkstheorie höherer Ordnung (HSDT) entwickelt werden. Dazu wird folgendes Verschiebungsfeld für einen beliebigen Punkt des Tragwerkes eingeführt:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= u_\alpha^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_\alpha(x_1, x_2) + x_3^2 \zeta_\alpha(x_1, x_2) + x_3^3 \varphi_\alpha(x_1, x_2) \\ &\quad + s_\alpha(x_1, x_2) (-1)^k \frac{2}{h^{(k)}} x_3^{(k)} \\ u_3 &= u_3^0(x_1, x_2) + x_3 \psi_3(x_1, x_2) + x_3^2 \zeta_3(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (3)$$

wobei x_1 und x_2 - orthogonale Koordinaten in der Ebene der Plattenreferenzfläche und x_3 eine Koordinate normal zur Referenzfläche darstellen. Mit $x_3^{(k)} = x_3 - x_{30}^{(k)}$ sei ein lokales x_3 - Koordinatensystem mit dem Koordinatenursprung in der Mitte der k ten Schicht, bezeichnet mit $x_{30}^{(k)}$, eines N -schichtigen Flächentragwerkes definiert. Die u_i^0 stellen die Komponenten des Verschiebungsvektors der Punkte der Tragwerksmittelfläche, die ψ_i die Komponenten des Vektors der Verdrehungen der Normalen zur Referenzfläche und ζ_i, φ_α Terme höherer Ordnung, die zu einer Deformation der Normalen auf der Referenzfläche führen, dar. Mit s_α werden die Amplituden der durch Murakami (1986) für FSDT-Modelle eingeführten Funktion bezeichnet. Sie dienen in erster Linie einer Approximationsverbesserung von Spannungen, welche in der Referenzfläche liegen, und stellen in ihrer Kombination mit vorliegender HSDT einen wesentlichen Schwerpunkt dieses Beitrages dar.

Da im Rahmen dieser Arbeit eine modellseitige Beschränkung auf kleine Verzerrungen und Verdrehungen ($10^\circ \dots 15^\circ$) erfolgen soll, können unter Verwendung des linearen Greenschen Deformationstensors

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\bar{u}_{,j} \bar{g}_i + \bar{u}_{,i} \bar{g}_j) \quad (4)$$

mit \bar{g}_i als Basisvektoren in den äquidistanten Flächen des Tragwerkes, die linearisierten Verzerrungs-Verschiebungs-Beziehungen der k ten Schicht einer mehrschichtigen Platte

$$e_{ij}^{(k)} = \frac{1}{2}(u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \quad (5)$$

beschrieben werden.

Unter Beachtung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn} e_{mn} \quad (6)$$

wobei bereits von Symmetrie des Spannungs- und des Verzerrungstensors ausgegangen wird,

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ und } e_{mn} = e_{nm} \quad (7)$$

lassen sich die konstitutiven Gleichungen für das Plattenproblem aus dem Konstitutivgesetz des dreidimensionalen Falles ableiten.

Hierzu wird zunächst Gleichung (6) in transversale und in ebene Anteile aufgespalten.

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} &= C_{\alpha\beta\varpi\rho} e_{\varpi\rho} + C_{\alpha\beta 33} e_{33} + \underline{C_{\alpha\beta\varpi 3} e_{\varpi 3}} \\ \sigma_{\alpha 3} &= 2C_{\alpha 3\varpi 3} e_{\varpi 3} \\ \sigma_{33} &= C_{33\varpi\rho} e_{\varpi\rho} + C_{3333} e_{33} \end{aligned} \quad (8)$$

