

Modellierung des mehrflächigen Reibungskontaktes zweier Rotationskörper

W. Weese, V. Popov

Die mehrmalige Kontaktanalyse zweier Rotationskörper erfordert den Aufbau eines mit minimalem Rechenaufwand verbundenen Modells. In den hergeleiteten Kontaktgleichungen sind alle Verschiebungen und Abstände als Winkel dargestellt. Durch die Berücksichtigung der Reibung und die entsprechenden Annahmen wird die Kontaktmodellierung verbessert. Die neue Problemformulierung erlaubt die Eliminierung der unbekanntenen Abweichung von der Starrkörperdrehung, was zu einem schnell lösbaren Gleichungssystem führt. Eine neue Vorgehensweise bei der Lösung der Kontaktgleichungen ist ebenfalls dargestellt.

1 Einleitung

Ein häufig auftretendes Problem bei der Konstruktionsauslegung von Maschinen ist die Festigkeitsoptimierung der einzelnen Maschinenbauteile, durch die die ganze Bewegungs- und Lastübertragung in der Maschine erfolgt. Infolge der Lastübertragung bilden benachbarte Maschinenelemente einen Kontaktbereich. Eine wichtige Aufgabe im ganzen Optimierungsprozeß ist die genaue Bestimmung der Kraftverteilung über diesen Kontaktbereich in jedem Zeitpunkt des Zusammenwirkens zweier Maschinenelemente (kontinuierliche Kontaktsimulation).

Der Kontakt zwischen zwei Körpern ist ein komplizierter Vorgang, auch wenn nur eine Kontaktfläche vorhanden ist. Die komplexe Körpergeometrie und die Beziehungen zwischen den äußeren Lasten und den Kontaktkräften führen zu einer nichtlinearen numerischen Aufgabe, die oft nur iterativ gelöst werden kann. Diese Aufgabe wird erschwert, wenn die Reibung berücksichtigt werden soll oder zwischen den beiden Körpern mehrere Kontaktflächen entstehen. Das ist z.B. bei rotierenden Maschinenelementen, die die Bewegung formschlüssig übertragen (Zahnräder, Zahnriemen, Ketten, Zahnkupplungen) der Fall. Die direkte Verwendung von konventionellen numerischen Verfahren zur Verformungs- und Spannungsberechnung, wie z.B. der Finite-Elemente-Methode (FEM), ist nicht auf jeden Fall anwendbar, da die Kraftverteilung weder zwischen den Kontaktstellen noch über die einzelnen Kontaktflächen von vornherein bekannt ist. Dafür ist der Aufbau eines geeigneten numerischen Verfahrens erforderlich, welches auf der Basis der FEM die Bestimmung der Kraftverteilung über die Kontaktstellen ermöglicht. Da die Kontaktanalyse für jede Positionslage beider Körper erneut durchgeführt werden soll, was fast immer die Lösung einer neuen FE-Aufgabe erfordert, ist der Modell-aufbau mit der zusätzlichen Anforderung an Rechenaufwand verbunden.

Nach der Analyse der in der Literatur beschriebenen Modelle läßt sich schlußfolgern, daß die verwendete Hauptgleichung stets die Verschiebungsgleichung ist, die zusammen mit den Gleichgewichts- und Nebenbedingungen den ganzen Kontaktprozeß numerisch simuliert. Die nichtlinearen Kontaktbeziehungen werden verschiedenartig linearisiert, welches jedoch immer zum Aufbau eines linearen Gleichungssystems führt. Neupert (1983) betrachtet die Kraftverteilung im Kontaktbereich zweier elastischer Körper mit nichtlinearen Anlagecharakteristiken. Er leitet die Integralgleichungen der Verschiebungen im Kontaktbereich und der Gleichgewichtsbedingungen für translatorische und rotatorische Starrkörperbewegungen ab. Die diskrete Kraftverteilung ergibt sich nach der Lösung des aufgebauten Gleichungssystems. Dieselben Gleichungen verwenden Weck u.a. (1987) zur Ermittlung der kontinuierlichen Kraftverteilung in der Kontaktzone. Das Gleichungssystem wird iterativ gelöst. Vijayakar u.a. (1988) legen die gleichartigen diskreten Beziehungen dar, aber über den ganzen potentiellen Kontaktbereich und nur für translatorische Starrkörperbewegungen. Das zusammengesetzte Gleichungssystem erfaßt auch die nichtkontaktierenden Punkte und wird auf der Basis der Minimierung des Ungleichgewichtes gelöst.

Im vorliegenden Beitrag wird ein neues Modell zur Bestimmung der Kraftverteilung über die Kontaktstellen zweier Rotationskörper dargestellt. Beim Modellaufbau werden ähnliche wie schon in der Literatur abgeleitete Gleichungen angewendet und die zusätzliche Anforderung an minimalem Rechenaufwand berücksichtigt. Durch eine zweckmäßige Problemformulierung wird die unbekanntene Abweichung von der Starrkörperdrehung eliminiert, was zu einem schnell lösbaren Gleichungssystem führt.

2 Theoretische Grundlagen

Um die Kontaktbeziehungen verständlicher darzulegen, werden entsprechend Bild 1 zwei konkrete Rotationskörper betrachtet (eine Zahnradpaarung mit Innenverzahnung). Hierbei ist der gleichzeitige Kontakt zwischen mehreren Zähnen ein gutes Beispiel für den mehrflächigen Körperkontakt. Es sei betont, daß die Auswahl dieser bestimmten Art von Rotationskörpern nicht die Allgemeinheit der abgeleiteten Gleichungen einschränkt.

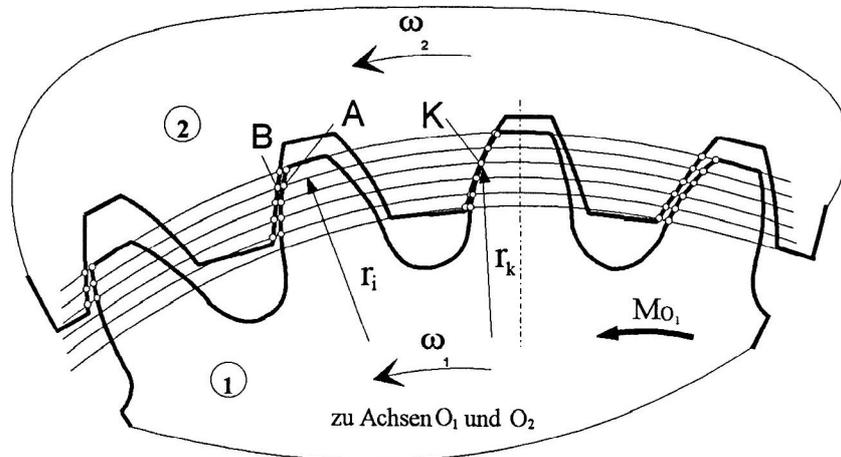


Bild 1. Kontakt zweier Körper
(A, B - potentielle Kontaktpunkte, K - Anfangskontaktpunkt, M_{O_1} - Drehmoment)

Beim Modellaufbau wird die Theorie der kleinen Deformationen vorausgesetzt. Das bedeutet, daß die Körperdeformationen im Vergleich zur Körperdimension angemessen klein sind. Die beiden Kontaktkörper bewegen sich ganz nahe der idealen Starrkörperbewegung. Eine kleine Abweichung von dieser Bewegung entsteht nur aufgrund der elastischen Körperdeformationen. Die Körper drehen sich um die eigenen Achsen O_1 bzw. O_2 mit vorgegebenen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 . Die beiden Drehachsen sind im Raum parallel angeordnet. Bei diesem konkreten Beispiel (Zahnräder mit Innenverzahnung) befinden sie sich unter dem im Bild 1 dargestellten Kontaktbereich.

Alle Gleichungen werden für die sogenannten "potentiellen Kontaktpunkte" (PKP) und "potentiellen Kontaktpunktpaare" (PKPP) im "potentiellen Kontaktbereich" hergeleitet. Ähnliche Grundbegriffe werden auch von Neupert (1983) und Vijayakar u.a. (1988) verwendet. Sie seien hier noch einmal erläutert. Als potentielles Kontaktpunktpaar werden zwei Punkte bezeichnet (z.B. die Punkte A und B im Bild 1), die sich am Anfang nicht im Kontakt befinden, aber unter Körperbelastung in Kontakt kommen können. Solche Punkte werden als potentielle Kontaktpunkte bezeichnet. Unter potentiellem Kontaktbereich versteht man die Menge aller potentiellen Kontaktpunktpaare. Als potentielle Kontaktstelle wird ein Teil des potentiellen Kontaktbereiches bezeichnet, wo aufgrund der Körpergeometrie eine kontinuierliche Kontaktfläche entsteht.

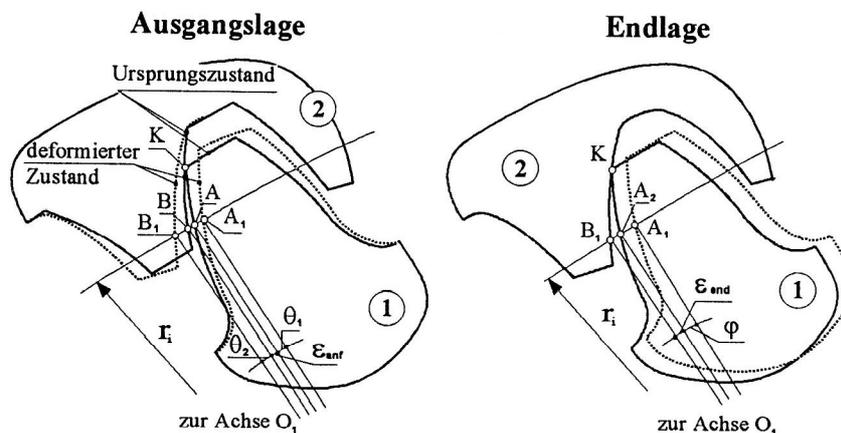


Bild 2. Körperdeformationen und Starrkörperdrehung infolge äußerer Belastung
(A, B - potentielle Kontaktpunkte, K - Anfangskontaktpunkt)

Die Auswahl der potentiellen Kontaktpunkte ist ein wichtiger Schritt beim Modellaufbau. In diesem Modell werden sie als Schnittpunkte eines Kreises mit Zentrum einer der Drehachsen (entweder O_1 oder O_2) und den gegenüberliegenden Körperflanken definiert. Der Grund dieser Auswahl liegt darin, daß der Rotationskörper als Starrkörper nur einen uneingeschränkten Freiheitsgrad besitzt - Drehung um die eigene Achse. Die bisherigen Voruntersuchungen (Popov, 1993) haben bewiesen, daß die Anwendung eines Polar Bezugssystems mit Zentrum O_1 oder O_2 auf jeden Fall zu empfehlen ist. Die potentiellen Kontaktpunkte der Körper 1 und 2 sind im Bild 1 als kleine Kreise dargestellt (siehe auch die Punkte A und B). Im Unterschied zur gewöhnlichen Annahme, daß die kontaktierenden Punkte bis zum Ende des Deformationsverlaufes im Kontakt bleiben sollen, wird hier für die potentiellen Kontaktpunkte angenommen, daß sie sich nur am Anfang im Kontakt befinden. Während der Deformation dürfen sie sich auf die gegenüberliegende Körperflanke verschieben. Durch diese wichtige Annahme, die bei der Berechnung der Einflußzahlen (siehe 3.1) berücksichtigt ist, können die Kontakt ereignisse besser modelliert werden.

Die Kontaktbeziehungen werden für ein potentielles Kontaktpunktpaar einer Kontaktstelle hergeleitet. Das schränkt die Gültigkeit der Beziehungen für die Kontaktpunktpaare der anderen Kontaktstellen nicht ein. Im Bild 2 sind zwei zu kontaktierende Flanken der Körper 1 und 2 in einem bestimmten Zeitpunkt dargestellt (je eine Zahnflanke von den beiden Zahnrädern). Im lastfreien Zustand (Ursprungszustand) seien die Flanken im Punkt K im Kontakt. Zur Vereinfachung wird der ganze Deformationsprozeß in zwei Einzelprozesse aufgeteilt. Der erste befaßt sich mit den Körperdeformationen (das linke Teilbild), der zweite mit der dadurch resultierenden Starrkörperdrehung des Körpers 1 um seine Achse O_1 (das rechte Teilbild). Hier wird angenommen, daß sich der Körper 2 mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega_2 = \text{konstant}$ dreht. Dann variiert die Winkelgeschwindigkeit ω_1 des Körpers 1, da die Winkelposition im bestimmten Zeitpunkt von den elastischen Körperdeformationen abhängig ist. Es ist besonders zweckmäßig die Drehachse dieses Körpers (in diesem Fall O_1) als Zentrum des Polar Bezugssystems zu verwenden.

Im Ursprungszustand sind die potentiellen Kontaktpunkte A und B durch ein Spiel voneinander entfernt, das als Zentralwinkel gemessen und als Anfangsspielwinkel ε_{anf} bezeichnet wird. Unter äußerer Belastung werden die Körper deformiert, und alle Profilpunkte verschieben sich in eine neue Lage. Dadurch ergibt sich der deformierte Zustand beider Körper (die Punktlinien in beiden Teilbildern). Um die Verschiebungen der potentiellen Kontaktpunkte als Zentralwinkel darzustellen, werden der deformierte und undeformierte Zustand betrachtet. Für diese Punkte wird angenommen, daß sie sich durch eine Rotation um das Zentrum O_1 in den deformierten Zustand gedreht haben. Dann sind die Punkte A_1 bzw. B_1 die Schnittpunkte des Radius O_1A bzw. O_1B mit der entsprechenden deformierten Flanke. Die Winkel AO_1A_1 und BO_1B_1 werden als Winkelverschiebungen θ_1 und θ_2 der Punkte A und B bezeichnet.

Nach der Körperdeformation scheint es, als ob ein Spiel zwischen den deformierten Flanken entstehen würde (siehe Punktlinien auf dem linken Teilbild). Das aber tritt in den realen Kontakt ereignissen nicht auf. Während der Körperdeformationen dreht sich der Körper 1 als Starrkörper um seine Achse O_1 und kompensiert dieses hypothetische Spiel. Die Starrkörperdrehung (rechtes Teilbild) wird mit φ gekennzeichnet. Da diese Drehung für alle potentiellen Kontaktpunktpaare gleich ist, ergibt sich

$$\varphi = \text{konstant} \quad (1)$$

Das Restspiel zwischen den Punkten A und B (A_2B_1) wird ebenfalls als Zentralwinkel gemessen und als Endspielwinkel ε_{end} bezeichnet. Aufgrund der Gleichstellung der Winkel $A_1O_1B_1$ auf den beiden Teilbildern kann die Verschiebungsgleichung

$$\varphi + \varepsilon_{end\ i} = \theta_{1i} + \theta_{2i} + \varepsilon_{anf\ i} \quad (2)$$

für jedes potentielle Kontaktpunktpaar i ermittelt werden. Das auf dem Körper 1 aufgebrauchte Moment \mathbf{M}_{O_1} ist gleich der Summe der aus den Kräften \mathbf{F}_j resultierenden Einzelmomente \mathbf{M}_j

$$\mathbf{M}_{O_1} = \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j, \quad (3)$$

wobei n die Anzahl aller potentiellen Kontaktpunktpaare im potentiellen Kontaktbereich ist. Analog den in linearer Elastizitätstheorie und FEM verwendeten Beziehungen zwischen den Verschiebungen und den Kräften in einer bestimmten Richtung

$$\delta_{ij} = c_{ij} F_j, \quad (4)$$

wobei δ_{ij} die Verschiebung des Punktes i unter Kraftwirkung am Punkt j und c_{ij} die Nachgiebigkeit dieses Punktes ist, werden für die Winkelverschiebungen beider Körper gleichartige Beziehungen

$$\theta_{1ij} = a_{1ij} F_{1j} \quad (5)$$

$$\theta_{2ij} = a_{2ij} F_{2j} \quad (6)$$

vorausgesetzt. Unter F_{1j} und F_{2j} sind die Normalkräfte am Punktpaar j zu verstehen, wenn nichts anderes vereinbart ist. Die Koeffizienten a_{1ij} und a_{2ij} werden als Einflußzahlen bezeichnet. Im Unterschied zu den Nachgiebigkeitskoeffizienten k_{ij} in Gleichung (4) sind die Einflußzahlen nichtlinear, da sie von der Kraftgröße abhängig sind. Diese Nichtlinearität ergibt sich aufgrund der angenommenen Verschiebungsart (eine Drehung). Nach der Linearisierung der Einflußzahlen entsteht ein lineares Gleichungssystem.

Die Gesamtwinkelverschiebung θ_{zi} ist eine Summe der einzelnen, von jeder Kraft beeinflussten Winkelverschiebung θ_{zij}

$$\theta_{zi} = \sum_{j=1}^n \theta_{zij} = \sum_{j=1}^n a_{zij} F_{zj} \quad (7)$$

wobei z die Körpernummer ($z = 1, 2$) ist. Aufgrund der Gleichung der Normalkräfte

$$F_{1j} = F_{2j} = F_j \quad (8)$$

in beiden Punkten eines potentiellen Kontaktpaares j folgt

$$\theta_i = \theta_{1i} + \theta_{2i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j \quad (9)$$

wobei als

$$a_{ij} = a_{1ij} + a_{2ij} \quad (10)$$

die Gesamteinflußzahl bezeichnet wird.

Die Reibung wird bei den Einflußzahlen berücksichtigt. Wenn das Coulomb-Reibgesetz vorausgesetzt wird, gilt für die Tangentialkraft F_T und Normalkraft F_N die Beziehung

$$F_T = \mu F_N \quad (11)$$

wobei μ die Reibungszahl ist. Da jede Kraft eine eigene Winkelverschiebung bewirkt, gelten die Formeln

$$\theta_T = a_T F_T \quad (12)$$

$$\theta_N = a_N F_N \quad (13)$$

wobei a_T und a_N die Tangential- bzw. die Normaleinflußzahlen sind. Für die Gesamtwinkelverschiebung eines potentiellen Kontaktpaares i unter Kraftwirkung am Punkt j gilt

$$\theta_{zij} = a_{Tzij} F_{Tj} + a_{Nzij} F_{Nj} = (\mu a_{Tij} + a_{Nij}) F_{Nj} \quad (14)$$

und für die Gesamteinflußzahl

$$a_{ij} = \mu a_{T1ij} + a_{N1ij} + \mu a_{T2ij} + a_{N2ij} \quad (15)$$

Die Tangentialeinflußzahlen müssen in Gleichung (15) mit ihren Vorzeichen eingesetzt werden, da die Reibungskraft bei jeder Eingriffslage eine unterschiedliche Richtung haben kann. Durch die Berücksichtigung der Reibungskräfte kann die Kontaktmodellierung verbessert werden.

Die Matrixform der für jedes potentielle Kontaktpunktpaar i geltenden Gleichung

$$\varphi + \varepsilon_{end\ i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} F_j + \varepsilon_{anf\ i} \quad (16)$$

und der Gleichgewichtsbedingung

$$|\mathbf{M}_{O_1}| = M_{O_1} = \sum_{j=1}^n r_j F_j \sin \gamma_j \quad (17)$$

ist

$$\mathbf{p} + \mathbf{e}_{end} = \mathbf{A}\mathbf{f} + \mathbf{e}_{anf} \quad (18)$$

$$M_{O_1} = \mathbf{b}^T \mathbf{F} \quad (19)$$

wobei γ_j der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren \mathbf{r}_j und \mathbf{F}_j ist.

Es bedeuten:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{anf} &= [\varepsilon_{anf\ 1}, \varepsilon_{anf\ 2}, \dots, \varepsilon_{anf\ n}]^T && \text{- Vektor der Anfangsspielwinkel,} \\ \mathbf{e}_{end} &= [\varepsilon_{end\ 1}, \varepsilon_{end\ 2}, \dots, \varepsilon_{end\ n}]^T && \text{- Vektor der Endspielwinkel,} \\ \mathbf{p} &= [\varphi, \varphi, \dots, \varphi]^T && \text{- Vektor der Starrkörperdrehung } (\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi = \text{konstant}), \\ \mathbf{f} &= [F_1, F_2, \dots, F_n]^T && \text{- Vektor der Normalkräfte,} \\ \mathbf{b} &= [b_1, b_2, \dots, b_n]^T && \text{- Transformationsvektor mit } b_i = r_i \sin \gamma_i \text{ für } i = 1 \dots n, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} && \text{- Flexibilitätsmatrix.} \end{aligned}$$

Die Kontaktverhältnisse liefern noch zwei Nebenbedingungen. Wenn zwei Punkte eines Kontaktpunktpaares i in Kontakt kommen, wird das Endspiel gleich Null ($\varepsilon_{end\ i} = 0$) und eine Kraft ($F_i > 0$) entsteht zwischen ihnen. Wenn diese Punkte sich nicht im Kontakt befinden, existiert ein Endspiel ($\varepsilon_{end\ i} > 0$) und keine Kraft belastet die Punkte ($F_i = 0$). Kurz gefaßt gelten folgende Nebenbedingungen für jedes potentielle Kontaktpunktpaar i :

$$\begin{array}{llll} \text{Entweder} & F_i > 0 & \text{und} & \varepsilon_{end\ i} = 0 & \text{(Punkte im Kontakt),} & (20) \\ \text{oder} & F_i = 0 & \text{und} & \varepsilon_{end\ i} > 0 & \text{(zwischen den Punkten - kein Kontakt).} \end{array}$$

Um die Gleichungen (18) und (19) zu lösen, entsteht die Aufgabe, bei bekanntem Drehmoment M_{O_1} und Körpergeometrie die Flexibilitätsmatrix \mathbf{A} aufzubauen, sowie die Anfangsspielwinkel $\varepsilon_{anf\ i}$ und den Transformationsvektor \mathbf{b} zu berechnen. Das Ziel ist die Bestimmung der Kontaktkräfte F_i unter Berücksichtigung der Nebenbedingungen (20).

3 Modellberechnungen

3.1 Bestimmung der Einflußzahlen

Jede Einflußzahl stellt die Winkelverschiebung θ_{zij} eines potentiellen Kontaktpunktes i infolge der Einheitskraftwirkung am Punkt j dar. Um die Winkelverschiebungen zu berechnen, ist die Bestimmung der linearen Punktverschiebungen sowie die maximalen Spannungen erforderlich. Zu diesem Zweck wird die FEM benutzt. Zuerst werden die beiden Körper mit finiten Elementen (FE) vernetzt. Da einige Rotationskörper eine Sektor-symmetrie besitzen, ist die Verwendung von FE-Copystrukturen besonders empfehlenswert. Jede FE-Struktur wird mit $2n_{FEM}$ Lastfällen berechnet, wobei n_{FEM} die Anzahl der FE-Knoten im ganzen potentiellen Kontaktbereich ist. Jeder Lastfall besteht aus einer Einheitskraft, die zur Körperflanke in Normal- oder Tangentialrichtung aufgebracht ist. Diese Berechnungsweise ist von Choi (1990) und indirekt von Neupert (1983) als "Flexibilitätsmethode" erwähnt. Die von der FE-Berechnung gewonnenen linearen Verschiebungen werden meist in einem lokalen kartesischen x - y -Koordinatensystem ausgegeben. Aus diesem Grund wird im weiteren die u - v -Darstellung der Knotenverschiebungen angewendet.

Im allgemeinen stimmen die potentiellen Kontaktpunkte nicht mit den Knoten des FE-Netzes überein. Dafür müssen ihre Verschiebungen durch Interpolation der Knotenverschiebungen an jeder möglichen Kontaktstelle bestimmt werden. Deshalb ist die Darstellung der Knotenverschiebungen jedes Körpers z als Funktion vom Knotenortsvektor r_i und Kraftortsvektor r_j erforderlich:

$$u_{zij} = f_{zu}(r_{zi}, r_{zj}) \quad (21)$$

$$v_{zij} = f_{zv}(r_{zi}, r_{zj}). \quad (22)$$

Hier ist r_{zi} der Radius, auf dem der potentielle Kontaktpunkt i liegt, und r_{zj} der Radius des Profilpunktes j , an dem die Kraft aufgebracht ist. Eine beispielsweise graphische Funktionsdarstellung ist im Bild 3 dargelegt.

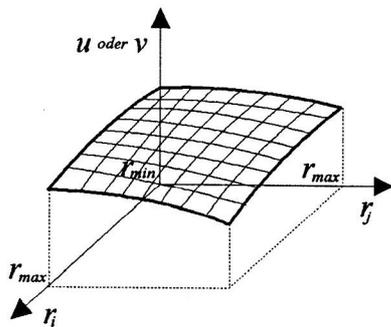


Bild 3. Prinzipielle graphische Darstellung der Verschiebungen

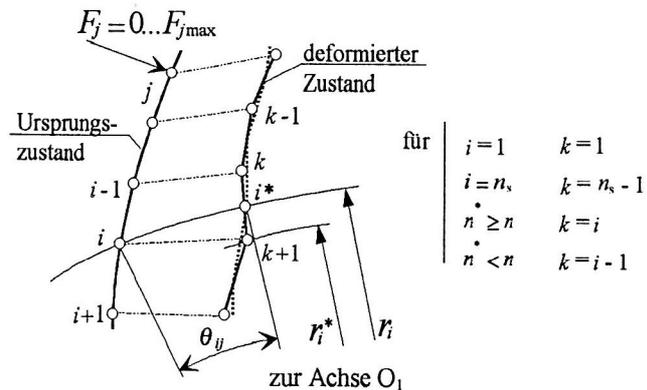


Bild 4. Körperflanke im lastfreien und deformierten Zustand

Zur Bestimmung der Einflußzahlen werden die im Bild 4 dargestellten lastfreien (Ursprungszustand) und deformierten Zustände einer Körperflanke betrachtet. Unter Belastung durch die Kraft F_j am Punkt j verschieben sich die potentiellen Kontaktpunkte in neue Positionen und bilden dadurch die deformierte Körperflanke (deformierter Zustand). Aufgrund der angenommenen Art der Winkelverschiebungen wird der deformierte Zustand so betrachtet, als ob er nicht aus linearverschobenen (z.B. Verschiebung des Punktes i in Punkt $k+1$), sondern aus winkelgedrehten Punkten (Drehung des Punktes i in Punkt i^*) gebildet würde. Nach dieser Annahme weicht die so definierte deformierte Körperflanke (fette Punktlinie) von der nach der FE-Berechnung gebildeten Flanke (fette ununterbrochene Linie) ab. Diese Abweichung bleibt aber im Rahmen der Fehler, die aus der diskreten Geometriedarstellung der Flanke hervorgerufen sind.

Die Einflußzahlen werden entsprechend der Gleichungen (5) und (6) bestimmt. Bei zunehmender Kraft F_j von 0 bis $F_{j \max}$ am Punkt j wird eine Reihe von Winkelverschiebungen θ_{ij}^e bzw. Einflußzahlen α_{ij}^e berechnet.

Diese Reihe, die die Beziehung der Einflußzahlen von der Kraft beschreibt, wird entsprechend linearisiert (z.B. durch die Methode der kleinsten Quadrate) und als Funktion dargestellt. Ein Pseudocode zur Bestimmung der Einflußzahlen an einer Kontaktstelle ist im Bild 5 dargestellt.

Die maximale zulässige Kraft $F_{j \max}$ kann als Verhältnis zwischen der für den Werkstoff zulässigen Spannung σ_v und der im Körper auftretenden maximalen Spannung σ_{vj}

$$F_{j \max} = \frac{\sigma_v}{\max \sigma_{vj}} \quad (23)$$

ermittelt werden. Die Koordinaten vom Punkt i sind aus der Körpergeometrie bekannt. Die Koordinaten von k für jeden Körper $z = 1, 2$ werden nach

$$\begin{aligned} x_{zk}^* &= x_{zk} + u_{zkj} F_{zj} \\ y_{zk}^* &= y_{zk} + v_{zkj} F_{zj} \end{aligned} \quad (24)$$

berechnet, wobei x_{zk} und y_{zk} die Punktkoordinaten im Ursprungszustand, x_{zk}^* und y_{zk}^* die Punktkoordinaten im deformierten Zustand, u_{zj} und v_{zj} die Verschiebungen in X - und Y -Richtung unter Einzelkraft F_j sind. Der Punkt i^* wird als Schnittpunkt des Kreises mit dem Radius r_i und der Geraden durch die Punkte k und $k+1$ gesucht. Im rechten Teil des Bildes 4 ist dargestellt, wie sich die Nummer von k ergibt. Die Anzahl der potentiellen Kontaktpunkte an dieser Kontaktstelle ist mit n_j gekennzeichnet.

< Für eine Kontaktstelle >

DO für j von 1 bis n_j für jeden Körper $z = 1, 2$
 DO für F_j von 0 bis $F_{j \max}$

- Berechne die Koordinaten der Punkte $k(x_{kj}, y_{kj})$ und $k+1(x_{k+1,j}^*, y_{k+1,j}^*)$ nach Gleichung (24)
- Berechne $i^*(x_{i,j}^*, y_{i,j}^*)$ als Schnittpunkt vom Kreis mit Radius r_i und der Geraden durch die Punkte k und $k+1$ (geometrische Aufgabe)
- $\theta_{ij}^e = \arctan\left(\frac{y_{ij}}{x_{ij}}\right) - \arctan\left(\frac{y_{i,j}^*}{x_{i,j}^*}\right)$
- $a_{ij}^e(F_j) = \frac{\theta_{ij}^e}{F_j}$

END DO
 $a_{ij} \leftarrow$ Linearisiere $a_{ij}^e(F_j)$
 END DO

Bild 5. Pseudocode zur Bestimmung der Einflußzahlen an einer Kontaktstelle

Diese Art der Berechnung der Einflußzahlen hat den Vorteil, daß nur eine einmalige FE-Berechnung für jeden Körper erforderlich ist. Nach der Bestimmung der linearen Knotenverschiebungen können die Einflußzahlen für jede Körperposition schnell berechnet werden.

3.2 Bestimmung der Anfangsspielwinkel und des Transformationsvektors

Die beiden Vektoren lassen sich aus der Körpergeometrie bestimmen. Die Anfangsspielwinkel haben stets ein nichtnegatives Vorzeichen. Mindestens ein Spielwinkel eines potentiellen Kontaktpunktpaares muß Null sein, was einen Kontakt zwischen den beiden Punkten bedeutet.

3.3 Lösung des Gleichungssystems

Das zu lösende Gleichungssystem basiert auf dem allmählichen Eintreten von Kontakten für potentielle Kontaktpunkte. Zu seinem Aufbau werden die Matrixgleichungen (18) und (19) verwendet. Die Größe des Gleichungssystems ist von der Anzahl der kontaktierenden Punkte abhängig.

Am Anfang wird angenommen, daß sich die beiden Körper im potentiellen Kontaktpunktpaar s_1 im Kontakt befinden. Dann ergibt sich für das Anfangs- und Endspiel

$$\varepsilon_{anf s_1} = \varepsilon_{end s_1} = 0 \quad \text{und} \quad F_{s_1} > 0 \quad (25)$$

und für alle anderen Kräfte $F_j = 0$, für $j = 1..n, j \neq s_1$. Für dieses potentielle Kontaktpunktpaar gilt auch

$$F_{s_1} = \frac{M_{O_1}}{b_{s_1}} \quad (26)$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n a_{s_1 j} F_j \quad (27)$$

Aufgrund des gleichen Drehwinkels φ für jedes potentielle Kontaktpunktpaar ist die Eliminierung von φ in Gleichung (18) durch Subtraktion der s_1 -ten Zeile von jeder anderen möglich. Die Elemente der Matrix \mathbf{a} werden zu

$$a_{ij}^R = a_{ij} - a_{s_1 j} \quad (28)$$

während sich die Anfangs- und Endspielwinkel $\varepsilon_{anf i}$ und $\varepsilon_{end i}$ (für $i = 1..n, i \neq s_1$) nicht ändern, da $\varepsilon_{anf s_1} = \varepsilon_{end s_1} = 0$ ist. Die Zeilen der Flexibilitätsmatrix \mathbf{A} und der beiden Vektoren \mathbf{e}_{anf} und \mathbf{e}_{end} werden auf $n-1$ reduziert. Nach der Reduzierung hat die Matrixgleichung (18) die Form

$$\mathbf{e}_{end}^R = \mathbf{A}^R \mathbf{f} + \mathbf{e}_{anf}^R \quad (29)$$

Die Lösung dieser Gleichung erfolgt iterativ nach dem im Bild 6 dargestellten Algorithmus. Zuerst werden die Kraft F_{s_1} nach Gleichung (26) und die Zahnradrotation φ nach Gleichung (27) ermittelt und dann alle Endspielwinkel $\varepsilon_{end i}$ ($i = 1..n, i \neq s_1$) berechnet. Wenn die Nebenbedingung (20) für alle Endspiele erfüllt ist, wird die gesuchte Lösung gefunden. Ansonsten wird der Kontakt in einem weiteren Punktpaar s_2 vorausgesetzt. Welcher Punkt zuerst in Kontakt kommt, wird nach dem minimalen Endspielwinkel (31) (maximalen Betragsmaß) bestimmt.

Ein neues Gleichungssystem (32) wird aus den Zeilen und Spalten aller kontaktierenden Punktpaare und der Zeile des Gleichgewichtes aufgebaut. Nach der Lösung dieses Systems bezüglich \mathbf{f} folgt eine erneute Berechnung von φ nach Gleichung (33) und $\varepsilon_{end i}$ nach Gleichung (34). Die Bedingung (20) wird neu überprüft und wenn sie nicht erfüllt ist, folgt eine Ergänzung durch ein weiteres Kontaktpunktpaar. Zum bereits aufgebauten Gleichungssystem (32) werden die Zeile und die Spalte dieses Paares hinzugefügt. Für die kontaktierenden Punkte wird der fortlaufende Index k ($k = 1..n_k$) verwendet, wobei n_k die Anzahl dieser Punkte ist. Die Berechnungen werden bis zur Erfüllung der Bedingung (20) durchgeführt.

Es ist zu bemerken, daß das System nur erweitert wird, und maximal n Unbekannte erhalten kann. Normalerweise ist die Anzahl der kontaktierenden Punktpaare (n_k) kleiner als der nichtkontaktierenden ($n - n_k$). Dafür sind die Iterationen zur Bestimmung der Anzahl der kontaktierenden Punktpaare kleiner als die des ganzen Kontaktbereiches. Das führt zur wesentlichen Verminderung der erforderlichen Berechnungen.

Zur weiteren Reduzierung der Berechnungen bei der Lösung des Gleichungssystems (32) ist es zweckmäßig, ein geeignetes numerisches Verfahren (z.B. die Gauß-Elimination) anzuwenden, welches die Wiederbenutzung der letzten Iterationsergebnisse erlaubt.

Iterationsberechnungen (Beispiel für die dritte Iteration)

• IF (alle $\varepsilon_{end\ i} \geq 0$) THEN END " Die Lösung ist gefunden " (30)

ELSE (Kontakt im PKPP s_3 mit minimalem ε_{end} . Dann wird angenommen $\varepsilon_{end\ s_3} = 0$) (31)

• $n_k := n_k + 1$ ($n_k = 3$)

• Erweiterung des Gleichungssystems mit der Zeile und Spalte des neukontaktierenden Punktpaares s_3

$$\begin{bmatrix} M_{O_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon_{anf\ s_2} \\ \varepsilon_{anf\ s_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{s_1} & b_{s_2} & b_{s_3} \\ a_{s_2\ s_1}^R & a_{s_2\ s_2}^R & a_{s_2\ s_3}^R \\ a_{s_3\ s_1}^R & a_{s_3\ s_2}^R & a_{s_3\ s_3}^R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{s_1} \\ F_{s_2} \\ F_{s_3} \end{bmatrix} \quad (32)$$

• Lösung des Gleichungssystems bezüglich f durch die Gauß-Elimination

• $\varphi = \sum_{j=1}^{n_k} a_{s_1 j} F_j$ (33)

• $\varepsilon_{end\ i} = \varepsilon_{anf\ i} - \varphi$, $i = 1..n$ und $i \neq s_1, s_2$ (34)

• GO TO (30)

Bild 6. Pseudocode zum Aufbau und Lösung des Gleichungssystems

4 Zusammenfassung und Ausblick

Im vorliegenden Beitrag wird ein Modell zur Bestimmung der Kraftverteilung über mehrere Kontaktstellen beim Reibungskontakt zweier Rotationskörper vorgestellt. Die Kontaktgleichungen sind für rotatorische Starrkörperbewegungen abgeleitet. Alle Verschiebungen und Abstände sind als Polarwinkel in Polarkoordinaten angegeben. Die nichtkontaktierenden Punkte im potentiellen Kontaktbereich sind auch in diese Gleichungen eingeschlossen. Die zweckmäßige Definition der potentiellen Kontaktpunkte erlaubt die Eliminierung der unbekanntenen Starrkörperdrehungen aus dem aufgebauten Gleichungssystem. Das ermöglicht den Aufbau eines neuen Gleichungssystems, welches nur die kontaktierenden Punkte einschließt. Durch seine Erweiterung wird es iterativ gelöst. Die Wiederbenutzung der letzten Iterationsergebnisse tragen zur schnelleren Bestimmung der Kraftverteilung bei. Die Kontaktmodellierung ist durch die erlaubte relative Verschiebung zweier Kontaktpunkte während des Deformationsverlaufes sowie durch die Berücksichtigung der Reibung verbessert worden. Der größte Vorteil ist die Reduzierung des Rechenaufwandes, wobei für die Simulation des kontinuierlichen Zusammenwirkens beider Körper nur eine FE-Aufgabe je Körper gelöst werden muß. Aufgrund der berechneten Linearverschiebungen sind die erforderlichen Größen für jede Körperposition relativ schnell zu bestimmen. Das vorliegende Modell ist für Körper geeignet, die sich um zwei parallel angeordnete Achsen drehen. Deshalb ist die Erweiterung dieses Modells in ein dreidimensionales nicht mit großem Aufwand verbunden. Die praktische Anwendung des Modells ist bei der Kontaktanalyse von Zahnrädern, Zahnriemen, Nocken oder Zahnkupplungen zu sehen.

Literatur

1. Choi, M.; David, J.M.: Mesh Stiffness and Transmission Error of Spur and Helical Gears. SAE Transactions, Vol. 99, Sect. 6, (1990), 1599-1607.
2. Neupert, B.: Berechnung der Zahnkräfte, Pressungen und Spannungen von Stirn- und Kegelradgetrieben. Dissertation, RWTH Aachen, (1983).

3. Popov, V.: Festigkeitsuntersuchungen von Zahnradpaarungen mit großem Überdeckungsgrad. Preprint MBI-93-1, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, (Juni 1993), 97-109.
4. Vijayakar, S.; Busby, H.; Houser, D.: Linearisation of Multibody Frictional Contact Problems. Computers and Structures, Vol. 29, No. 4, (1988), 569-576.
5. Weck, M.; Bong, H.-P.: Zur Kraftverteilung in Gleit- und Wälzkontakten. VDI-Zeitschrift, Bd. 129, Nr.11, (1987).

Symbole

A	- Flexibilitätsmatrix
b	- Transformationsvektor
p	- Vektor der Starrkörperdrehung
e	- Vektor der Spielwinkel
f	- Kraftvektor
α	- Einflußzahl
b	- Transformationskoeffizient
c	- Nachgiebigkeitskoeffizient
n	- Anzahl der potentiellen Kontaktpunkte
n_{FEM}	- Anzahl der Knoten des FE-Netzes
n_k	- Anzahl der kontaktierenden Punkte
n_s	- Anzahl der potentiellen Kontaktpunkte
r	- Radius
x, y	- Punktkoordinaten
F	- Kraft
M_{O_1}	- Drehmoment
γ	- eingeschlossener Winkel
δ	- lineare Verschiebung
ε	- Spielwinkel
φ	- Starrkörperdrehung
μ	- Reibungszahl
θ	- Winkelverschiebung
σ	- Spannung

Indizes

<i>anf</i>	- Anfang
<i>end</i>	- Ende
<i>e</i>	- Reihenwerte
<i>i, j, k, s</i>	- Punktindizes
<i>z</i>	- Körpernummer
<i>N</i>	- in Normalrichtung
<i>R</i>	- reduzierte Matrix
<i>T</i>	- in Tangentialrichtung
1	- Körper 1
2	- Körper 2
*	- im deformierten Zustand

Anschrift: Professor Dr.-Ing.habil. Walter Weese, Institut für Mechanik; Dipl.-Ing. Vladimir Popov, Graduiertenkolleg MBI; Otto-von-Guericke-Universität, Postfach 4120, 39016 Magdeburg