

# Dynamik dissipativer Kreisel

F.P.J. Rimrott, B. Runau, A. Saitov

*Die Kreisellehre stützt sich auf die Annahme, daß Festkörperkreisel durch Starrkörper ersetzt werden können. Diese Annahme hat sich als sehr erfolgreich erwiesen und uns die vielen Erkenntnisse über das Verhalten von Kreiseln beschert. Bestrebungen, einen Schritt weiter zu gehen und lineare Elastizität für den Festkörperkreisel zuzulassen, erscheinen durchaus berechtigt. Der nächste Schritt wäre lineare Elastizität mit Materialhysterese. Um dissipative Kreisel zu untersuchen, kann man vielleicht sogar auf die Elastizität ganz verzichten und mit einem Starrkörper arbeiten, der Hystereseverluste erleidet. Ein ganz anderes Vorgehen basiert darauf, daß man den Einzelkörper aufgibt, und von vornherein annimmt, daß ein Festkörperkreisel aus mehreren Starrkörpern besteht, die untereinander durch Federn und Dämpfer verbunden sind. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie man noch mit einem Einzelkörper arbeiten kann, um sich ein Bild vom Verhalten eines dissipativen Kreisels zu machen.*

## 1 Einleitung

Im folgenden wollen wir aufzeigen, wie man vielleicht am besten holistisch vorgehen kann, um im Laufe der Zeit eine möglichst allgemeingültige Formulierung des Verhaltens von drehmomentfreien ursprünglich axialsymmetrischen Festkörperkreiseln zu erarbeiten.

Bei drehmomentfreien ursprünglich axialsymmetrischen Kreiseln (Satelliten) beobachtet man ein langsames kontinuierliches Driften der Winkelhaltung der Symmetrieachse des Kreisels aus einer beliebigen Anfangshaltung in eine stabile, permanente Endhaltung mit einem Nutationswinkel von entweder  $0^\circ$  oder  $90^\circ$ . Eine allgemeingültige Aussage über das Driften von Kreiseln liefern die Kollinearitätstheoreme (Rimrott, 1986). Eine detaillierte theoretische Beschreibung des Driftvorganges ist schwierig, wenn nicht gar unmöglich.

Zum anderen kann man sich jedoch Modellkreisel vorstellen, die mit Ausnahme von (kleinen) Auslegern völlig starr sind und in einer klar beschreibbaren Weise auf eine vorgegebene träge Kraft reagieren. Man kann mit diesem Vorgehen jedes auftretende träge Kraftfeld einzeln untersuchen. Die sich ergebenden Driftvorgänge lassen sich überlagern.

Das so erhaltene Ergebnis läßt sich dann sogar bei der Auswertung experimenteller Ergebnisse dahingehend verwenden, daß man Aussagen über den vorherrschenden Verformungsprozeß in einem gegebenen Kreiselsatelliten aus seinem Driftverhalten ableiten kann. Das Endziel bleibt eine allgemeine globale theoretische Beschreibung des Driftvorganges, nur unter der Annahme, daß der Kreisel irgendwie innere Energieverluste erleidet.

## 2 Der Eulersche Drallsatz

Der allgemein gültige Eulersche Drallsatz

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \quad (1)$$

führt bei drehmomentfreien Kreiseln, d.h. bei  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , dazu, daß der Drall

$$\mathbf{H} = \text{konstant} \quad (2)$$

ist, was dessen Größe als auch dessen Richtung angeht (Bild 1).

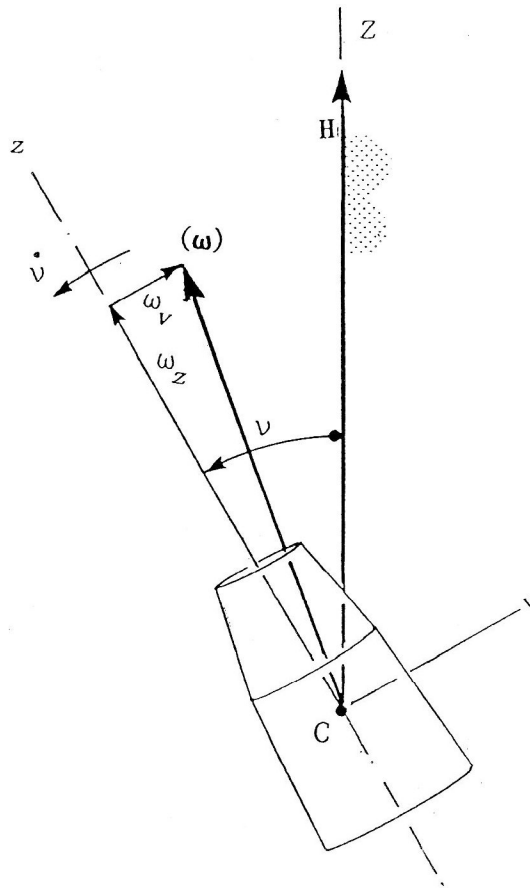


Bild 1. Drall  $H$ , Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und Haltungswinkel  $\nu$

### 3 Energieratensumme

Wenn sich ein Festkörperkreisel dreht, dann hat er eine kinetische Rotationsenergie, für die wir das Symbol  $T_e$  einführen wollen. Besteht der Körper aus linear elastischem Material, dann wird er infolge von trägen Kräften und trägen Momenten eine Verformung erleiden, die zu einer (elastischen) potentiellen Energie führt, für die wir das Symbol  $V$  einführen wollen. Die im Festkörperkreisel vorhandene potentielle Energie wird umso kleiner sein, je steifer der Festkörperkreisel ist. Ist der Festkörperkreisel absolut starr, dann verschwindet die potentielle Energie vollständig.

Nun kann man einen *assoziierten Starrkörperkreisel* (Rimrott und Sperling, 1995) definieren, der eine kinetische Energie  $T$  hat, die gleich der Summe aus  $T_e$  und  $V$  ist, d.h.

$$T = T_e + V \quad (3)$$

Die kinetische Energie  $T$  kann nun dazu benutzt werden, einige Ergebnisse der klassischen Kreiseltheorie (für Starrkörperkreisel) auch für nichtstarre Kreisel zu verwenden.

Als dritte Energie erscheint die Dissipationsenergie  $D$ , mit der sich sehr schlecht arbeiten läßt. Viel einleuchtender ist es, mit der Dissipationsleistung  $\dot{D}$  zu arbeiten. Die Summe aller Leistungen (Energieraten) muß verschwinden, wenn keine äußere Energie zugeführt wird. Das Vorhandensein von  $\dot{D}$  bedeutet, daß innere Energie (nach außen, in Form von Wärme) abgeführt wird. Es gilt also

$$\dot{T}_e + \dot{V} + \dot{D} = 0 \quad (4)$$

oder, in Anbetracht von Gleichung (3),

$$\dot{T} + \dot{D} = 0 \quad (5)$$

Es läßt sich nun zeigen, daß die kinetische Energie des assoziierten Starrkörpers durch

$$T = \frac{1}{2} \frac{H^2}{A} \left( 1 + \frac{A-C}{C} \cos^2 \nu \right) \quad (6)$$

angegeben werden kann (Bild 2), deren Ableitung nach der Zeit, bei  $\mathbf{H} = \text{konstant}$ , sich zu

$$\dot{T} = - \frac{A-C}{AC} H^2 \dot{\nu} \sin \nu \cos \nu \quad (7)$$

ergibt. Die Verwendung von Gleichung (5) gestattet, eine Beziehung zwischen Driftgeschwindigkeit  $\dot{\nu}$  und Dissipationsleistung  $\dot{D}$  herzustellen.

$$\dot{D} = \frac{A-C}{C} \frac{H^2}{A} \dot{\nu} \sin \nu \cos \nu \quad (8)$$

Die Größe  $\nu$  ist der Nutationswinkel, demnach ist  $\dot{\nu}$  die Nutationswinkelgeschwindigkeit. In der Raumfahrt wird  $\nu$  oft als *Haltung* (Attitude) bezeichnet.

Gleichung (8) sagt jedoch leider weder etwas Grundlegendes über die tatsächliche Größe von  $\dot{\nu}$  oder  $\dot{D}$  aus, noch darüber, ob diese Größen vom Haltungswinkel  $\nu$  oder einer anderen Größe abhängen.

Eines läßt sich jedoch aus Gleichung (8) ablesen. Da  $\dot{D}$  immer positiv ist (Problemstellungen einer Energiezufuhr sind ausgeschlossen), ist  $\dot{\nu}$  positiv-definit für gestreckte Kreisel ( $A > C$ ) und negativ-definit für abgeplattete Kreisel. Wenn man nun noch bedenkt, daß sich mit der Annahme  $0 \leq \nu \leq 90^\circ$  das gesamte Kreiserverhalten beschreiben läßt, dann besagt Gleichung (8), daß dissipative gestreckte Kreisel gegen  $\nu = 90^\circ$  hin driften, dissipative abgeplattete Kreisel aber gegen  $\nu = 0^\circ$ . Davon gibt es einige wenige Ausnahmen, z.B. bei fast kugelförmigen Kreiseln, d.h., wenn sich  $A$  und  $C$  nur geringfügig voneinander unterscheiden. Diese Ausnahmen sollen jedoch in der vorliegenden Betrachtung nicht berücksichtigt werden. Um eine Beschreibung der Größe der Dissipationsleistung  $\dot{D}$  zu erhalten, müssen wir den Drall  $\mathbf{H}$  des Kreisels betrachten.

#### 4 Die Winkelgeschwindigkeit

Wir wählen ein umlaufendes (floating)  $Cuvz$ -Zwischenkoordinatensystem, in dem die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels folgendermaßen aussieht:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_v & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_u & \mathbf{e}_v & \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\nu} \\ \omega_v \\ \omega_z \end{bmatrix} \quad (9)$$



$$Y_{uz} = -\beta \omega_v \omega_z \dot{\sigma} \quad (13)$$

und mit  $\omega_v = \frac{H}{A} \sin \nu$  und  $\omega_z = \frac{H}{C} \cos \nu$  aus der Starrkörpertheorie erhalten wir

$$Y_{uz} = -\beta \frac{A-C}{A^2 C^2} H^3 \sin \nu \cos^2 \nu \quad (14)$$

wobei  $\beta$  ein (hoffentlich konstanter) Dämpfungsbeiwert ist, mit der Dimension  $\text{Ws}^6$ .

Wegen  $\omega_u = \dot{\nu}$  können wir Gleichung (12) benutzen, um eine Beziehung zwischen der Driftgeschwindigkeit  $\dot{\nu}$  und dem Verformungsparameter  $Y_{uz}$  herzustellen

$$\dot{\nu} = -\frac{Y_{uz}}{A} \omega_z \quad (15)$$

Wenn man nun Gleichung (14) heranzieht, dann kann man schreiben

$$\dot{\nu} = \beta \frac{A-C}{A^3 C^3} H^4 \sin \nu \cos^3 \nu \quad (16)$$

## 6 Das Driften des Nutationswinkels

Unter Beachtung von  $\dot{\nu} = d\nu/dt$  läßt sich Gleichung (16) integrieren zu

$$t - t_0 = \frac{A^3 C^3}{2\beta(A-C)H^4} \left( \tan^2 \nu - \tan^2 \nu_0 + \ln \frac{\tan^2 \nu}{\tan^2 \nu_0} \right) \quad (17)$$

Wir setzen nun willkürlich  $t_0 = 0$  und zur Abkürzung  $K = \frac{A^3 C^3}{2\beta(A-C)H^4}$ . Damit erhalten wir

$$t = K \left( \tan^2 \nu - \tan^2 \nu_0 + \ln \frac{\tan^2 \nu}{\tan^2 \nu_0} \right) \quad (18)$$

In Bild 3 ist Gleichung (18) auf die Versuchsergebnisse des Kreiselsatelliten OFFEQ 1 (Klajn und Gur, 1992) angewandt worden. Man erkennt eine befriedigende Übereinstimmung für den ersten Teil der Kurve. Nach 20 Tagen weichen Versuchsergebnis und theoretische Kurve (18) jedoch erheblich voneinander ab.

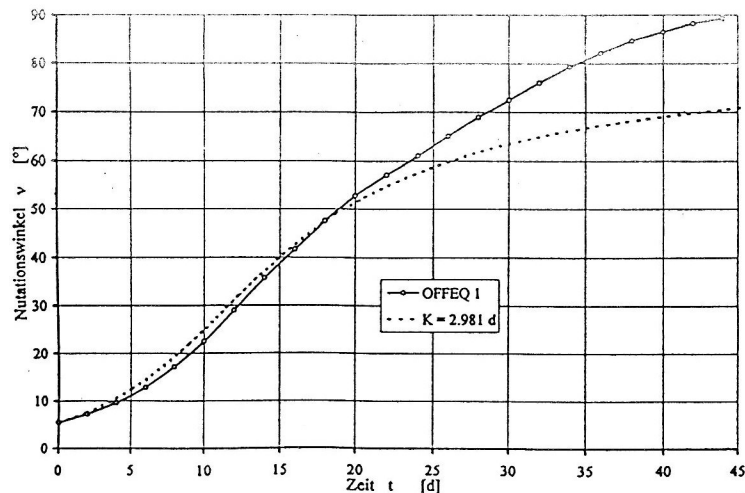


Bild 3. OFFEQ 1 Versuchsergebnisse und theoretische Kurve (18)

Als Erklärung dafür bieten sich unmittelbar vier Möglichkeiten an:

1. Es kann Resonanz der Kreiselbauteile eintreten. Dann würde die Dissipationsleistung  $\dot{D}$  wegen der größeren Ausschläge ansteigen und damit auch die theoretische Kurve (18) (Rimrott und Yu, 1987).
2. Es können Verformungen anderer, nicht in Gleichung (13) berücksichtigter Bauteile eine Rolle spielen (Rimrott und Semenov, 1994).
3. Es kann eine (kleine) Abweichung von perfekter Axialsymmetrie vorliegen (Rimrott und Runau, 1996).
4. Das Erdschwerefeld macht sich bemerkbar, d.h., die Annahme der Drehmomentfreiheit ist verletzt.

Alle vier Möglichkeiten können im Prinzip auch in der theoretischen Beschreibung berücksichtigt werden. Die dazu notwendigen analytischen und numerischen Betrachtungen gehen über den Rahmen dieser Arbeit hinaus. Die Dissipationsleistung (8) läßt sich mit Hilfe der Gleichung (16) für die Driftgeschwindigkeit schließlich ausdrücken durch

$$\dot{D} = \beta \frac{(A-C)^2}{A^4 C^4} H^6 \sin^2 \nu \cos^4 \nu \quad (19)$$

## 7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit ist kurz skizziert worden, wie das Driftverhalten eines drehmomentfreien, dissipativen und ursprünglich axialsymmetrischen Kreisels beschrieben werden kann.

## Literatur

1. Klajn, M.; Gur, I.: Nutational Divergence Time Constant of a Spinning Axisymmetric Spacecraft due to Damped Elastic Structural Elements. AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Proceedings, (1992), 47-52
2. Rimrott, F.P.J.: Kollinearitätssätze für den rotierenden Festkörper. ZAMM, 67, 5, (1986), T440-442
3. Rimrott, F.P.J.: Introductory Attitude Dynamics, Springer-Verlag, New-York, (1988), 383 S.
4. Rimrott, F.P.J.; Runau, B.: Der Driftvorgang bei axialsymmetrischen Kreiselsatelliten. ZAMM, 75, (1995), 123-124
5. Rimrott, F.P.J.; Runau, B.: Attitude Decay of an Almost Axisymmetric Spacecraft due to Internal Energy Dissipation. MDP-6, Cairo, Proceedings, (1996), 649-659
6. Rimrott, F.P.J.; Semenov, G.: Attitude Drift of a Dissipative, Torquefree, Radially Deformable Body, ZAMM 74, 2, (1994), 97-103
7. Rimrott, F.P.J.; Sperling, L.: Collinearity Theorems and Gyro Energy Dissipation. CANCAM Proceedings, 1, (1995), 132-133
8. Rimrott, F.P.J.; Yu, Yongxi: Attitude Drift of a Torquefree, Axisymmetric Gyro Through a Structural Resonance. IX COBEM, Florianopolis, Proceedings, 2, (1987), 869-872

---

*Anschrift:* Professor Dr.-Ing. Dr. h.c. mult. F.P.J. Rimrott, Dipl.-Ing. Bernd Runau, Dipl.-Mech. Alexander Saitov, Institut für Mechanik, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Postfach 4120, D-39016 Magdeburg