Der in den Gleichungen (8) unterstrichen dargestellte Ausdruck verschwindet für monokline Werkstoffe. Monoklines Material, bei dem sich die Anzahl elastischer Konstanten in der Hookeschen Matrix von 21 (wie in Gleichung (6)) auf 13 reduziert, ist durch das Vorhandensein einer elastischen Symmetrieebene für einen Punkt des Materials gekennzeichnet. Dies ist für eine Einzelschicht des Komposites immer gegeben. Geht man weiterhin davon aus, daß σ_{33} klein ist, verglichen mit anderen Spannungen, so läßt sich zeigen, daß

$$\sigma_{\alpha\beta} = \left(C_{\alpha\beta\varpi\rho} - \frac{C_{\alpha\beta 33} C_{33\varpi\rho}}{C_{3333}} \right) e_{\varpi\rho} = \bar{C}_{\alpha\beta\varpi\rho} e_{\varpi\rho} \quad (9)$$

Die Komponenten der Elastizitätsmatrix des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes, bezogen auf ein lokales Schichtkoordinatensystem (Koordinatenrichtungen parallel und orthogonal zum Faserverlauf) C_{ij} lassen sich

über die sogenannten Ingenieurkonstanten des Werkstoffes bestimmen. Hierzu wird die Voigt-Konvention für Indizes eingeführt (11 → 1; 22 → 2; 33 → 3; 23 → 4; 13 → 5; 12 → 6).

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\
C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\
C_{44} &= G_{23} & C_{55} &= G_{31} & C_{66} &= G_{12} \\
\Delta &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}
\end{aligned} \tag{10}$$

Dabei beschreibt E_i den Elastizitätsmodul in der i ten Materialrichtung, ν_{ij} die Querkontraktionszahl und G_{ij} den Schubmodul.

Unter Beachtung der Gleichungen (3), welche einen kubischen Verschiebungsansatz enthalten, ergibt sich, daß die Spannungen in der Tragwerksebene gleichfalls mit dritter Potenz von x_3 abhängen. Berücksichtigt man nun die Gleichgewichtsbeziehungen der k ten Schicht

$$\sigma_{ij,i}^{(k)} + f_j^{(k)} = 0 \quad \sigma_{ij}^{(k)} = \sigma_{ji}^{(k)} \tag{11}$$

wobei die $f_j^{(k)}$ äußere Kräfte darstellen, folgt aus der Integration der Transversalspannungen, daß für $\sigma_{3\alpha}$ Polynome 4. Grades der Transversalkoordinate x_3 und für σ_{33} ein Polynom 5. Grades anzusetzen sind. Damit ergeben sich die Ansätze

$$\begin{aligned}
\sigma_{3\alpha}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= Q_{3\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) \{q_1 x_3^{(k)4} + q_2 x_3^{(k)2} + q_3\} + R_{3\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) \{r_1 x_3^{(k)3} + r_2 x_3^{(k)}\} \\
&+ \bar{P}_{3\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) \{\bar{p}_1 x_3^{(k)4} + \bar{p}_2 x_3^{(k)2} + \bar{p}_3\} \\
&+ T_{3\alpha}^{(k-1)}(x_1, x_2) \{t_1 x_3^{(k)4} + t_2 x_3^{(k)3} + t_3 x_3^{(k)2} + t_4 x_3^{(k)} + t_5\} \\
&+ T_{3\alpha}^{(k)}(x_1, x_2) \{t_1 x_3^{(k)4} - t_2 x_3^{(k)3} + t_3 x_3^{(k)2} - t_4 x_3^{(k)} + t_5\}
\end{aligned} \tag{12}$$

