

# Spannungsintensitätsfaktoren für Risse in Kerben

M. Dankert

*Die Lebensdauer zyklisch beanspruchter Bauteile unterteilt man üblicherweise in Anriß- und Rißfortschrittsphase. Für gekerbte Komponenten wird die Lebensdauer in vielen Fällen weitestgehend vom Rißwachstum in Kerben bestimmt, dessen Beschreibung über Rißspitzenparameter erfolgt. Für Kerbrißprobleme existieren keine exakten Lösungen zur Ermittlung der Rißspitzenbeanspruchung. Man benötigt daher Näherungsformeln, die hier für 3D-Risse in gekerbten Scheiben unter Zugbelastung vorgestellt werden.*

## 1 Einleitung

Die Ursachen für das Ermüdungsversagen vieler Bauteile und Konstruktionen im Maschinen-, Anlagen- und Schiffbau sowie in der Luft- und Raumfahrt sind Defekte innerhalb des Materials oder Risse und das sich dann jeweils anschließende Rißwachstum. Mit Hilfe der Bruchmechanik soll die mechanische Sicherheit von Komponenten mit Fehlstellen (z. B. Risse) sichergestellt und letztendlich Versagen ausgeschlossen werden. Zwingende Voraussetzung dafür ist, daß die Versagensvorgänge bewertbar sind. Hierbei besteht die Hauptschwierigkeit darin, Beanspruchungsgrößen und -kriterien zu finden, die den Versagensvorgang charakterisieren. Maßgebend für Risse und den Rißfortschritt ist das Beanspruchungsgeschehen an der Rißspitze (2D) bzw. entlang der Rißfront (3D). In der Kontinuumsmechanik verwendet man zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens Größen wie Spannungen und Verzerrungen. Diese eignen sich allerdings nicht für die Beschreibung des Bruchvorganges, da sie an der Rißspitze eine Singularität ( $\sigma, \epsilon \rightarrow \infty$ ) aufweisen. Deshalb hat es sich in der Bruchmechanik bewährt, zusätzliche Größen einzuführen, die eine bessere Charakterisierung des lokalen Zustandes an der Rißspitze erlauben.

Risse entstehen bevorzugt in Spannungskonzentrationen, die sich beispielsweise in Kerben ausbilden. Diese Risse sind in der Regel ellipsenförmig und behalten auch während der Rißwachstumsphase eine elliptische oder ellipsenähnliche Rißfront. Deshalb sind Lösungen für Kerbrißprobleme für die angewandte Bruchmechanik von besonderem Interesse. Exakte Lösungen sind aufgrund der Komplexität dieser Problemstellungen nicht verfügbar. Näherungsformeln, die die verschiedensten Einflußgrößen berücksichtigen, sind daher für die praktische Anwendung unentbehrlich. Beschränkt man sich auf die linear-elastische Bruchmechanik, so ist der Spannungsintensitätsfaktor  $K$  der Rißspitzenparameter, mit dem sich das Beanspruchungsgeschehen an der Rißspitze bzw. entlang der Rißfront beschreiben läßt. Eine Voraussetzung zur Anwendung der linear-elastischen Bruchmechanik ist ein rein elastisches Werkstoffverhalten im gesamten Bereich des rißbehafteten Bauteils. Eventuelle elastisch-plastische Vorgänge an der Rißspitze müssen deshalb auf kleine Gebiete beschränkt bleiben, die dann in der makroskopischen Betrachtung vernachlässigt werden können.

Näherungsformeln zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren für einen weiten Bereich von Oberflächen-, Eck- und Durchgangsrissen in gekerbten Scheiben wurden in [1] entwickelt und ausführlich dargestellt. Diese Formeln, deren theoretische Grundlagen sowie einige Verifikationsbeispiele sollen in diesem Beitrag kurz vorgestellt werden.

## 2 Theoretische Grundlagen der linear-elastischen Bruchmechanik

### 2.1 Der Spannungsintensitätsfaktor

Betrachten wir zunächst die Spannungsverteilung in Bauteilen bei elastischem Werkstoffverhalten unter reiner Zugbelastung (Bild 1). Für ein ungekerbtes Bauteil stellt sich ein homogener Spannungszustand ein. Durch eine Kerbe wird der homogene Spannungszustand gestört, und es ergibt sich infolge der Kerbwirkung eine Spannungsüberhöhung in der Kerbe. Bei einem rißbehafteten Bauteil liegt ebenfalls ein

inhomogener Spannungszustand vor. An der Rißspitze werden die Spannungen unendlich groß. Aufgrund dieser Singularität sind die Spannungen für die Beschreibung der Beanspruchung von Bauteilen mit Riß ungeeignet. Unerlässlich ist deswegen die Betrachtung des Spannungszustandes im Rißspitzennahfeld.

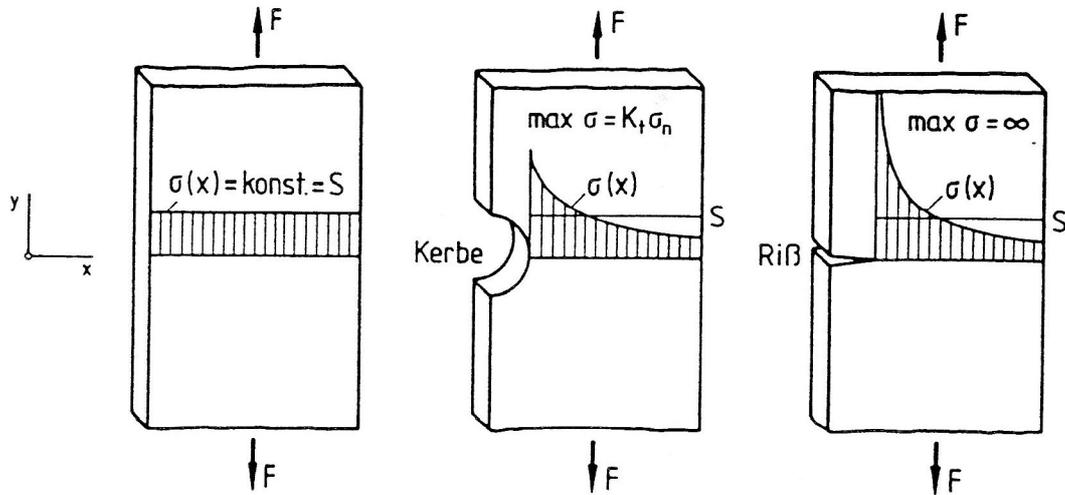


Bild 1: Spannungverteilung in Bauteilen bei elastischem Werkstoffverhalten

Die analytische Beschreibung (vgl. Bild 2) lautet:

$$\sigma_x = A_1 \cdot r^{-0.5} \cdot f_{x,1}(\Theta) + A_2 \cdot r^0 \cdot f_{x,2}(\Theta) + A_3 \cdot r^{0.5} \cdot f_{x,3}(\Theta) + \dots \quad (1)$$

$$\sigma_y = A_1 \cdot r^{-0.5} \cdot f_{y,1}(\Theta) + A_2 \cdot r^0 \cdot f_{y,2}(\Theta) + A_3 \cdot r^{0.5} \cdot f_{y,3}(\Theta) + \dots \quad (2)$$

$$\tau_{xy} = A_1 \cdot r^{-0.5} \cdot f_{xy,1}(\Theta) + A_2 \cdot r^0 \cdot f_{xy,2}(\Theta) + A_3 \cdot r^{0.5} \cdot f_{xy,3}(\Theta) + \dots \quad (3)$$

$A_1, A_2, A_3, \dots$  sind Funktionen der Bauteilgeometrie und der Belastung, und  $f_x, f_y, f_{xy}$  sind Winkelfunktionen.

