

Axialsymmetrische Kreisel mit viskoser Grenzschichtreibung

B. Runau, F.P.J. Rimrott

Axialsymmetrische Kreisel, die in kalottenförmigen Luftlagern so gelagert sind, daß im Ruhezustand die Auflagerkraft durch den Schwerpunkt geht, haben notwendigerweise eine kugelförmige Außenschale. Sie sind daher während der Rotation einem Luftreibungsdrehmoment ausgesetzt, welches in Drehachsenrichtung wirkt und in erster Annäherung der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Da Drallvektor und Winkelgeschwindigkeitsvektor im allgemeinen nicht kollinear sind, wird die Reibung also nicht nur zu einem laufend kleiner werdenden Drall führen, sondern auch zu einem laufenden Richtungswechsel des Dralles, oder mit anderen Worten, der Drallvektor wird einen Kegel beschreiben von laufend kleiner werdender Höhe, die schließlich zu Null wird, bei einem ständig zunehmenden oder abnehmenden Kegelwinkel. Der Kegelwinkel nimmt zu bei gestreckten Kreiseln. Er nimmt ab bei abgeplatteten Kreiseln. Das Absterben der Bewegung ist an einem Beispiel veranschaulicht.

1 Einleitung

Axialsymmetrische Kreisel, die in kalottenförmigen Luftlagern laufen, haben notwendigerweise eine kugelförmige Außenschale (Bild 1) und sind daher einem Luftreibungsdrehmoment ausgesetzt, welches in negativer Drehachsenrichtung wirkt und in erster Näherung der Winkelgeschwindigkeit proportional ist. Das auf den Kreisel wirkende Drehmoment ist also

$$\mathbf{M} = -b\boldsymbol{\omega} \quad (1)$$

mit einem Reibungsbeiwert b in Nms. Gleichung (1) erscheint bereits sowohl bei Grammel (1950) als auch bei Magnus (1971). In der vorliegenden Arbeit wird der Idealfall eines von ruhender Luft umgebenen Kreisels behandelt und dessen Verhalten im absoluten Raum untersucht.

2 Eulersche Gleichungen

Bei Verwendung von kreiselfesten Koordinaten ergeben sich die Eulerschen Bewegungsgleichungen zu

$$A\dot{\omega}_x - (A-C)\omega_y\omega_z = -b\omega_x \quad (2a)$$

$$A\dot{\omega}_y + (A-C)\omega_z\omega_x = -b\omega_y \quad (2b)$$

$$C\dot{\omega}_z = -b\omega_z \quad (2c)$$

Gleichung (2c) läßt sich sofort integrieren und ergibt

$$\omega_z = \omega_{z0} e^{-bt/c} \quad (3)$$

Gleichung (2a) und (2b) lassen sich zusammenfassen zu

$$A\dot{\omega}_a = -b\omega_a \quad (4)$$

Gleichung (4) läßt sich ebenfalls sofort integrieren und ergibt

$$\omega_a = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = \omega_{a0} e^{-bt/A} \quad (5)$$