und

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^{(k)}(x_1, x_2, x_3) &= Q_{33}^{(k)}(x_1, x_2) \{q_1^* x_3^{(k)4} + q_2^* x_3^{(k)2} + q_3^*\} \\
&+ R_{33}^{(k)}(x_1, x_2) \{r_1^* x_3^{(k)5} + r_2^* x_3^{(k)3} + r_3^* x_3^{(k)}\} \\
&+ \bar{P}_{33}^{(k)}(x_1, x_2) \{\bar{p}_1^* x_3^{(k)4} + \bar{p}_2^* x_3^{(k)2} + \bar{p}_3^*\} \\
&+ \bar{Z}_{33}^{(k)}(x_1, x_2) \{\bar{z}_1^* x_3^{(k)5} + \bar{z}_2^* x_3^{(k)3} + \bar{z}_3^* x_3^{(k)}\} \\
&+ T_{33}^{(k-1)}(x_1, x_2) \{t_1^* x_3^{(k)5} + t_2^* x_3^{(k)4} + t_3^* x_3^{(k)3} + t_4^* x_3^{(k)2} + t_5^* x_3^{(k)} + t_6^*\} \\
&+ T_{33}^{(k)}(x_1, x_2) \{-t_1^* x_3^{(k)5} + t_2^* x_3^{(k)4} - t_3^* x_3^{(k)3} + t_4^* x_3^{(k)2} - t_5^* x_3^{(k)} + t_6^*\}
\end{aligned} \tag{13}$$

Hierbei verkörpern $T_{3i}^{(k-1)}$ und $T_{3i}^{(k)}$ Oberflächenspannungen in Querrichtung an Ober- bzw. Unterseite der betrachteten k ten Schicht.

Die Koeffizienten der Ansatzfunktionen lassen sich durch Integration der transversalen Schub- und Normalspannungskomponenten bestimmen. Aus einem derartigen Vorgehen folgen dann Schnittgrößen in transversaler Richtung:

$$(Q_{3i}^{(k)}, R_{3i}^{(k)}, \bar{P}_{3i}^{(k)}, \bar{Z}_{3i}^{(k)}) = \int [1, x_3^{(k)}, x_3^{(k)2}, x_3^{(k)3}] \sigma_{3i}^{(k)} dx_3 \quad (14)$$

$$(N_{3i}, M_{3i}, K_{3i}, S_{3i}, P_{3i}) = \sum_{k=1}^N \int \left[1, x_3^{(k)}, (-1)^k \frac{2}{h^{(k)}}, (-1)^k \frac{2}{h^{(k)}} x_3^{(k)}, x_3^{(k)2} \right] \sigma_{3i}^{(k)} dx_3$$

sowie in der Ebene der Tragwerksreferenzfläche

$$(N_{\alpha\beta}, M_{\alpha\beta}, S_{\alpha\beta}, P_{\alpha\beta}, Z_{\alpha\beta}) = \sum_{k=1}^N \int \left[1, x_3^{(k)}, (-1)^k \frac{2}{h^{(k)}} x_3^{(k)}, x_3^{(k)2}, x_3^{(k)3} \right] \sigma_{\alpha\beta}^{(k)} dx_3 \quad (15)$$

Führt man jetzt die Beziehungen für das Verschiebungsfeld (3) sowie die Ansätze (12) und (13) für transversale Spannungen in die Reissnersche (1984) Variationsformulierung

$$\delta \iiint \left\{ U_0(e_{\alpha\beta}) + u_{3,3} \sigma_{33} + (u_{\alpha,3} + u_{3,\alpha}) \sigma_{3\alpha} - W(\sigma_{33}, \sigma_{3\alpha}, e_{\alpha\beta}) \right\} dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (16)$$

ein, so folgt ein System von Gleichgewichtsbeziehungen für Schnittkräfte. In Gleichung (16) seien δu_i und $\delta \sigma_{3i}$ beliebig. U_0 stelle die Formänderungsenergie und W den Beitrag, welcher auf der Arbeit äußerer Kräfte beruht, dar.

$$\begin{aligned} M_{1i,1} + M_{2i,2} - N_{3i} + m_i &= 0 \\ N_{1i,1} + N_{2i,1} + n_i &= 0 \\ P_{1i,1} + P_{2i,2} - 3M_{3i} + p_i &= 0 \\ Z_{1\alpha,1} + Z_{2\alpha,2} - 5P_{3\alpha} - \frac{h^2}{4} N_{3\alpha} + z_\alpha &= 0 \\ S_{1i,1} + S_{2i,2} - K_{3i} - s_i &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Mit Großbuchstaben wurden hierbei die Schnittgrößen und mit Kleinbuchstaben Oberflächenkräfte und -momente bezeichnet.

