

Über den Massenausgleich in Mehrkörpersystemen

Nguyen Van Khang

Der vollständige Massenausgleich von räumlichen Mechanismen ist eine komplizierte Aufgabe der Maschinendynamik. In der vorliegenden Arbeit werden günstige Gleichungen für den vollständigen Massenausgleich in Mehrkörpersystemen hergeleitet. Die Lösungsmethode wird durch ein Beispiel veranschaulicht.

1 Einleitung

Eine wichtige Aufgabe im Maschinenbau ist der Ausgleich von dynamischen Kräften, die durch die Trägheit beschleunigt bewegter Massen hervorgerufen werden. Auch in der Raumfahrt- und Satellitentechnik sind die Fragen des Massenausgleichs bedeutsam, weil die durch die Bewegung von Massen entstehenden Kräfte und Momente die Flugstabilität der Raumflugkörper beeinflussen oder sogar gefährden können.

Die Methoden des Massenausgleichs von ebenen Mechanismen mit einem Freiheitsgrad werden in Lehrbüchern, in Monografien sowie in Zeitschriften zur Maschinendynamik und Getriebetechnik ausführlich behandelt (siehe z. B. Dizioglu, 1969; Paul, 1979; Dresig und Vulfson, 1989). Dagegen ist der Massenausgleich von räumlichen Mehrkörpersystemen mit mehreren Freiheitsgraden heute ein noch relativ wenig betrachtetes Feld der Technischen Dynamik (siehe Yu, 1988; Husain u. a., 1992).

Im folgenden werden die Massenausgleichsbedingungen in Mehrkörpersystemen behandelt. Dann werden günstige Gleichungen für den vollständigen Massenausgleich von Mechanismen mit einem Freiheitsgrad dargestellt.

2 Allgemeine Bedingungen für den vollständigen Massenausgleich in Mehrkörpersystemen

Die Gesamtmassenkraft \mathbf{F}^* und das Gesamtmassenmoment \mathbf{M}_O^* eines Mehrkörpersystems (Bild 1) lassen sich in folgender Form beschreiben (Schiehlen, 1986; Huston, 1990):

$$\mathbf{F}^* = -\frac{d}{dt}\mathbf{P} = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{v}_{Ci} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_O^* = -\frac{d}{dt}\mathbf{L}_O = -\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^p (\mathbf{I}_i \boldsymbol{\omega}_i + \tilde{\mathbf{r}}_{Ci} m_i \mathbf{v}_{Ci}) \quad (2)$$

In den Gleichungen (1) und (2) werden die folgenden Formelzeichen verwendet:

m_i	Masse des Körpers K_i ($m_i = \text{const.}$)
p	Anzahl der Körper
\mathbf{r}_{Ci}	Lagevektor des Körperschwerpunktes K_i
\mathbf{v}_{Ci}	Geschwindigkeit des Körperschwerpunktes K_i
$\boldsymbol{\omega}_i$	Winkelgeschwindigkeit des Körpers K_i
\mathbf{I}_i	Trägheitstensor des Körpers K_i bezogen auf den Körperschwerpunkt ($\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_i(t)$)

Es ist zu beachten, daß die zeitlichen Änderungen des Impulses \mathbf{P} bzw. des Dralls \mathbf{L}_O in einem Inertialsystem bestimmt werden müssen. Der gemeinsame Bezugspunkt O von Drall und Massenmoment ist ein raumfester

Punkt, z. B. der Ursprung des Inertialsystems. Für den Massenausgleich wird nun gefordert, daß die Gesamtmassenkraft \mathbf{F}^* und das Gesamtmassenmoment \mathbf{M}_O^* verschwinden oder möglichst klein werden.