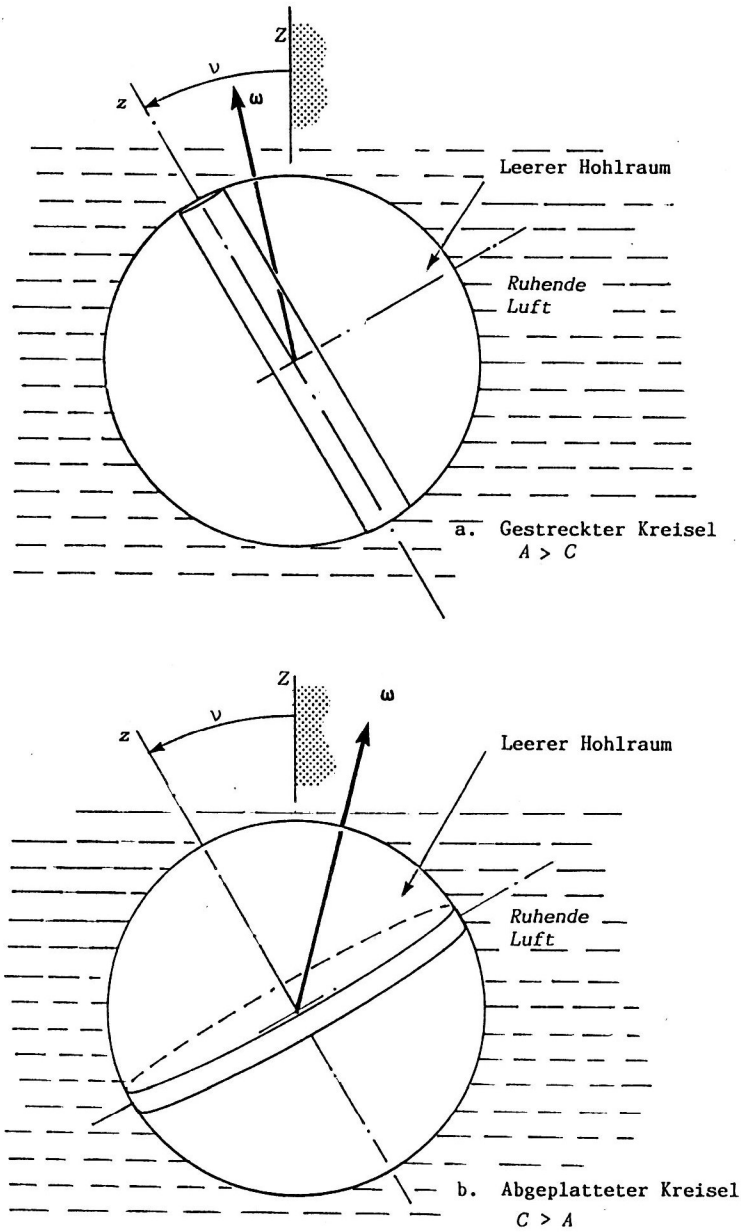


Bild 1. Kreisel mit kugelförmiger Außenschale

Wenn man nun einen Winkel α zwischen dem Drallvektor \mathbf{H} und der Drallkomponente $H_z = C\omega_z$ einführt (Bild 2), dann ergibt sich

$$\tan\alpha = \frac{A\omega_a}{C\omega_z} = \frac{A\omega_{a0}}{C\omega_{z0}} \exp \frac{A-C}{AC} bt \quad (6)$$

Für $t = \infty$ wird dann

$$\alpha = 90^\circ \quad (7)$$

für den Fall eines gestreckten Kreisels ($A > C$), der sich vor dem Zumstillstandkommen so einstellen wird, daß seine Symmetrieachse z senkrecht zum (verschwindenden) Drallvektor \mathbf{H} steht. Für den Fall eines abgeplatteten Kreisels ($C < A$) wird

$$\alpha = 0^\circ \quad (8)$$

d. h., ein abgeplatteter Kreisel wird sich vor dem Zumstillstandkommen so einstellen, daß seine Symmetrieachse z kollinear mit dem (verschwindenden) Drallvektor \mathbf{H} wird.