Zur Lösung des betrachteten Plattenproblems werden weiterhin Rand- und Übergangsbedingungen benötigt. Da im vorliegenden Modell von einer idealen Haftung der Einzelschichten des mehrschichtigen Laminates ausgegangen wird, müssen folglich Verschiebungen und transversale Schub- und Normalspannungen an den Schichtgrenzen kontinuierlich verlaufen, womit sich nachfolgende Forderung ergibt:

$$u_i^{(k)} = u_i^{(k+1)} \quad \sigma_{3i}^{(k)} = \sigma_{3i}^{(k+1)} \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (18)$$

Dabei sei N die Anzahl vorhandener Schichten.

Eine Sonderrolle nehmen lediglich beide Deckschichten ein. Hierbei sind Oberflächenspannungen an Ober- und Unterseite des Schichtverbundes zu definieren. Es müssen also $\sigma_{3i}^{(0)}$ für $x_3 = \frac{h}{2}$ und $\sigma_{3i}^{(N)}$ für $x_3 = -\frac{h}{2}$ ermittelt werden.

Weiterhin sind Randbedingungen für alle Ränder der zu untersuchenden Platte festzulegen. Dem vorgeschlagenen Modell entsprechend gilt es, aus dem folgenden Satz möglicher Kombinationen genau fünf Bedingungen je Rand auszuwählen.

$$(M_{\alpha i} u_{\alpha}; \psi_i) \quad (N_{\alpha i} u_{\alpha}; u_i^0) \quad (P_{\alpha i} u_{\alpha}; \zeta_i) \quad (Z_{\alpha\beta} u_{\alpha}; \varphi_{\beta}) \quad (S_{\alpha\beta} u_{\alpha}; s_{\beta}) \quad (19)$$

3 Vergleichsrechnung

Nachfolgend wird ein numerisches Beispiel zur Dokumentation der Leistungsfähigkeit sowie der Qualität und Effektivität der vorgeschlagenen Modellierung und des Berechnungsablaufes dargelegt. Hierzu wird ein in x_2 -Richtung unendlich langer Plattenstreifen unter sinusförmiger Belastung betrachtet. Der Plattenstreifen sei an den Rändern $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ gelenkig gelagert.

Für diesen Fall liegt eine exakte Lösung nach Pagano (1969), basierend auf der dreidimensionalen Elastizitätstheorie, vor.

Analysiert wird eine dreischichtige Platte mit symmetrischem Schichtaufbau als Kreuzlagenverbund $([0/90/0]_T)$. Folgende Materialparameter sind gegeben:

$$\begin{array}{lll} E_1 = 20.0 \text{ M si} & E_2 = 1.30 \text{ M si} & E_3 = 1.25 \text{ M si} \\ G_{12} = 1.03 \text{ M si} & G_{13} = 1.03 \text{ M si} & G_{23} = 0.90 \text{ M si} \\ \nu_{12} = 0.3 & \nu_{13} = 0.3 & \nu_{23} = 0.49 \end{array}$$

Da die Anwendbarkeit des vorgeschlagenen Materialmodells auf relativ dicke Mehrschichtkonstruktionen von besonderem Interesse war, wurde ein Längen-Dicken-Verhältnis $l/h=5$ gewählt.

Zum besseren Problemverständnis sei an dieser Stelle definiert, welche Randbedingungen unter 'gelenkiger' Lagerung zu verstehen sind. Für die Ränder $x_1 = 0$ und $x_1 = l$ gelte

$$M_{11} = N_{11} = S_{11} = P_{11} = Z_{11} = 0 \quad (20)$$

und

$$u_3^0 = \psi_3 = \zeta_3 = 0 \quad (21)$$

Weiterhin gelte für alle nachfolgenden Abbildungen:

- Eine Punkt-Linie kennzeichnet die in diesem Beitrag entwickelte Theorie,
- eine durchgehende Linie Paganos exakte Lösung nach der dreidimensionalen Elastizitätstheorie,
- eine Strich-Linie mit groben Strichen die Theorie des Querschubes erster Ordnung (FSDT) und
- eine Strich-Linie mit feinen Strichen die klassische Laminattheorie nach Kirchhoff/Love (CLT).

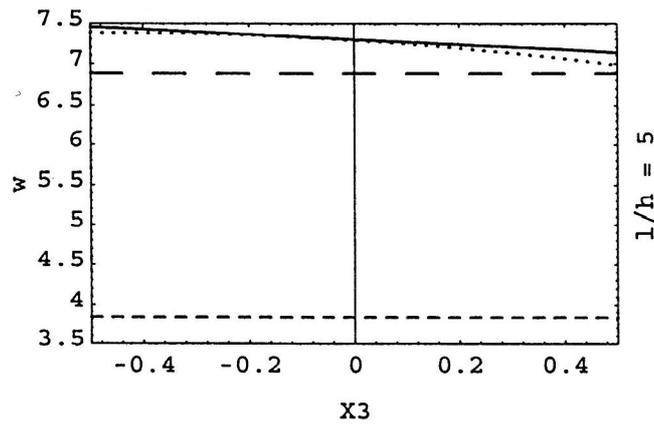


Bild 1. Verlauf der Durchbiegung über den Plattenquerschnitt

Sämtliche Achsenbezeichnungen wurden in einer von Pagano (1969) vorgeschlagenen Weise dimensionslos dargestellt

$$x_3 = \frac{x_3}{h} \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{q_0} \quad w = \frac{100E_2 h^3 u_3}{q_0 l^4} \quad (22)$$

wobei q_0 der Amplitude der sinusförmigen Last entspricht.

In Bild 1 wird der Verlauf der Plattendurchbiegung in Plattenmitte als Funktion der transversalen Koordinate x_3 dargestellt. Eine sehr große Übereinstimmung dieser Verläufe ist zwischen der exakten Lösung und der im Beitrag vorgeschlagenen Theorie zu verzeichnen. Dies gilt besonders für die Querschnittsmitte. Da weder Schubtheorien erster Ordnung noch die klassische Laminattheorie eine Variation der Durchbiegung über den Querschnitt zulassen, sind für beide Fälle horizontal verlaufende Funktionen erkennbar. Sie stellen die Verschiebung in der Referenzfläche dar. Nicht verwunderlich ist der viel zu geringe Wert aus der CLT. Bei der betrachteten dicken Platte muß diese Theorie versagen, liefert keine verwertbaren Aussagen zum Deformationsverhalten.

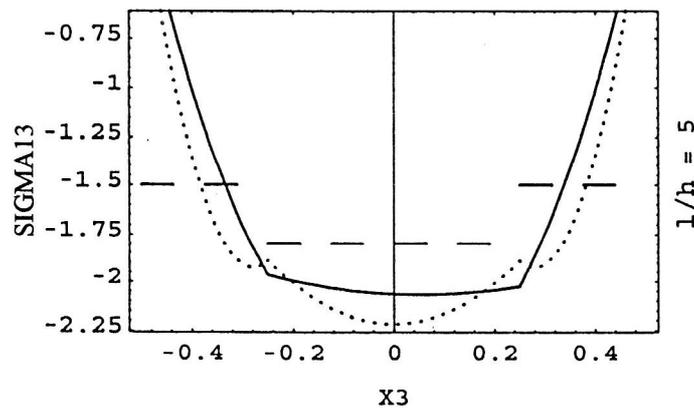


Bild 2. Verlauf der transversalen Schubspannung

Bild 2 zeigt den Verlauf der transversalen Schubspannungen σ_{13} über die Tragwerksdicke an der Stelle ihrer maximalen Werte ($x_1 = 0$). Hierfür sind keine Daten aus der klassischen Flächentragwerkstheorie angebar, da Querschubspannungen vernachlässigt werden. Weiterhin wird deutlich, daß Theorien erster Ordnung mit ihrem konstanten Verlauf der transversalen Schubspannungen lediglich eine grobe Orientierung liefern können. Angemerkt sei an dieser Stelle, daß keine Schubkorrektur im Rahmen der FSDT eingeführt wurde. Schubkorrekturfaktoren könnten das Verhalten der FSDT unter Umständen etwas verbessern, was jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll. Vielmehr soll die Aufmerksamkeit auf den Vergleich zwischen exakter Lösung und eigener Arbeit gelenkt werden. In weiten Bereichen zeigt sich für die transversalen Schubspannungen ein hohes Maß an Übereinstimmung, wengleich in der Zone der Schichtübergänge eine weitere Ergebnisverbesserung wünschenswert wäre.

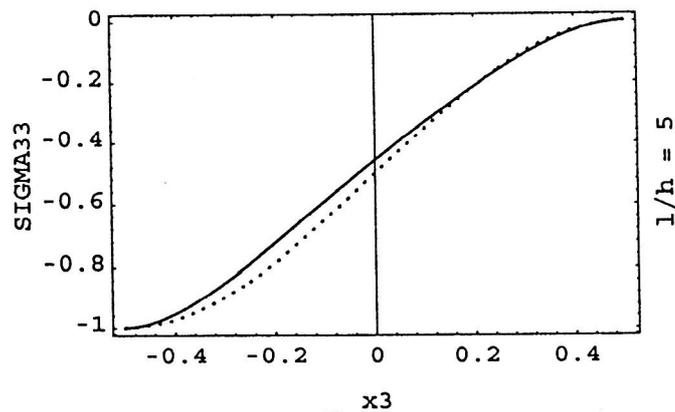


Bild 3. Verlauf der transversalen Normalspannung

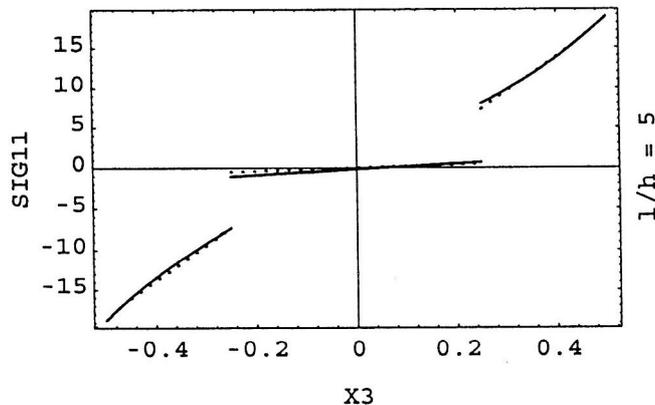


Bild 4. Verlauf der Normalspannung in x_1 -Richtung

In den Bildern 3 und 4 werden ausschließlich Paganos exakte Lösung nach der dreidimensionalen Elastizitätstheorie und die eigene Arbeit verglichen. Ohnehin ist weder für die CLT noch für die FSDT die Normalspannung orthogonal zur Plattenmittelfläche σ_{33} angebar. Beide Materialtheorien betrachten sie als klein, vergleichen mit anderen Spannungen, und negieren sie. Als Ausweg bietet sich dort nur eine Integration der Gleichgewichtsbeziehungen der dreidimensionalen Theorie an. Eine deutliche Übereinstimmung mit der exakten Lösung zeigt sich hingegen für das vorgeschlagene Materialmodell. Betrachtet wurde der Spannungsverlauf in Plattenmitte.

Das höchste Maß an Übereinstimmung zwischen eigener Lösung und der dreidimensionalen Elastizitätstheorie ist jedoch für die Normalspannung in x_1 -Richtung des Plattenstreifens festzustellen. Wie aus Bild 4 ersichtlich, liegen kaum Unterschiede zwischen beiden Lösungen vor. Über den gesamten Querschnittsbereich (in Plattenmitte) führt die eingeführte C^∞ -stetige Funktion zu einer nahezu exakten Wiedergabe des Spannungsverlaufes.

4 Zusammenfassung

Ein theoretisches Konzept zur Analyse dicker, mehrschichtiger Laminatplatten wurde erarbeitet und im vorliegenden Beitrag vorgestellt. Das verwendete Materialmodell basiert auf einer Theorie der Schubdeformation höherer Ordnung. Zur möglichst exakten Approximation der Spannungen in der Ebene der Tragwerksreferenzfläche wurde eine spezielle C^∞ -stetige Funktion, wie sie bereits von Murakami (1986) für Theorien der Schubdeformation erster Ordnung vorgeschlagen wurde, eingeführt. Der Nachweis der Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Berechnungsablaufes und der entwickelten Theorie wurde mit Hilfe eines unendlich langen Plattenstreifens geführt. Bei sinusförmiger Belastung liegt für dieses Beispiel eine exakte Lösung nach Pagano (1969) vor. Nimmt man diese als Referenzlösung, so kann zusammenfassend festgestellt werden:

- Die im Beitrag vorgestellte Flächentragwerkstheorie mit Schubdeformationen höherer Ordnung und spezieller Ansatzfunktion zur Verbesserung von Ergebniswerten in der Ebene der Tragwerksmittelfläche approximiert sowohl Deformationen als auch Spannungen in Bauteilen mit geringem Längen-Dicken-Verhältnis (l/h) mit hoher Genauigkeit.
- Die Überlegenheit, im Rahmen der betrachteten Aufgabenklasse, gegenüber klassischer Laminattheorie (CLT) und Theorie der Schubdeformation erster Ordnung zeigt sich besonders deutlich bei der Analyse der Plattendurchbiegung. Ein nahezu identischer Verlauf der Durchbiegung über den Plattenquerschnitt ergibt sich für das vorgeschlagene Modell und die exakte Lösung.
- Behoben werden kann mit dem vorgeschlagenen Konzept der Nachteil vieler Schubdeformationstheorien höherer Ordnung - ihre Ungenauigkeit bei der Spannungsverteilung in der Tragwerksebene. Durch die eingeführte spezielle Funktion ergeben sich Spannungsverläufe über die Tragwerksdicke, die für das vorgestellte Beispiel kaum von der exakten Lösung zu unterscheiden sind.
- Die gewählten Ansatzfunktionen für transversale Schub- und Normalspannungen gestatten eine Approximation dieser Ergebniskomponenten ohne den Weg der Integration von Gleichgewichtsbeziehungen der dreidimensionalen Elastizitätstheorie gehen zu müssen.
- Weitere Verbesserungen erscheinen allerdings bei den Querkraftschubspannungen wünschenswert. Speziell im Bereich der Schichtübergänge des mehrschichtigen Laminates sollte eine weitere Untersuchung erfolgen.
- Von besonderem Interesse wäre weiterhin die Austestung der im Beitrag vorgestellten Theorie bei Anwendung auf Sandwichkonstruktionen. Hier wird der Autor seine Arbeit fortsetzen.

Literatur

1. Altenbach, H.: Modellierung des Deformationsverhaltens mehrschichtiger Flächentragwerke - ein Überblick zu Forschungsrichtungen und -tendenzen. *Wiss. Z. Techn. Univ. Magdeburg*. (1988), 4, 86-94 .
2. Chawla, K. K.: *Composite Materials / Science and Engineering* - New York; Berlin; Heidelberg; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest: Springer-Verlag, (1987).
3. Elishakoff, I. and Irretier, H. (Ed.): *Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and their Application*. - Berlin et al.: Springer-Verlag, (1987), (Lecture Notes in Engineering).
4. Jakoni, R.; Maier M.; Neitzel, M.: Zum Stand der Entwicklung von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen. 13. wiss.-techn. Tagung „Verstärkte Plaste 90“, (16.-17.10. 1990), 1.1/1-1.1/19.
5. Kant, T. and Mallikarjuna: A higher-order theory for free vibration of unsymmetrically laminated composite and sandwich plates-finite element evaluations. *Comp. Struct.*, (1989), 32(5), 1125-1132.
6. Kant, T. and Menon, M. P.: Higher-order theories for composite and sandwich cylindrical shells with C^0 finite element. *Comp. Struct.*, (1989), 33(5), 1191-1204.
7. Lewinski, T.: On refined plate models based on kinematical assumptions. *Ingenieur-Archiv*, (1987), 57, 133-146.
8. Maier, M.: Experimentelle Untersuchung und numerische Simulation des Crashverhaltens von Faser-verbundwerkstoffen. Dissertation, Ludwigshafen, (1990).
9. Mallikarjuna and Kant, T.: Free vibration of symmetrically laminated plates using a higher-order theory with finite element technique. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, (1989), 28, 1875-1889.
10. Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plate. *Trans. ASME: J. Appl. Mech.*, (1951), 18, 31-38.
11. Murakami, H.: Laminated Composite Plate Theory with Improved In-Plane Responses. *J. of Applied Mech.*, (1986), 53, 661-666.

12. Ochoa, O. O.; Reddy, J. N.: Finite Element Analysis of Composite Laminates. Dordrecht et al.: Kluwer Academic Publishers, (1992).
13. Pagano, N. J.: Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. J. of Comp. Mat., (1969), 3, 398.
14. Reddy, J. N.: A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. Trans. ASME: J. Appl. Mech (1984), 51, 745-752.
15. Reddy, J. N.: A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. Int. J. Engng. Sci., (1985), 23(3), 319-330.
16. Reissner, E.: On a certain mixed variational theorem and a proposed application. Int. J. Num. Meth. Eng., (1984), 20, 1366.
17. Reissner, E.: On the Theory of Bending of Elastic Plates. J. Math. Phys., (1944), 23, 184-191.
18. Rikards, R. B.: Die Methode der finiten Elemente in der Schalen- und Plattentheorie (russ.). Riga, Sinatne, (1988).
19. Rikards, R. B.; Tschate, A. K.; Kenser, M. L.: Mittelungsverfahren für die Biegesteifigkeit komplizierter Konstruktionen bei der Berechnung der Eigenfrequenzen nach dem Timoschenko-Modell - Probleme der Dynamik und Festigkeit (russ.). Riga, Sinatne, (1990), 52.
20. Toledano, A.; Murakami, H.: A Composite Plate Theory for Arbitrary Laminate Configurations. Trans. ASME: J. Appl. Mech., (1987), 54, 181-189.
21. Whitney, J. M.: Shear Correction Factors for Orthotropic Laminates Under Static Load. Trans. ASME: J. Appl. Mech., (1973), 40, 302-304.
22. Whitney, J. M.; Pagano, N. J.: Shear deformation in heterogenous anisotropic plates. Trans. ASME: J. Appl. Mech., (1970), 37, 1031.
23. Whitney, J. M.: Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. J. Comp. Mat., (1972), 6, 426.
24. Yang, P. C.; Norris, C. H.; Stavsky Y.: Elastic wave propagation in heterogeneous plates. Int. J. Solids Structures, (1966), 2, 665.

Anschrift: Eckart Nast, M. S.; Universität der Bundeswehr Hamburg, FB ET / Technische Mechanik, Holstenhofweg 85, 22043 Hamburg