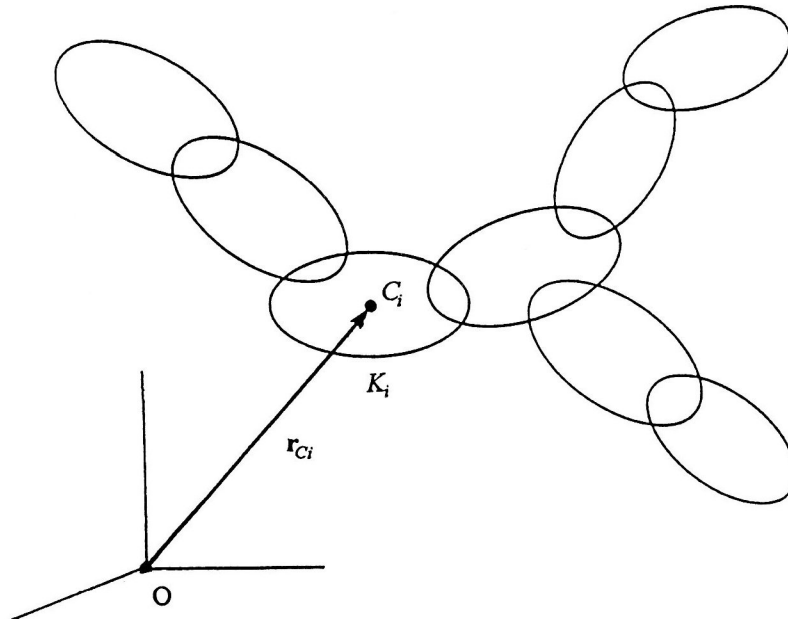


Bild 1. Mehrkörpersystem

In Mehrkörpersystemen mit skleronom-holonomen Bindungen lauten die Ausdrücke für die Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit nach Schiehlen (1986):

$$\mathbf{v}_{C_i} = \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} \quad (4)$$

Dabei sind $\mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y})$ die $3 \times f$ -Jacobimatrix der Translation und $\mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{y})$ die $3 \times f$ -Jacobimatrix der Rotation. Weiterhin ist f die Anzahl der Freiheitsgrade des Mehrkörpersystems, \mathbf{y} der $f \times 1$ -Lagevektor des holonomen Mehrkörpersystems. Nach Einsetzen der Ausdrücke (3) und (4) in die Gleichungen (1) und (2) erhält man:

$$\mathbf{F}^* = -\frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y}) \right] \dot{\mathbf{y}} \right\} \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_O^* = -\frac{d}{dt} \left\{ \left[\sum_{i=1}^p \mathbf{I}_i(\mathbf{y}) \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{y}) + m_i \tilde{\mathbf{r}}_{C_i}(\mathbf{y}) \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y}) \right] \dot{\mathbf{y}} \right\} \quad (6)$$

Aus diesen Gleichungen läßt sich entnehmen, daß die Gesamtmassenkraft \mathbf{F}^* und das Gesamtmassenmoment \mathbf{M}_O^* des Mehrkörpersystems zu Null werden, wenn folgende Bedingungen für den Massenausgleich erfüllt sind:

$$\sum_{i=1}^p m_i \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y}) = \mathbf{O} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^p \left[\mathbf{I}_i(\mathbf{y}) \mathbf{J}_{R_i}(\mathbf{y}) + m_i \tilde{\mathbf{r}}_{C_i}(\mathbf{y}) \mathbf{J}_{T_i}(\mathbf{y}) \right] = \mathbf{O} \quad (8)$$

Satz: Sind die zwei Bedingungen (7) und (8) erfüllt, verschwinden gleichzeitig die Gesamtmassenkraft und das Gesamtmassenmoment des Mehrkörpersystems mit skleronom-holonomen Bindungen.

Es ist bekannt, daß der passive Ausgleich der Massenkräfte und Massenmomente häufig nicht gleichzeitig erreicht wird (Dresig und Vulfsen, 1989; Husain u. a., 1992). Bei einer geeigneten Wahl der dynamischen Parameter des Systems können die Massenkräfte und die Massenmomente teilweise ausgeglichen werden. Nur durch eine optimale Wahl der dynamischen Parameter und der Anordnung der Zusatzglieder ist es möglich, die Massenkräfte und die Massenmomente auszugleichen.