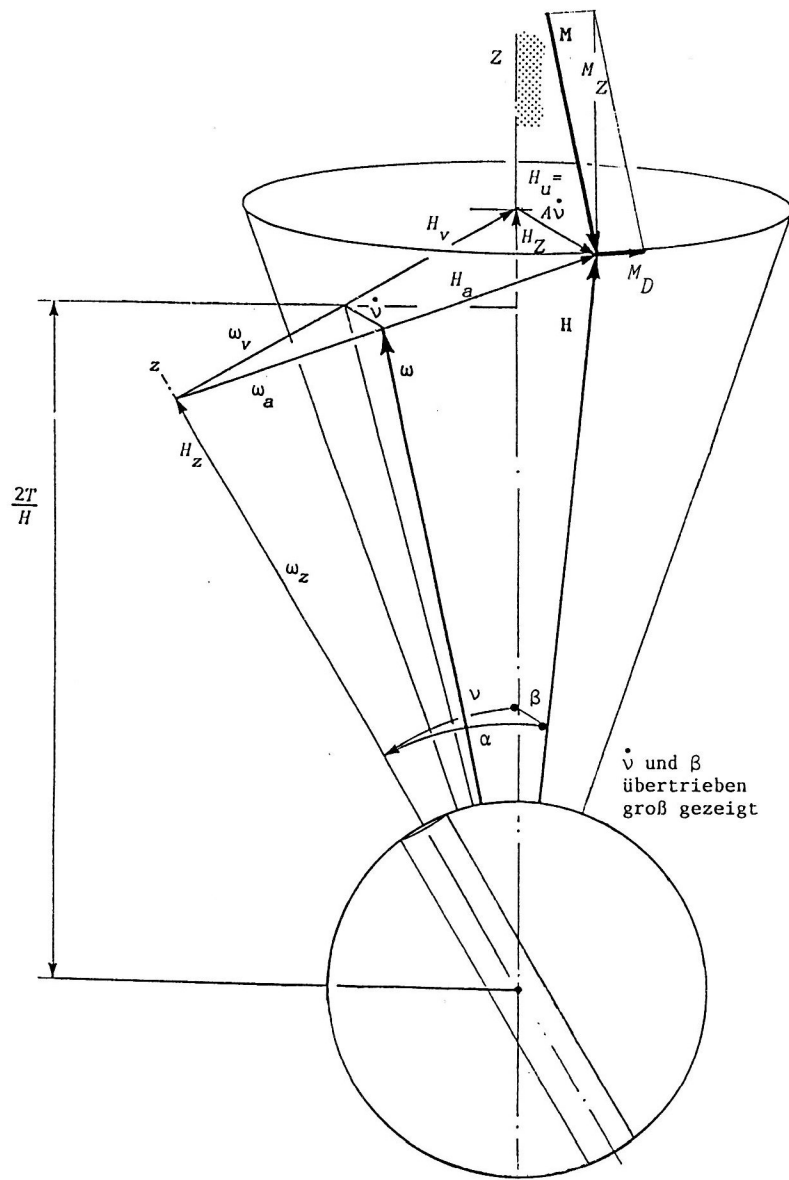


Bild 2. Momentenbild der Kreiselhaltung mit Drehmoment $\mathbf{M} = -b\omega$
 (für $A = 2 \text{ m}^2\text{kg}$, $C = 1 \text{ m}^2\text{kg}$)

3 Drehmoment im Raum

Zur Festlegung des Verhaltens des Kreisels gehen wir von einem drehmomentfreien Kreisel aus (Bild 3) und stützen unsere Argumentation darauf, daß das Drehmoment infolge Grenzschichtreibung klein sei. Zunächst läßt sich der Winkelgeschwindigkeitsvektor in eine Komponente entlang der Z-Achse und eine auf der Z-Achse senkrecht stehende zerlegen. Solange der Drallvektor \mathbf{H} nicht zu sehr von der Z-Achse abweicht, kann man angenähert setzen (Rimrott, 1988)

$$\omega_H = \frac{2T}{H} \quad (9)$$

und

$$\omega_D = \sqrt{\frac{(2AT - H^2)(H^2 - 2CT)}{ACH^2}} \quad (10)$$

Wir führen nun das (kleine) Reibungsdrehmoment (1) ein mit den Komponenten

$$M_z = b \frac{2T}{H} \quad (11)$$

und

$$M_D = b \sqrt{\frac{(2AT - H^2)(H^2 - 2CT)}{ACH^2}} \quad (12)$$

Die Komponente M_z ist fast ausschließlich ein Maß für die Verringerung der Größe des Dralles, während die Komponente M_D fast ausschließlich die Änderung der Richtung des Dralles beschreibt.

Die Drehmomentkomponenten (11) und (12) sind Funktionen der Zeit, wenn man bedenkt, daß die kinetische Energie T mit Hilfe der Gleichungen (3) und (5) zu

$$T = \frac{1}{2} A \omega_a^2 + \frac{1}{2} C \omega_z^2 = \frac{1}{2} A \omega_{a0}^2 e^{-2bt/A} + \frac{1}{2} C \omega_{z0}^2 e^{-bt/C} \quad (13)$$

wird und das Quadrat des Dralles H zu

$$H^2 = A^2 \omega_a^2 + C^2 \omega_z^2 = A^2 \omega_{a0}^2 e^{-2bt/A} + C^2 \omega_{z0}^2 e^{-2bt/C} \quad (14)$$