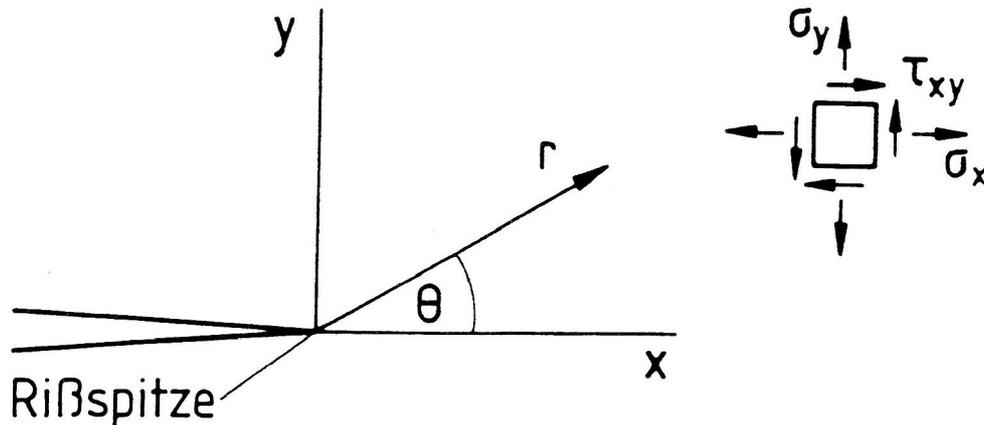


Bild 2: Spannungsdefinition an der Rißspitze

Im Nahfeld der Rißspitze ( $r \rightarrow 0$ ) streben die Ausdrücke mit  $r^{-0.5}$  gegen  $\infty$ . Folglich ergibt sich eine Dominanz der singulären Glieder. Aus den Gleichungen (1)-(3) ergibt sich dann näherungsweise:

$$\sigma_x = \frac{A_1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \Theta}{2}\right)\right] \quad (4)$$

$$\sigma_y = \frac{A_1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \Theta}{2}\right)\right] \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{A_1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \sin\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\Theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \Theta}{2}\right) \quad (6)$$

Die Größe  $A_1$  beschreibt die Höhe des Spannungszustandes im Rispspitzenahfeld und wird Spannungintensitätsfaktor  $K_I$  genannt. In der linear-elastischen Bruchmechanik ist der Spannungintensitätsfaktor der Parameter, der zur Beschreibung der Rispspitzenbeanspruchung verwendet wird.

Der Spannungintensitätsfaktor

$$K = S_{br} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{el}(a, \dots) \quad (7)$$

ist abhängig von der äußeren Spannung (Bruttospannung), von der Risplänge, von der Rispsgeometrie, vom Beanspruchungsfall und von der Rispsöffnungsart (Bild 3).

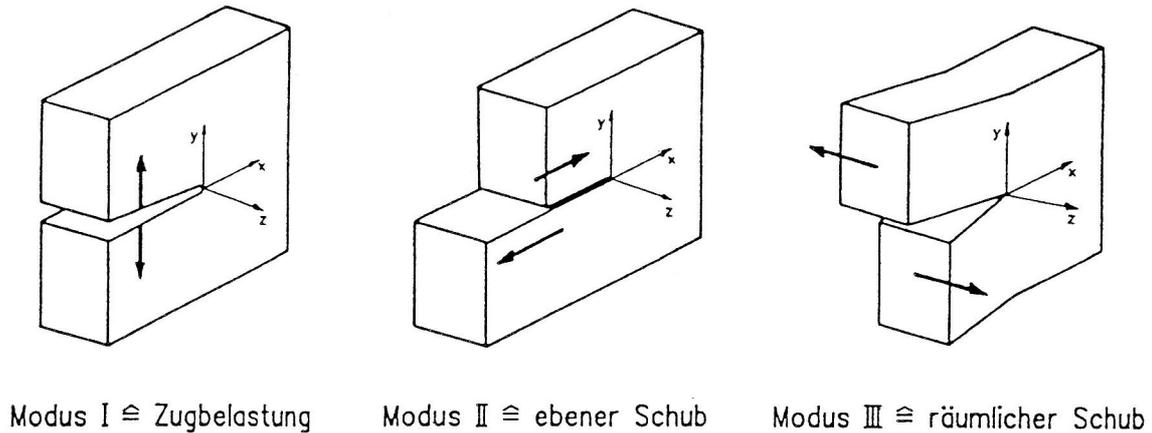


Bild 3: Rispsöffnungsarten

Modus I entspricht dabei der Zugbelastung, Modus II dem Fall des ebenen Schubs und Modus III dem Fall einer räumlichen Schubbelastung.  $Y_{el}(a, \dots)$  bezeichnet man als Geometriekorrekturfunktion.

Der Spannungintensitätsfaktor wurde hier am Beispiel der Zugbelastung hergeleitet, entsprechend dem Rispsöffnungs-Modus I wird er mit  $K_I$  bezeichnet. Analog werden dann für Modus II und Modus III die Bezeichnungen  $K_{II}$  bzw.  $K_{III}$  verwendet. Im weiteren soll ausschließlich der für die Anwendung wichtigste Fall der Modus I-Belastung betrachtet werden.

## 2.2 Das $K$ -Konzept

Wie bereits erwähnt, ist das Rispspitzenfeld durch den Spannungintensitätsfaktor  $K_I$  eindeutig charakterisiert. Dieses  $K_I$ -bestimmte Feld dominiert in einem bestimmten Bereich (Bild 4), der nach außen (Abklingen der Dominanz der singulären Glieder) sowie nach innen begrenzt ist. Die innere Grenze wird erreicht, wenn unterhalb eines bestimmten Wertes von  $r$  die lineare Elastizitätstheorie die tatsächlichen Gegebenheiten nicht mehr korrekt widerspiegelt. Ein realer Werkstoff kann nicht unbeschränkt große Spannungen ertragen. Außerdem widersprechen die theoretisch auftretenden singulären Dehnungen den zur Anwendung der Elastizitätstheorie vorausgesetzten kleinen Dehnungen. In Wirklichkeit weicht der reale Werkstoff den Spannungssingularitäten aus, indem er plastiziert. Es kommt zum plastischen Fließen und damit zu plastischen Deformationen. Die plastische Zone schließt sich unmittelbar an die Prozeßzone an. Unter Prozeßzone versteht man den Bereich, in dem der Bruchvorgang stattfindet, und die plastische Zone ist das die Prozeßzone umgebende Gebiet, in dem es zu plastischen Deformationen kommt.

Setzt man nun voraus, daß die  $K_I$ -bestimmte Region groß ist gegenüber der Prozeßzone und der plastischen Zone, die nicht durch das Nahfeld beschrieben werden können ( $\rho, r_p \ll R$ ), kann man davon ausgehen, daß die in ihr ablaufenden Vorgänge ausschließlich durch das umgebende  $K_I$ -bestimmte Feld gesteuert werden. Das ist der eigentliche Grundgedanke, auf dem das  $K$ -Konzept basiert. Der  $K$ -Faktor kann somit als Zustandsgröße angesehen werden, die ein Maß für die Belastung im Rispspitzenbereich darstellt.

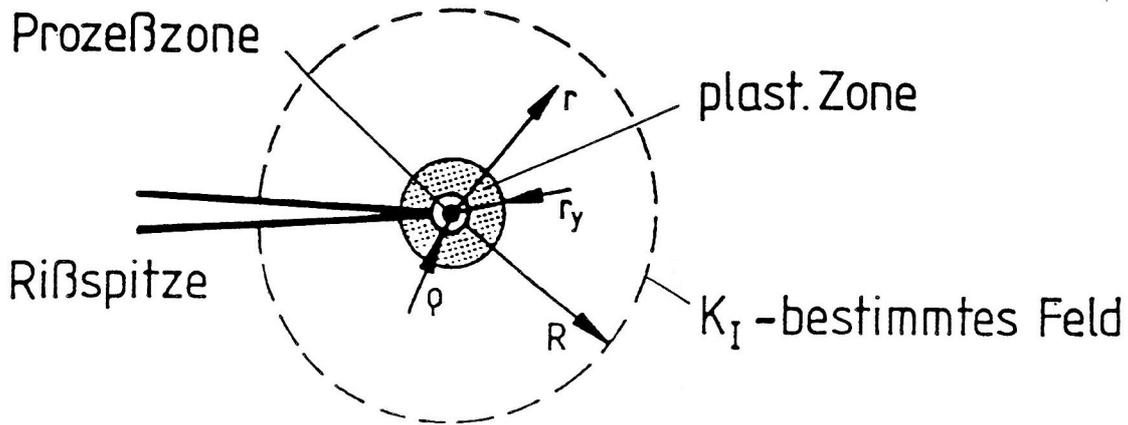


Bild 4: Prozeßzone, plastische Zone,  $K_I$ -bestimmtes Feld

### 2.3 Das Modell von IRWIN

Auf G. IRWIN [2, 3] geht ein Modell zurück, das kleine plastische Zonen innerhalb des  $K$ -Konzepts durch eine Rißlängenkorrektur berücksichtigt (Bild 5).

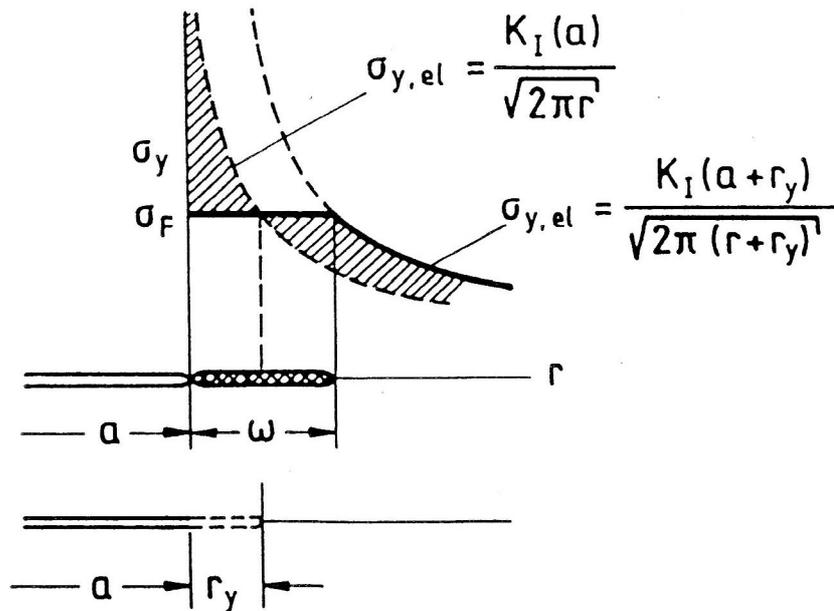


Bild 5: Berücksichtigung kleiner plastischer Zonen durch Rißlängenkorrektur

Um das Ausmaß der plastischen Zone vor der Rißspitze in erster Näherung abschätzen zu können, wird die elastische Spannungsverteilung durch eine elastisch-idealplastische Spannungsverteilung ersetzt, d. h., für Spannungen, die die Fließgrenze überschreiten, wird  $\sigma = \sigma_y$  gesetzt. Somit haben die Spannungen in der plastischen Zone den Wert der Fließspannung ( $\sigma = \sigma_y$ ), während die Spannungen im elastischen Bereich durch die nach rechts verschobene Nahfeldlösung gegeben sind. Aus der Gleichgewichtsbedingung, daß die resultierenden Kräfte infolge der rein elastischen Spannungsverteilung und aufgrund der elastisch-idealplastischen Spannungsverteilung gleich sein müssen,

$$\int_0^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} dr = 2 \cdot r_y \cdot \sigma_y + \int_{2r_y}^{\infty} \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot (r - r_y)}} dr \quad , \quad (8)$$

läßt sich die Ausdehnung der plastischen Zone  $\omega$  berechnen. Es gilt:

$$r_y = \frac{\omega}{2} = \frac{1}{n \cdot \pi} \cdot \left( \frac{K_I}{\sigma_y} \right)^2 \quad (9)$$

Für den ebenen Spannungszustand (ESZ) gilt  $n = 2$ , für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ) gilt  $n = 4 \cdot \sqrt{2}$ . Demnach ist bei gleicher Beanspruchung ( $K_I$ ) die plastische Zone im ESZ deutlich größer als im EVZ. Die Länge  $r_y$  beschreibt somit eine Verschiebung des elastischen Nahfeldes als Folge des Fließens. Das gleiche Nahfeld wird aber auch durch einen um  $r_y$  verlängerten, angenommenen Riß im rein elastischen Zustand erzeugt. Grundidee von IRWIN ist es nun, Fließen durch eine um  $r_y$  verlängerte effektive Rißlänge zu berücksichtigen:

$$a_{eff} = a + r_y \quad (10)$$

Das IRWIN-Modell kann nur für Kleinbereichsfließen (small scale yielding) angewendet werden.

### 3 Näherungsformeln für das Kerbriproblem

#### 3.1 Allgemein

Zur Bestimmung von  $K$ -Faktoren gibt es mehrere Möglichkeiten. Grundsätzlich sind alle Verfahren anwendbar, die in der linearen Elastizitätstheorie zur Berechnung von Spannungen und Dehnungen verwendet werden. Geschlossene Lösungen mit Hilfe analytischer Methoden sind jedoch nur für einfache Randwertprobleme zu erzielen. Häufig ist man daher auf numerische Verfahren wie Finite-Elemente-Methode (FEM), Randelementmethode (BEM) oder Differenzenverfahren angewiesen, was letztendlich immer einen erheblichen Arbeitsaufwand voraussetzt und keinerlei Verallgemeinerung zuläßt. Näherungsformeln, die die verschiedensten Einflußgrößen berücksichtigen, sind daher für die praktische Anwendung unentbehrlich. Für eine große Anzahl von Riß-, Last- und Bauteilkonfigurationen sind Formeln und Näherungsformeln in der Literatur oder in Nachschlagewerken (z.B. [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12]) angegeben. Speziell für dreidimensionale Riprobleme und für zwei- und dreidimensionale Kerbrißprobleme (Oberflächen-, Eck- und Durchgangsrisse) findet man jedoch lediglich analytische Beschreibungen für den Sonderfall unendlicher und halbusendlicher Körper bzw. endlicher und halbusendlicher Scheiben mit kreisförmigen bzw. halbkreisförmigen Innen- bzw. Außenkerben. Für 3D-Risse und das 3D-Kerbriproblem in endlichen Strukturen existieren nur von NEWMAN und RAJU [6, 7, 8, 9, 10] Näherungsbeziehungen zur Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren. Diese gelten für einen weiten Bereich an möglichen Riß- und Geometrie­konfigurationen von Scheiben mit Rissen in kreisförmigen Kerben. Als besonders schwieriges Problem erweist sich dabei die Beschreibung und Aufstellung der Geometriekorrekturefunktion  $Y_{el}$ . DANKERT et al. haben in [1] diese Näherungsbeziehungen für Oberflächen-, Eck- und Durchgangsrisse in elliptischen Kerben erweitert. Dabei wurden insbesondere Funktionen entwickelt, die die Kerb- und Randeinflüsse beschreiben.

#### 3.2 Untersuchte Kerb- und Rikonfigurationen

In [1] wurden Risse in elliptischen Innen-, einseitigen und zweiseitigen halb­elliptischen Außenkerben analysiert. Bild 6 zeigt schematisch die untersuchten Kerbkonfigurationen. Hierbei sind  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$  die Halbachsen der elliptischen Kerben, deren Verhältnis zur Abbildung milder ( $\bar{a}/\bar{b} < 1$ ), scharfer ( $\bar{a}/\bar{b} > 1$ ) und kreisförmiger Kerben ( $\bar{a}/\bar{b} = 1$ ) variiert wurde,  $\rho$  der Kerbradius,  $t$  die Scheibendicke,  $w$  die Scheibenbreite und  $S_{br}$  die aufgebrachte äußere Zugbelastung.

Die typischen Rikonfigurationen, die in [1] untersucht wurden bzw. für die die entwickelten Näherungsformeln gelten, sind in Bild 7 skizziert. Die dargestellten Analysen für Oberflächenrisse in Innen- sowie in zweiseitigen Außenkerben wurden ebenfalls für Eck- und Durchgangsrisse durchgeführt, wobei  $a$  die Rißtiefe und  $c$  die Rißlänge ist.

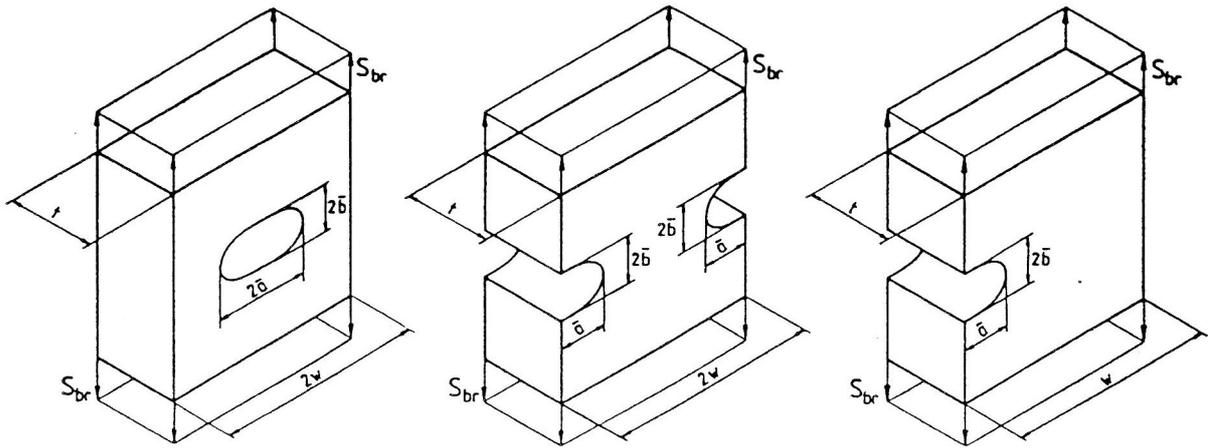


Bild 6: Schematische Darstellung der untersuchten Kerbkonfigurationen

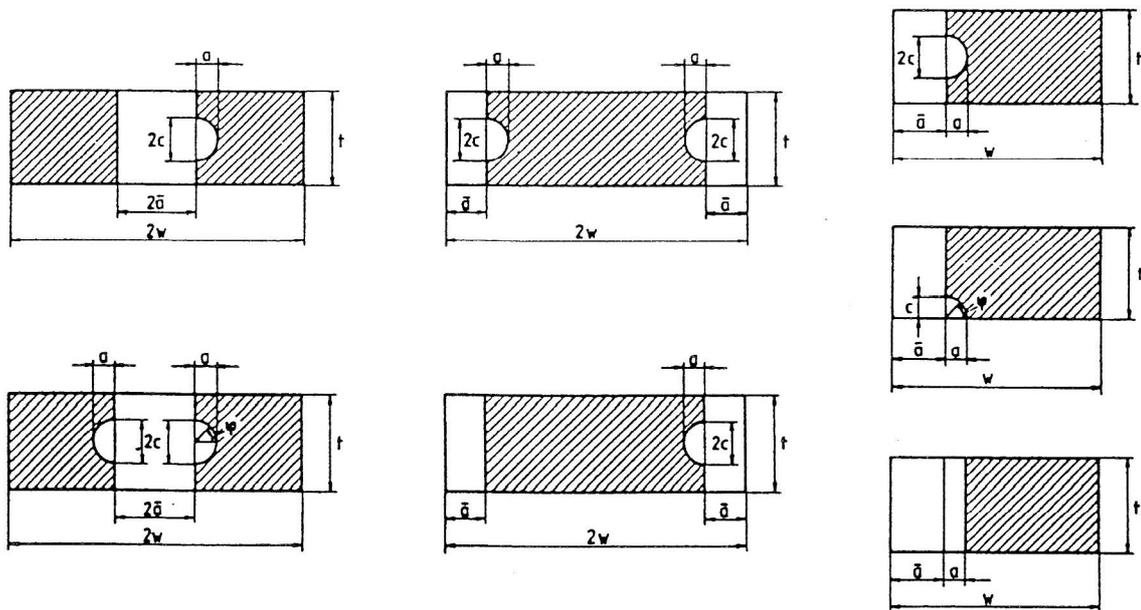


Bild 7: Übersichtsschema der untersuchten Rißkonfigurationen

Für die Entwicklung und Verifikation der Näherungsformeln zur Berechnung der Spannungsintensitätsfaktoren aus [1] wurden  $K$ -Faktoren für eine große Anzahl von signifikanten Fällen mit Hilfe von zwei- und dreidimensionalen Finite-Elemente-Berechnungen durch Variation von Rißlänge, Kerbradius, Kontur der Rißfront und Rißart (Oberflächen-, Eck-, Durchgangsriß) berechnet. Die untersuchten Fallbeispiele decken ein weites und repräsentatives Parameterfeld möglicher Riß- und Kerbkonfigurationen, Rißarten sowie Riß-, Kerb- und Strukturgeometrien für Risse in Kerben ab.

Die FE-Analysen wurden mit dem FE-Programm ABAQUS [13] durchgeführt.

### 3.3 Aufbau der Näherungsformeln

NEWMAN und RAJU war es bei der Entwicklung ihrer Geometriekorrekturfunktion für Risse in Kreiskerben gelungen, die Abhängigkeiten von den unterschiedlichsten Einflußparametern auf den Spannungsintensitätsfaktor in verschiedene Faktoren zu separieren. Dieser modulare Aufbau wurde auch bei den von DANKERT et al. in [1] entwickelten Näherungsformeln beibehalten. Für die Geometriekorrekturfunktion

$Y_{el}$  in der Bestimmungsgleichung für den Spannungsintensitätsfaktor

$$K = S_{br} \cdot \sqrt{\pi \cdot a} \cdot Y_{el}(a, c, t, w, \bar{a}, \bar{b}, \rho, K_{t,\infty}, \varphi) \quad (11)$$

geben DANKERT et al. [1] analog zu NEWMAN und RAJU für den Oberflächenriß

$$Y_{el} = \left[ M_1 + M_2 \cdot \left( \frac{2 \cdot c}{t} \right)^2 + M_3 \cdot \left( \frac{2 \cdot c}{t} \right)^4 \right] \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot F_{notch} \cdot f_{shah} \cdot f_\varphi \cdot f_w \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}}, \quad (12)$$

für den Eckriß

$$Y_{el} = \left[ M_1 + M_2 \cdot \left( \frac{c}{t} \right)^2 + M_3 \cdot \left( \frac{c}{t} \right)^4 \right] \cdot \xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdot \frac{F_{notch}}{q_{cc}} \cdot f_{shah} \cdot f_\varphi \cdot f_w \cdot \sqrt{\frac{c}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Q}} \quad (13)$$

und für den Durchgangsriß

$$Y_{el} = F_{notch} \cdot f_{shah} \cdot f_w \quad (14)$$

an. Der Durchgangsriß kann als zweidimensionales Problem angesehen werden und wird auch als solches beschrieben. Daher vereinfacht sich der Aufbau von  $Y_{el}$  ganz erheblich. Die Geometriekorrekturfunktion  $Y_{el}$  setzt sich aus dem Produkt verschiedener Funktionen zusammen und beschreibt den Einfluß der entsprechenden relevanten Riß- und Geometrie Größen. Sie ist eine Funktion von der Rißtiefe  $a$ , der Rißlänge  $c$ , dem Kerbradius der Kerbe  $\rho$ , der Scheibendicke  $t$ , der Scheibenbreite  $w$ , den Halbachsen der elliptischen Kerbe  $\bar{a}$  und  $\bar{b}$ , dem Spannungskonzentrationsfaktor  $K_{t,\infty}$  und dem Winkel  $\varphi$  entlang der Rißkontur. Die Funktion  $F_{notch}$  (bei NEWMAN und RAJU  $g_2$ ) beschreibt den Kerbeinfluß auf den Spannungsintensitätsfaktor. Ansatz war nun die Idee, diese Funktion auf elliptische Kerben zu erweitern, während alle anderen Abhängigkeiten, bis auf Anpassungen und Analogiebetrachtungen im Randeinfluß, von der Kerbform nicht beeinflusst werden.

### 3.4 Funktion zur Beschreibung des Kerbeinflusses

In [1] wurde eine Funktion  $F_{notch}$  entwickelt, die den Einfluß elliptischer Kerben auf den Wert des Spannungsintensitätsfaktors berücksichtigt. Sie lautet:

$$F_{notch} = \left( 1 + \frac{0.1215}{(1 + \lambda)^\delta} \right) \cdot \left( 1 + \left( (K_{t,\infty} - 1)^{-2.2} + \left( \sqrt{\frac{C_0}{\lambda} + 1} - 1 \right)^{-2.2} \right)^{-\frac{5}{11}} \right) \quad (15)$$

Sie hängt vom Kerbfaktor der unendlichen Scheibe  $K_{t,\infty}$ , vom Halbachsenverhältnis der elliptischen Kerbe  $\bar{a}/\bar{b}$ , vom Kerbradius  $\rho$ , von der Rißtiefe  $a$  und vom Winkel entlang der Rißfront  $\varphi$  ab. Die Größen  $K_{t,\infty}$ ,  $C_0$  und  $\delta$  sind für Innen- und Außenkerben unterschiedlich,  $\lambda$  wird jeweils für Oberflächen-, Eck- und Durchgangsrisse verschieden bestimmt. Die Grenzwerte von  $F_{notch}$  sind für kurze Risse in Innen- sowie in Außenkerben  $K_{t,\infty} \cdot 1.1215$  und für lange Risse in Innenkerben 1 und in Außenkerben 1.1215.

## 4 Verifikation der Näherungsformeln

Die Verifikation der in [1] entwickelten Näherungsbeziehungen für Spannungsintensitätsfaktoren erfolgte anhand von zwei- und dreidimensionalen Finite-Elemente-Analysen.

Die Bilder 8 und 9 zeigen den Vergleich der Funktion  $F_{notch}$  mit FE- Ergebnissen und Ergebnissen aus der Kollokations-Methode [14] für Durchgangsrisse in milden, kreisförmigen und scharfen Kerben. Die Funktion  $F_{notch}$  beschreibt die Ergebnisse sehr gut.

In den Bildern 10-17 sind exemplarisch Vergleiche der  $K$ -Werte für Oberflächen- und Eckrisse in Innen- und Außenkerben entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln unter reiner Zugbelastung ( $S_{br} = 10$  MPa) für verschiedene  $a/c$ -,  $a/\rho$ - und  $\bar{a}/\bar{b}$ -Verhältnisse dargestellt.

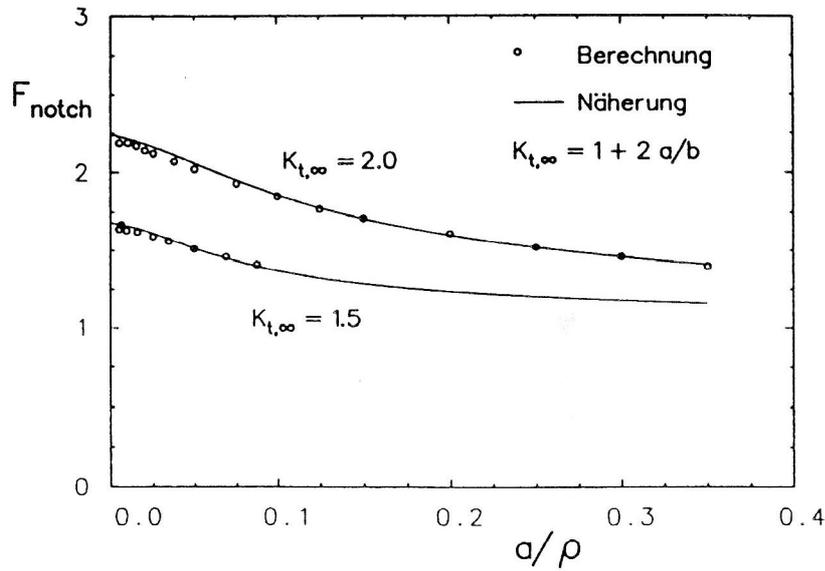


Bild 8: Vergleich der Funktion  $F_{notch}$  mit berechneten Ergebnissen für Durchgangsrisse in milden Kerben

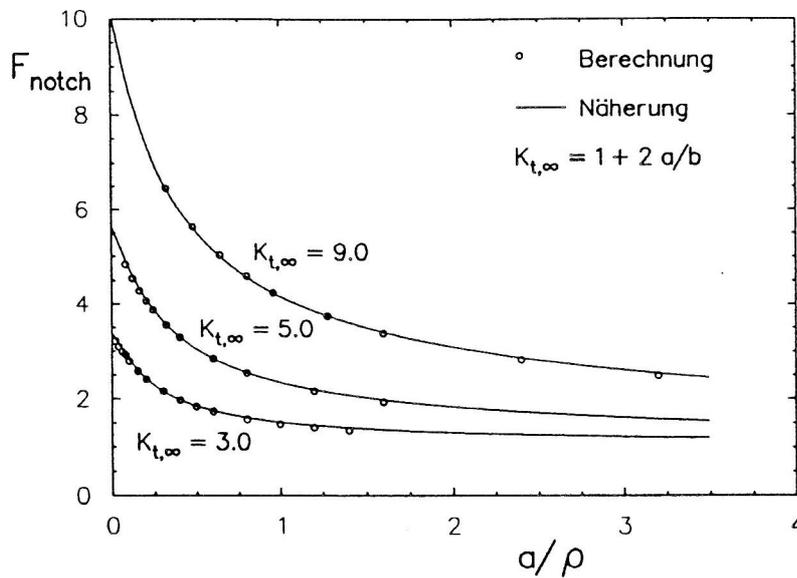


Bild 9: Vergleich der Funktion  $F_{notch}$  mit berechneten Ergebnissen für Durchgangsrisse in kreisförmigen und scharfen Kerben

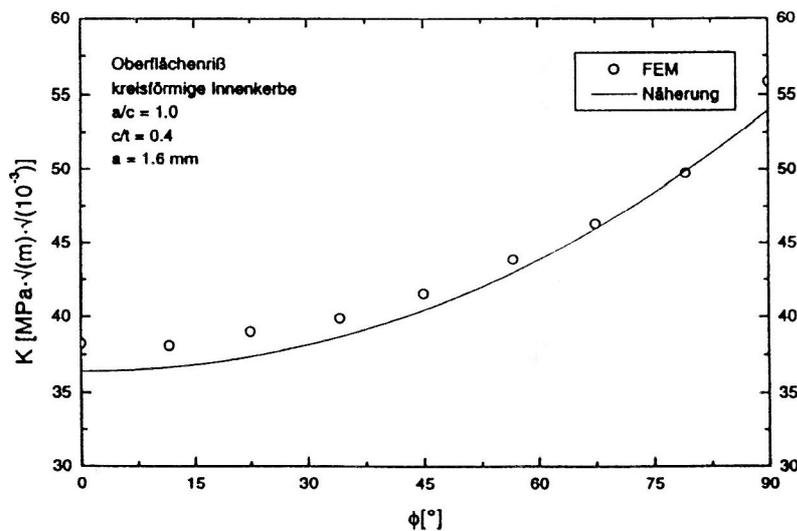


Bild 10: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbkreisförmigen Oberflächenriß in der kreisförmigen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6$  mm,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

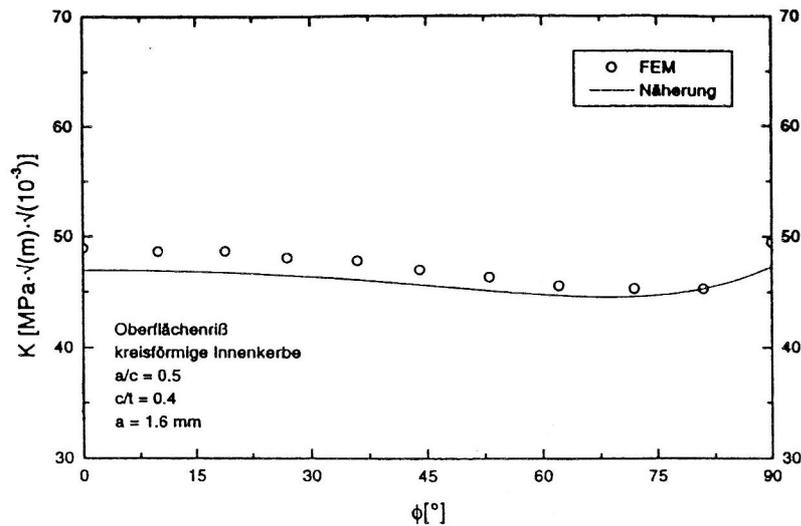


Bild 11: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbelliptischen Oberflächenriß in der kreisförmigen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6$  mm,  $a/c = 0.5$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

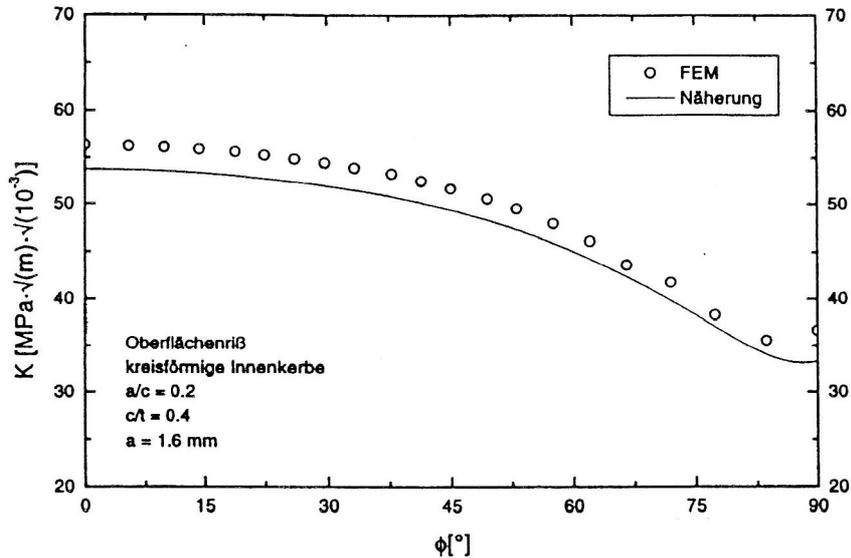


Bild 12: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbelliptischen Oberflächenriß in der kreisförmigen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6$  mm,  $a/c = 0.2$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

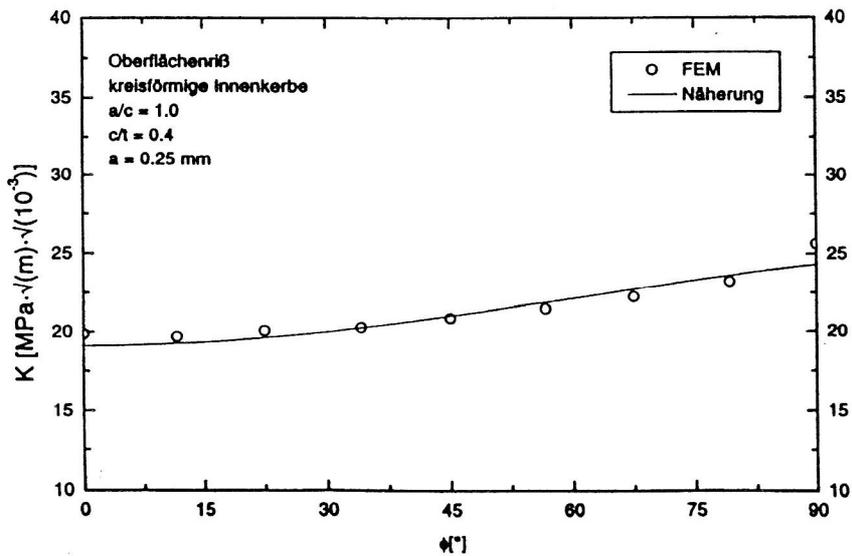


Bild 13: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbkreisförmigen Oberflächenriß in der kreisförmigen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 0.25$  mm,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

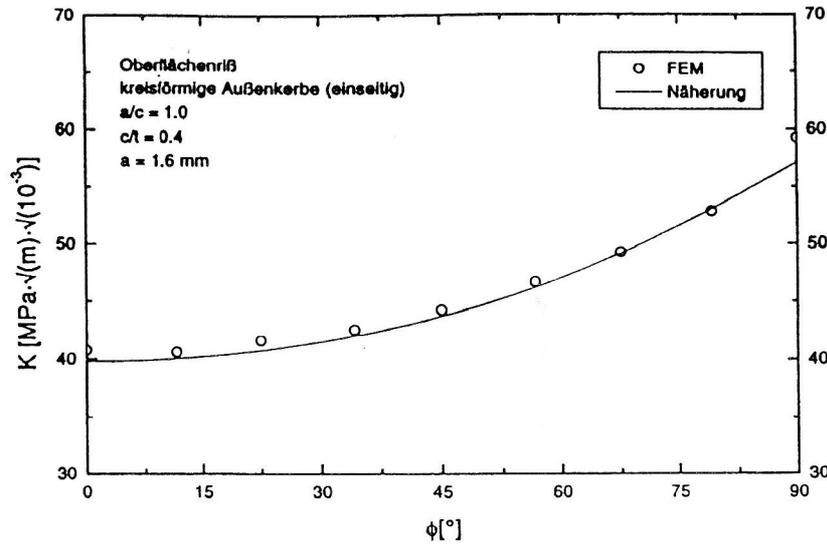


Bild 14: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbkreisförmigen Oberflächenriß in der halbkreisförmigen Außenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6 \text{ mm}$ ,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

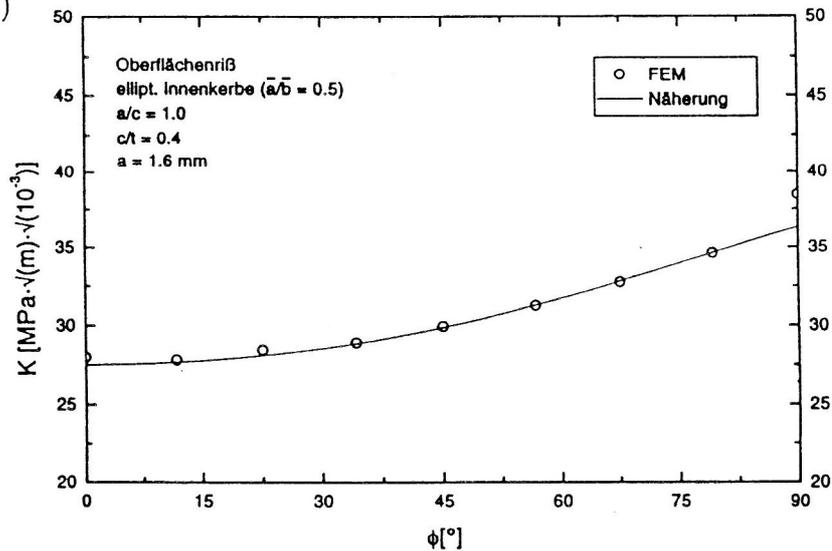


Bild 15: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbkreisförmigen Oberflächenriß in der elliptischen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6 \text{ mm}$ ,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 0.5$ )

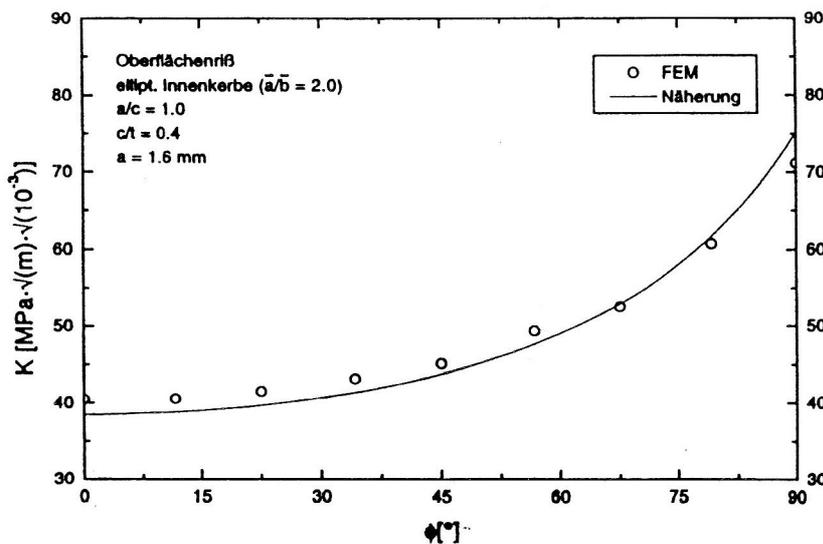


Bild 16: Vergleich der  $K$ -Werte für einen halbkreisförmigen Oberflächenriß in der elliptischen Innenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 1.6 \text{ mm}$ ,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 2.0$ )

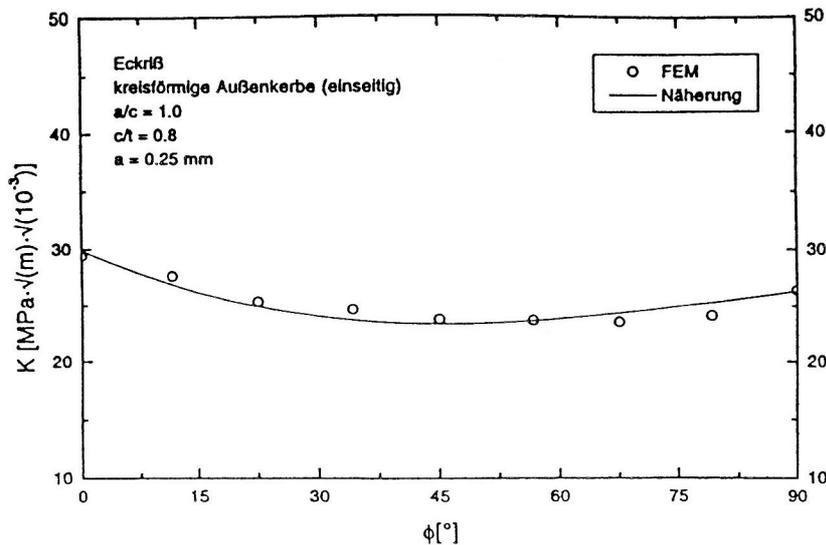


Bild 17: Vergleich der  $K$ -Werte für einen viertelkreisförmigen Eckriß in der halbkreisförmigen Außenkerbe entlang der Rißfront aus FE-Analysen und den entwickelten Näherungsformeln ( $a = 0.25 \text{ mm}$ ,  $a/c = 1.0$ ,  $\bar{a}/\bar{b} = 1.0$ )

Die Näherungsformeln bilden die Ergebnisse aus den FE-Berechnungen gut ab. Die Abweichungen zwischen den Ergebnissen aus den entwickelten Näherungsformeln und aus den FE-Berechnungen sind gering.

Zahlreiche weitere Beispiele, die in [1] komplett zusammengestellt sind, zeigen ähnliche Güte. Die Abweichungen zwischen den  $K$ -Werten aus den FE-Analysen und aus den entwickelten Näherungsformeln überschreiten in den meisten Fällen die 2%-Marke nicht. In seltenen Fällen betragen sie 5%, dann in der Regel unmittelbar im Kerbgrund, was im wesentlichen durch eine abweichende Singularität erklärt werden kann.

## 5- Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurden Näherungsformeln zur Ermittlung von Spannungsintensitätsfaktoren für Oberflächen-, Eck- und Durchgangsriss in gekerbten Scheiben unter reiner Zugbelastung vorgestellt. Eine ausführliche Darstellung der Formeln, der Vorgehensweise bei deren Entwicklung und sämtlicher Verifikationsbeispiele findet man in [1]. Bei dem komplexen Aufbau der in [1] entwickelten Näherungsformeln, der sich aufgrund der komplizierten Problemstellung infolge der vielen vorhandenen Einflußparameter auf den Spannungsintensitätsfaktor bei Kerbrißproblemen nicht vermeiden läßt, ist eine Bestimmung der Spannungsintensitätsfaktoren nur mit einem Berechnungsprogramm sinnvoll. Folglich wurde ein PC-Programm erstellt, in dem die entwickelten Näherungsformeln aufbereitet sind ([15]). Zum Vergleich enthält das Programm für die Fälle, für die es möglich ist (Kreiskerben), die NEWMAN-RAJU-Formeln.

Der Verfasser dankt der Arbeitsgemeinschaft industrieller Forschung e. V. (AiF, Köln) und dem Forschungskuratorium Maschinenbau e. V. (FKM, Frankfurt a. M.) für die finanzielle Förderung des Forschungsvorhabens „Berechnung der Anriß- und Rißfortschrittslebensdauer gekerbter Bauteile nach einem einheitlichen Konzept der elastisch-plastischen Schwingbruchmechanik“ (AiF-Nr. 98 67, FKM-Nr. 69 01 88).

## Literatur

- [1] M. Dankert, H. Amstutz, S. Greuling und T. Seeger. Spannungsintensitätsfaktoren für Risse in Kerben – FE-Analysen und Näherungsformeln – FF-1/1996, Fachgebiet Werkstoffmechanik TH Darmstadt, 1996.
- [2] G. R. Irwin. Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Traversing of a Plate. *Journal of Applied Mechanics*, 1957.
- [3] G. R. Irwin. *Handbuch der Physik VI*, chapter Fracture, S. 551–590. Flüge Ed., Springer, 1958.

- [4] H.Tada, Hrsg. *The Stress Analysis of Cracks Handbook*. H.Tada, P.Paris, G.Irwin, Hellertown, Pennsylvania, Del Research Corporation edition, 1985.
- [5] Y. Murakami et al.,. *Stress Intensity Factors Handbook Vol. 3*. The Society of Materials Science, Japan and Pergamon Press, 1993.
- [6] J.C. Newman, Jr. and I.S. Raju. Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending. Nasa technical memorandum 85793, NASA Langley Research Center, 1984.
- [7] I.S. Raju and J.C. Newman, Jr. Stress intensity factors for a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 11, S. 817 – 829, 1979.
- [8] J.C. Newman, Jr. A review and assessment of the stress intensity factors for surface cracks. *American Society for Testing and Materials*, ASTM STP 687, S. 16 – 42, 1979.
- [9] J.C. Newman, Jr. and I.S. Raju. Stress intensity factors for internal surface cracks in cylindrical pressure vessels. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 102, S. 342 – 346, 1980.
- [10] J.C. Newman; Jr. and I.S. Raju. Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies. *Fracture Mechanics: Fourteenth Symposium*, ASTM STP 791, S. I-238 – I-265, 1983.
- [11] M.H. Swain and J.C. Newman. On the use of marker loads and replicas for measuring growth rates for small cracks. Conference proceedings 376, Advisory Group for Aerospace Research & Development, 1984, 12.1–12.17 S.
- [12] H.-M. Herbel, H. Amstutz, M. Dankert, T. Seeger. Fracture Mechanics Analysis of Notched Specimens Under Tension and Bending Loading. FI-111/1993, Fachgebiet Werkstoffmechanik TH Darmstadt, 1993, 76 S.
- [13] Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc. *ABAQUS Theory Manual, Version 5.3*.
- [14] J.C. Newman, Jr. An improved method of collocation for the stress analysis of cracked plates with various shaped boundaries. , NASA Langley Research Center, NASA TN D-6376, 1971.
- [15] M. Dankert, S. Greuling und T. Seeger. K – Ein PC-Programm zur Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren für Risse in Kerben. FF-2/1996, Fachgebiet Werkstoffmechanik TH Darmstadt, 1996.

---

*Anschrift:* Dipl.-Ing. Michael Dankert, Fachgebiet Werkstoffmechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Petersenstr. 13, 64287 Darmstadt, E-mail: dankert@wm.bauing.th-darmstadt.de