3 Massenausgleichsbedingungen für Mechanismen mit einem Freiheitsgrad

Mechanismen in technischen Anwendungen sind häufig mehrschleifige Systeme, die aus vielen Körpern mit vielen Bindungen und damit wenigen kinematischen Freiheitsgraden bestehen (siehe Dizioglu, 1969; Paul, 1979). Nun werden die Mechanismen als Spezialfälle gewöhnlicher Mehrkörpersysteme behandelt. Die Ausdrücke der Jacobimatrix der Translation und der Jacobimatrix der Rotation für jedes Glied lauten in Anwendung auf räumliche Mechanismen mit einem Freiheitsgrad (Schiehlen 1986):

$$\mathbf{J}_{Ti}(y) = [x'_{Ci}, y'_{Ci}, z'_{Ci}]^T \quad (9)$$

$$\mathbf{J}_{Ri}(y) = [s'_{ix}, s'_{iy}, s'_{iz}]^T \quad (10)$$

Dabei stellt y eine verallgemeinerte Koordinate dar (meist Antriebskoordinate), und der Strich symbolisiert die Differentiation nach dieser Koordinate:

$$(\quad)' = \frac{d}{dy}(\quad) \quad (11)$$

Weiterhin ist $\mathbf{s}_i = [s_{ix}, s_{iy}, s_{iz}]^T$ der momentane Drehvektor des Gliedes i . Das Einsetzen der Gleichungen (9) und (10) in die Gleichungen (7) und (8) liefert die Massenausgleichsbedingungen für räumliche Mechanismen mit einem Freiheitsgrad.

$$\sum_{i=1}^p m_i x'_{Ci} = 0 \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^p m_i y'_{Ci} = 0 \quad (13)$$

$$\sum_{i=1}^p m_i z'_{Ci} = 0 \quad (14)$$

$$\sum_{i=1}^p [m_i (y_{Ci} z'_{Ci} - z_{Ci} y'_{Ci}) + I_{i11} s'_{ix} + I_{i12} s'_{iy} + I_{i13} s'_{iz}] = 0 \quad (15)$$

$$\sum_{i=1}^p [m_i (z_{Ci} x'_{Ci} - x_{Ci} z'_{Ci}) + I_{i21} s'_{ix} + I_{i22} s'_{iy} + I_{i23} s'_{iz}] = 0 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^p [m_i (x_{Ci} y'_{Ci} - y_{Ci} x'_{Ci}) + I_{i31} s'_{ix} + I_{i32} s'_{iy} + I_{i33} s'_{iz}] = 0 \quad (17)$$

Aus den Bedingungen (12) bis (17) erhält man die bekannten Gleichungen für den vollständigen Massenausgleich eines ebenen Mechanismus, welcher die Bewegungen in einer gemeinsamen Hauptträgheitsebene aller Glieder ausführt (siehe Dizioglu, 1969):

$$\sum_{i=1}^p m_i x'_{Ci} = 0 \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^p m_i y'_{Ci} = 0 \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^p [m_i (x_{Ci} y'_{Ci} - y_{Ci} x'_{Ci}) + I_{i33} \Phi'_i] = 0 \quad (20)$$

4 Beispiel

Die in den vorherigen Abschnitten dargelegten Überlegungen sollen nun an einem Beispiel erörtert werden. Es wird ein Knickarm-Industrieroboter nach Bild 2 behandelt (siehe Snyder, 1990). Bei diesem Industrieroboter wird in der Regel jedem Freiheitsgrad ein starrer Körper und ein Antriebsmotor zugeordnet. Zur Vereinfachung wird vorausgesetzt, daß die Masse des Greifers vernachlässigbar klein gegenüber den anderen Massen ist. Damit besitzt das vereinfachte Modell nur 3 Freiheitsgrade (Bild 3).

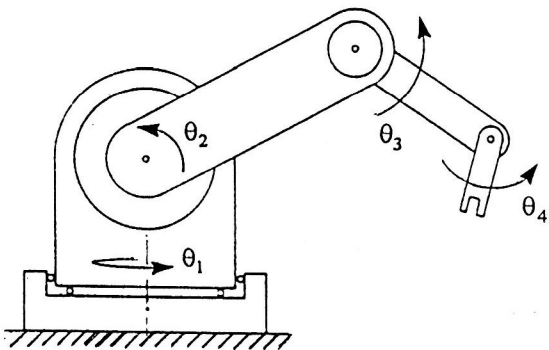


Bild 2. Knickarmroboter

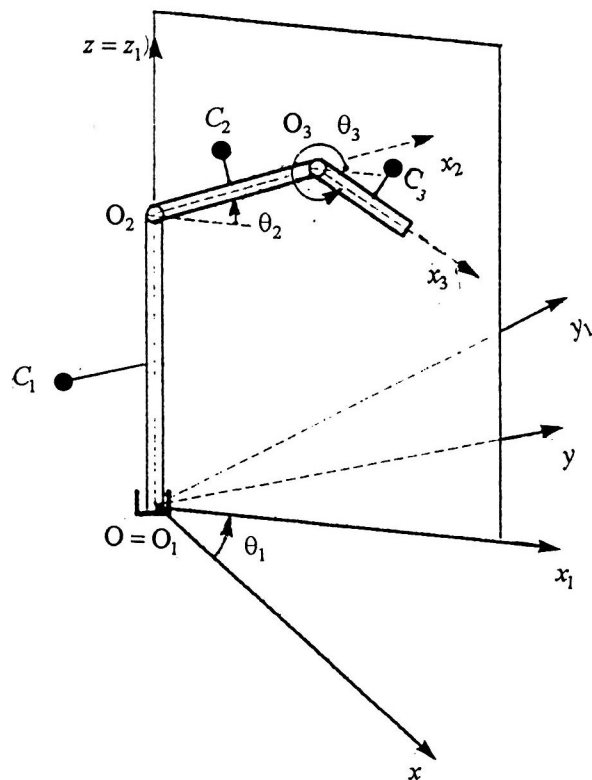


Bild 3. Vereinfachtes Modell

Als verallgemeinerte Koordinaten werden hier die Winkel θ_1 , θ_2 und θ_3 gewählt:

$$\mathbf{y} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$$

Man bezeichnet die Koordinaten des Massenmittelpunktes des Körpers K_i im Inertialsystem $Oxyz$ durch $C_i(x_{Ci}, y_{Ci}, z_{Ci})$ und im körperfesten Koordinatensystem $O_i x_i y_i z_i$ durch $C_i(u_i, v_i, w_i)$. Weiterhin ist I_i die Länge zwischen dem Gelenk O_i und dem Gelenk O_{i+1} . Es wird hier angenommen, daß die

Massenmittelpunkte der starren Körper K_2 und K_3 immer in der Ebene $O_1x_1z_1$ liegen (Bild 3). Damit sind die Koordinaten v_2 und v_3 verschwunden.

Die Transformationsmatrizen für dieses Beispiel haben die folgende Form:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 \\ S_1 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} C_1C_i & -S_1 & -C_1S_i \\ S_1C_i & C_1 & -S_1S_i \\ S_i & 0 & C_i \end{bmatrix} \quad i = 2, 3$$

Um die Bezeichnungsweise zu vereinfachen, hat man hier $\cos\theta_i$ mit C_i und $\sin\theta_i$ mit S_i abgekürzt. Damit ergeben sich die Koordinaten der Massenmittelpunkte jedes Körpers in Abhängigkeit der verallgemeinerten Koordinaten zu

$$\begin{aligned} x_{C1} &= u_1C_1 - v_1S_1 \\ y_{C1} &= u_1S_1 + v_1C_1 \\ z_{C1} &= w_1 \\ x_{C2} &= u_2C_2C_1 - w_2S_2C_1 \\ y_{C2} &= u_2C_2S_1 - w_2S_2S_1 \\ z_{C2} &= l_1 + u_2S_2 + w_2C_2 \\ x_{C3} &= l_2C_2C_1 + u_3C_3C_1 - w_3S_3C_1 \\ y_{C3} &= l_2C_2S_1 + u_3C_3S_1 - w_3S_3S_1 \\ z_{C3} &= l_1 + l_2S_2 + u_3S_3 + w_3C_3 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der 3x3-Jacobimatrizen der Translation jedes Körpers \mathbf{J}_{Ti} lautet die Gleichung (7)

$$\sum_{i=1}^3 m_i \mathbf{J}_{Ti}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Dabei sind:

$$\begin{aligned} h_{11} &= -m_1u_1S_1 - m_1v_1C_1 - (m_2u_2 + m_3l_2)C_2S_1 + m_2w_2S_2S_1 - m_3u_3C_3S_1 + m_3w_3S_3S_1 \\ h_{12} &= -(m_2u_2 + m_3l_2)S_2C_1 - m_2w_2C_2C_1 \\ h_{13} &= -m_3u_3S_3C_1 - m_3w_3C_3C_1 \\ h_{21} &= m_1u_1C_1 - m_1v_1S_1 + (m_2u_2 + m_3l_2)C_2C_1 - m_2w_2S_2C_1 + m_3u_3C_3C_1 - m_3w_3S_3C_1 \\ h_{22} &= -(m_2u_2 + m_3l_2)S_2S_1 - m_2w_2C_2S_1 \\ h_{23} &= -m_3u_3S_3S_1 - m_3w_3C_3S_1 \\ h_{31} &= 0 \\ h_{32} &= (m_2u_2 + m_3l_2)C_2 - m_2w_2S_2 \\ h_{33} &= m_3u_3C_3 - m_3w_3S_3 \end{aligned}$$

Daraus läßt sich entnehmen, daß die Massenkräfte ausgeglichen werden, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{aligned} m_1 u_1 = 0, \quad m_1 v_1 = 0, \quad m_2 u_2 + m_3 l_2 = 0 \\ m_2 w_2 = 0, \quad m_3 u_3 = 0, \quad m_3 w_3 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Das Ergebnis (21) besagt, daß die Lage der Massenmittelpunkte der Glieder in körperfesten Koordinatensystemen wie folgt eingeteilt wird (Bild 4):

$$C_1(0, 0, w_1), \quad C_2\left(-\frac{m_3}{m_2} l_2, 0, 0\right), \quad C_3(0, 0, 0)$$

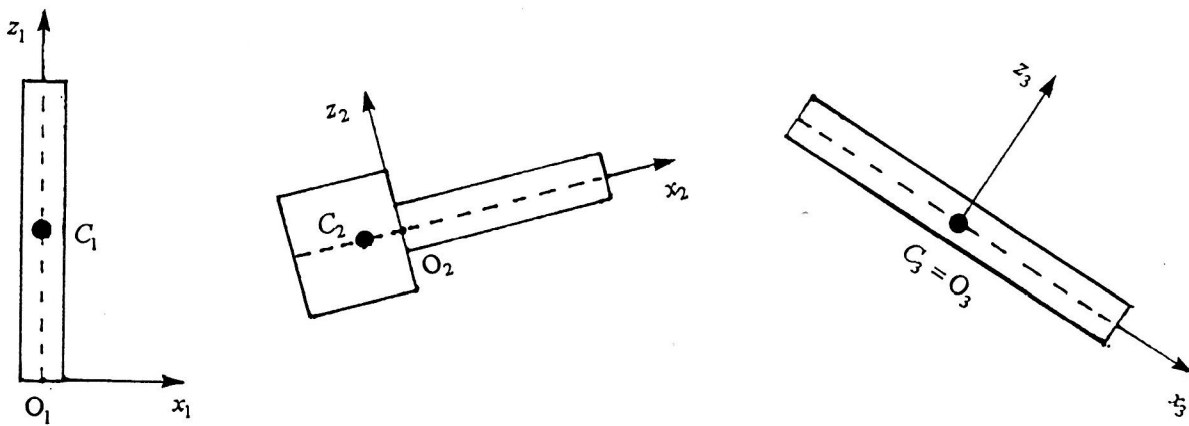


Bild 4. Lage der Massenmittelpunkte

Die Ausgleichsbedingungen für Massenmomente sind sehr kompliziert. Unter Berücksichtigung der 3x1-Drehgeschwindigkeitsvektoren

$$\begin{aligned} \omega_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} & \quad \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 & S_1 & 0 \\ 0 & -C_1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} & \quad \omega_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_1 \\ 0 & 0 & C_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

erhält man die 3x3-Jacobimatrizen jedes Körpers. J_{Ri} . Damit ergibt sich die Gleichung (8) zu

$$\sum_{i=1}^3 [I_i(\mathbf{y}) J_{Ri}(\mathbf{y}) + m_i \tilde{\mathbf{r}}_{Ci}(\mathbf{y}) J_{Ti}(\mathbf{y})] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Beachtet man die Ausgleichsbedingungen (21) für Massenkräfte, so kann man die interessierenden Ausdrücke für k_{ij} bestimmen:

$$\begin{aligned} k_{11} &= I_{113} + I_{213} + I_{313} - (m_2 u_2^2 + m_3 l_2^2) S_2 C_2 C_1 \\ k_{12} &= I_{211} S_1 - I_{212} C_1 + (m_2 u_2^2 + m_3 l_2^2) S_1 \\ k_{13} &= I_{311} S_1 - I_{312} C_1 \\ k_{21} &= I_{123} + I_{223} + I_{323} - (m_2 u_2^2 + m_3 l_2^2) C_2 S_2 S_1 \end{aligned} \quad (22)$$

$$k_{22} = I_{221}S_1 - I_{222}C_1 - (m_2u_2^2 + m_3l_2^2)C_1$$

$$k_{23} = I_{321}S_1 - I_{322}C_1$$

$$k_{31} = I_{133} + I_{233} + I_{333} + (m_2u_2^2 + m_3l_2^2)C_2^2$$

$$k_{32} = I_{231}S_1 - I_{232}C_1$$

$$k_{33} = I_{331}S_1 - I_{332}C_1$$

Für die Trägheitstensenoren im körperfesten Koordinatensystem, dessen Ursprung im Schwerpunkt des Gliedes liegt, wird ein Hauptachsensystem gewählt. In diesem System lautet der Trägheitstensor

$$\mathbf{I}_i^* = \begin{bmatrix} I_{i11}^* & 0 & 0 \\ 0 & I_{i22}^* & 0 \\ 0 & 0 & I_{i33}^* \end{bmatrix}$$

Zur Vereinfachung der Berechnung kann man die Koordinatenachsen vom Hauptachsensystem parallel zum Gelenkkoordinatensystem $O_i x_i y_i z_i$ wählen. Nach Schiehlen (1986) gibt es die folgende Beziehung:

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{I}_i^* \mathbf{A}_i^T \quad (23)$$

Dabei sind $\mathbf{A}_i (i=1,2,3)$ die Transformationsmatrizen. Es ist leicht, die Elemente des Trägheitstensors \mathbf{I}_i zu berechnen. Damit erhält man die Ausdrücke für k_{ij} (22) in der Form:

$$k_{11} = (I_{211}^* - I_{233}^* - m_2u_2^2 - m_3l_2^2)S_2C_1C_2 + (I_{311}^* - I_{333}^*)S_3C_1C_3$$

$$k_{12} = (I_{222}^* + m_2u_2^2 + m_3l_2^2)S_1$$

$$k_{13} = I_{322}^*S_1$$

$$k_{21} = (I_{211}^* - I_{233}^* - m_2u_2^2 - m_3l_2^2)S_1S_2C_2 + (I_{311}^* - I_{333}^*)S_1S_3C_3$$

$$k_{22} = -(I_{222}^* + m_2u_2^2 + m_3l_2^2)C_1$$

$$k_{23} = -I_{322}^*C_1$$

$$k_{31} = I_{133}^* + I_{211}^*S_2^2 + (I_{233}^* + m_2u_2^2 + m_3l_2^2)C_2^2 + I_{311}^*S_3^2 + I_{333}^*C_3^2$$

$$k_{32} = k_{33} = 0$$

Aus den Ausgleichsbedingungen für Massenmomente wird nun gefordert, daß die Ausdrücke (24) verschwinden oder möglichst klein werden. Das ist eine Optimierungsaufgabe, die nicht schwer zu lösen ist.

5 Zusammenfassung

Ein Mechanismus ist vollständig ausgeglichen, wenn die resultierenden Massenkräfte und Massenmomente gleich Null sind. Mit den bekannten Ausgleichsbedingungen für ebene Mechanismen (18), (19) und (20) wurden mehrere Maßnahmen zum Massenausgleich vorgeschlagen und verwendet (siehe Dizioglu, 1969; Paul, 1979, Dresig und Vulfson, 1989). In der vorliegenden Arbeit wurden die allgemeinen Bedingungen für den vollständigen Massenausgleich in gewöhnlichen Mehrkörpersystemen hergeleitet. Aus diesen Bedingungen ist es möglich, die allgemeine Herangehensweise bei der analytischen Herleitung spezieller Ausgleichsbedingungen für räumliche Mechanismen aufzuzeigen sowie die praktischen Maßnahmen zum Massenausgleich räumlicher Mechanismen vorzuschlagen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte der Autor Herrn Professor Dr.-Ing. Dr.h.c. W. Schiehlen für die fachliche Betreuung und dem DAAD für die Förderung seines Studienaufenthaltes am Institut B für Mechanik der Universität Stuttgart herzlich danken.

Literatur

1. Dizioglu, B.: „Getriebelehre/Dynamik“, Vieweg & Sohn, Braunschweig, (1969).
2. Dresig, H.; Vulfson, I. I.: „Dynamik der Mechanismen“, Springer-Verlag, Wien, (1989).
3. Husain, M.; Mallik, A. K.; Ghosh, A.: „Design Improvement of Manipulators by Minimizing Shaking Force/Moment and Driving Torque“, DE-Vol. 45, Robotics, Spatial Mechanisms, and Mechanical Systems, ASME, (1992), 139-147.
4. Huston, R. L.: „Multibody Dynamics“, Butterworth-Heinemann, Boston, (1990).
5. Paul, B.: „Kinematics and Dynamics of Planar Machinery“, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, (1979).
6. Schiehlen, W.: „Technische Dynamik“, B. G. Teubner, Stuttgart, (1986).
7. Snyder, W. E.: „Computergesteuerte Industrieroboter“, VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, (1990).
8. Yue-Qing, Yu: „Complete Shaking Force and Moment Balancing of Spatial Irregular Force Transmission Mechanisms Using Additional Links“, Mechanism and Machine Theory, Vol. 23 (1988), No. 4, 279-285.

Anschrift: Prof. Dr.-Ing. habil. Nguyen Van Khang, Institut für Angewandte Mechanik, Technische Universität Hanoi, 1. Dai Co Viet, Hanoi, Vietnam.