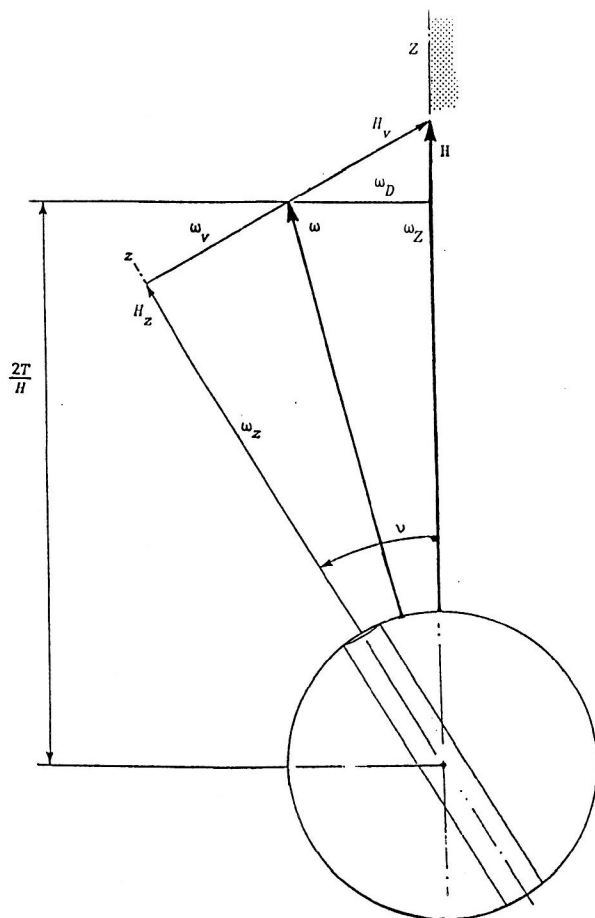


Bild 3. Drehmomentfreier ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) Kreisel (mit $A = 2 \text{ m}^2\text{kg}$, $C = 1 \text{ m}^2\text{kg}$)

Es läßt sich zeigen (Rimrott, 1988), daß für drehmomentfreie Kreisel gilt

$$\sin \nu = \sqrt{\frac{H^2 - 2CT}{H^2 \left(1 - \frac{C}{A}\right)}} \quad (15)$$

Mit Hilfe von Gleichung (15) läßt sich die Drehmomentkomponente (12) auch wie folgt schreiben

$$M_D = \frac{(A-C)b}{AC} H \sin \nu \cos \nu \quad (16)$$

wobei sowohl die Größe H des Dralls als auch der Nutationswinkel ν Funktionen der Zeit sind.

4 Drallvektor im Raum

Der Kegelradius R in Bild 2 ist die Drallkomponente H_u , für welche folgende Beziehung gilt:

$$R = \frac{M_D}{\dot{\psi}} = H_u \quad (17)$$

Mit

$$\dot{\psi} = \frac{H}{A} \quad (18)$$

(aus der Theorie für drehmomentfreie Kreisel) ergibt sich

$$R = \frac{M_D A}{H} \quad (19)$$

oder mit Hilfe von Gleichung (16)

$$R = \frac{A-C}{C} b \sin \nu \cos \nu \quad (20)$$

Der Kegelradius (Bild 2) ist auch

$$R = A \dot{\nu} \quad (21)$$

Gleichungen (20) und (21) zusammen ergeben dann für die Nutation

$$\dot{\nu} = \frac{A-C}{AC} b \sin \nu \cos \nu \quad (22)$$

Gleichung (22) läßt sich integrieren zu

$$\tan \nu = (\tan \nu_0) \exp \frac{(A-C)b}{AC} t \quad (23)$$

welches zu

$$\nu = 90^\circ \quad (24)$$

führt, bei $t \rightarrow \infty$ und $A > C$, d. h. für gestreckte Kreisel, und zu

$$\nu = 0 \quad (25)$$

für $C > A$, d. h. für abgeplattete Kreisel.

5 Die Winkel ν , α , β

Für die ein Kugeldreieck bildenden Winkel α , β und ν (Bild 2) gilt aus der sphärischen Trigonometrie

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\nu \quad (26)$$

Für kleine Winkel β wird $\cos\beta \approx 1$, und demzufolge

$$\alpha = \nu \quad (27)$$

Nun ist das Vorhandensein des Winkels β die Grundlage der vorgestellten Theorie. In diesem Sinne ist der Winkel β nicht vernachlässigbar. Durch seine extreme Kleinheit ist zum anderen berechtigt, daß häufig

$$\alpha \quad \text{durch } \nu \quad (28a)$$

$$H_z \quad \text{durch } H \quad (28b)$$

$$H_a \quad \text{durch } H_\nu \quad (28c)$$

ersetzt wird. Zur Abschätzung des Winkels β läßt sich aus Bild 2 heranziehen

$$\sin\beta = \frac{A\dot{\nu}}{H} \quad (29)$$

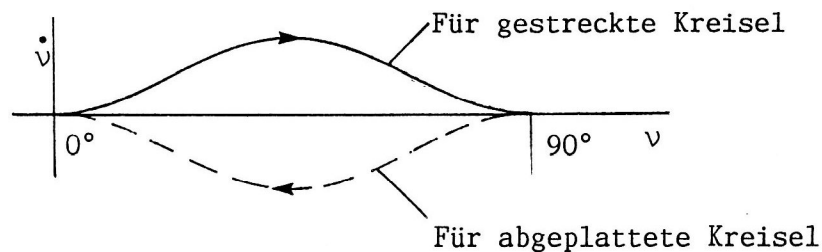


Bild 4. Nutationsgeschwindigkeit als Funktion des Nutationswinkels

6 Die Anfangswerte

In Bild 4 ist der Verlauf von Gleichung (22) dargestellt. Zu Anfang, d. h. zur Zeit $t = 0$, seien der Drall \mathbf{H}_0 sowie die Winkelgeschwindigkeit ω_0 nach Größe und Richtung gegeben. Der Winkel zwischen \mathbf{H}_0 -Vektor und ω_0 -Vektor sei ν_0 .

Dann läßt sich mit Hilfe von Gleichung (22) die anfängliche Nutationsgeschwindigkeit $\dot{\nu}_0$ ausrechnen.

$$\dot{\nu}_0 = \frac{A-C}{2AC} b \sin 2\nu_0 \quad (30)$$

Mit Hilfe von Gleichung (29) folgt

$$\sin\beta_0 = \frac{A\dot{\nu}_0}{H_0} \quad (31)$$

Mit Gleichung (31) läßt sich damit die Richtung der raumfesten Z-Koordinate festlegen (Bild 5). Es sei noch darauf hingewiesen, daß in praktischen Anwendungen der Winkel β immer sehr klein sein wird. Die in Bild 5 gezeigten Vektoren \mathbf{H}_0 , \mathbf{H}_1 , usw. fallen also nicht mit der raumfesten Z-Achse zusammen, sondern umlaufen diese, einen immer kleiner werdenden Kegel bildend.

7 Beispiel

Als Beispiel diene ein axialsymmetrischer Kreisel mit $A = 20 \text{ m}^2\text{kg}$, $C = 10 \text{ m}^2\text{kg}$, $H_0 = 120 \text{ Ws}^2$, $\nu_0 = 30^\circ$, $b = 0.004 \text{ Ws}^2$.

Dann ist zur Zeit $t = 0$

$$\begin{aligned} H_{a0} &\approx H_{\nu 0} = H_0 \sin \nu_0 = 60 \text{ Ws}^2 \\ H_{z0} &= H_0 \cos \nu_0 = 103,923 \text{ Ws}^2 \\ \alpha_0 &= \nu_0 = 30^\circ && \text{aus Gleichung (27)} \\ \dot{\nu}_0 &= 0.000087 \text{ rad/s} && \text{aus Gleichung (30)} \\ \beta_0 &= 0,000827^\circ && \text{aus Gleichung (31)} \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = t_1 = 3600 \text{ s} = 1 \text{ h}$ ist

$$\begin{aligned} H_{a1} &\approx H_{\nu 1} = 29,205 \text{ Ws}^2 && \text{aus Gleichung (14)} \\ H_{z1} &= 24,622 \text{ Ws}^2 && \text{aus Gleichung (14)} \\ H_1 &\approx \sqrt{H_{\nu 1}^2 + H_{z1}^2} = 38,199 \text{ Ws}^2 \\ \alpha_1 &= \nu_1 = 49,866^\circ && \text{aus Gleichung (23)} \\ \dot{\nu}_1 &= 0,000098 \text{ rad/s} && \text{aus Gleichung (22)} \\ \beta_1 &= 0,002957^\circ && \text{aus Gleichung (29)} \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = t_2 = 7200 \text{ s} = 2 \text{ h}$ ist

$$\begin{aligned} H_{a2} &= H_{\nu 2} = 14,216 \text{ Ws}^2 \\ H_{z2} &= 5,834 \text{ Ws}^2 \\ H_2 &= 15,366 \text{ Ws}^2 \\ \alpha_2 &= \nu_2 = 67,688^\circ \\ \dot{\nu}_2 &= 0,000070 \text{ rad/s} \\ \beta_2 &= 0,005238^\circ \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = t_3 = 10800 \text{ s} = 3 \text{ h}$

$$\begin{aligned} H_{a3} &\approx H_{\nu 3} = 6,92 \text{ Ws}^2 \\ H_{z3} &= 1,382 \text{ Ws}^2 \\ H_3 &= 7,057 \text{ Ws}^2 \\ \alpha_3 &= \nu_3 = 78,704^\circ \\ \dot{\nu}_3 &= 0,000038 \text{ rad/s} \\ \beta_3 &= 0,006238^\circ \end{aligned}$$

Zur Zeit $t = \infty$ ist

$$\begin{aligned} H_\infty &= 0 \\ \nu_\infty &= 90^\circ \\ \dot{\nu}_\infty &= 0 \\ \beta_\infty &= 0,006616^\circ \end{aligned}$$

Das Absterben der Bewegung ist in Bild 5 dargestellt.

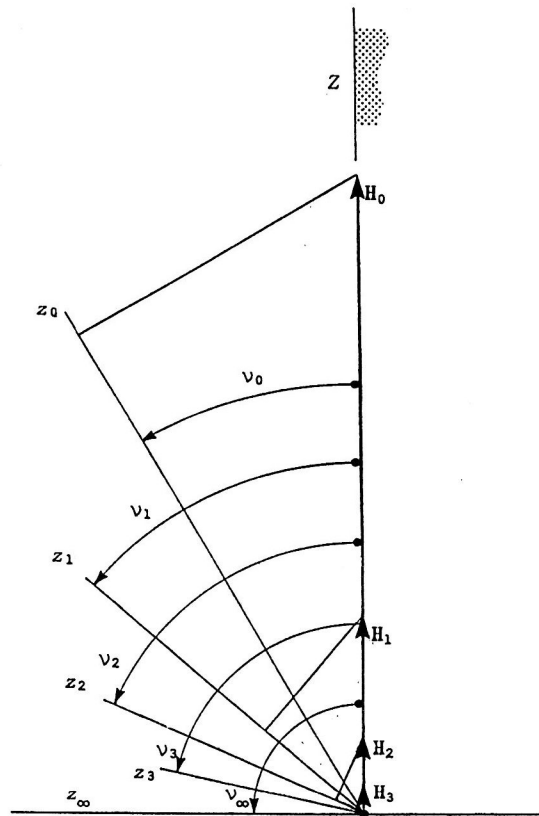


Bild 5. Absterben der Bewegung und Änderung der Winkelhaltung der Symmetrieachse durch Luftreibung bei einem gestreckten axialsymmetrischen Kreisel

8 Zusammenfassung

Es ist gezeigt worden, daß die in Versuchsanordnungen oft auftretende äußere Kugelschalenform bei Kreiseln zu einem Drehmoment infolge Luftreibung führt, daß offensichtlich zum Absterben der Bewegung führt. Als wichtig anzusehen ist außerdem, daß während des Absterbens die Symmetrieachse eines gestreckten Kreisels und der Drallvektor auseinanderlaufen und schließlich senkrecht aufeinanderstehen, während bei einem abgeplatteten Kreisel Symmetrieachse und Drallvektor aufeinander zulaufen.

9 Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde vom Ministerium für Wissenschaft und Forschung des Landes Sachsen-Anhalt im Rahmen des Projekts „Zusammenfassende Auswertung von Theorie und Versuch des Verhaltens dissipativer drehmomentfreier symmetrischer Festkörperkreiseln“ gefördert (FKZ 1105A2110023).

Literatur

1. Grammel, R.: Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, 2 Bände, Springer-Verlag, (1950).
2. Magnus, K.: Kreisel, Theorie und Anwendungen, Springer-Verlag, (1975), 493 S.
3. Rimrott, F.P.J.: Introductory Attitude Dynamics, Springer-Verlag, (1988), 363 S.

Anschrift: Dipl.-Ing. Bernd Runau und Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing.E.h. F. P. J. Rimrott, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg