

Vergleichende Untersuchungen zur Modellierung und numerischen Berechnung mehrschichtiger Rotationsschalen

H.Altenbach, J.Altenbach, E.Nast

Im Beitrag wird ein theoretisches Konzept und seine numerische Umsetzung für die Modellierung und Berechnung mehrschichtiger Flächentragwerke vorgestellt. Das theoretische Konzept basiert auf dem Timoshenko/Zeissner/Mindlin-Modell, wobei zwei Varianten diskutiert werden: das allgemeine Modell mit einem kinematischen Freiheitsgrad 6 sowie der Sonderfall mit dem Freiheitsgrad 5. Die Qualität und die Effektivität der Modellierung und Berechnung wird an ausgewählten Beispielen für mehrschichtige Rotationsschalen aus isotropen und anisotropen Einzelschichten nachgewiesen.

The paper deals with a theoretical concept and its numerical treatment for the modelling and the numerical calculation of multilayered plates and shells. The theoretical concept based on the Timoshenko/Reissner/Mindlin-model. Two variants are demonstrated: a general model with kinematical degrees of freedom and special case with 5 degrees of freedom. The quality and efficiency of the modelling and analysis are demonstrated by some examples of multilayered shells of revolution with isotropic or anisotropic layers.

1 Einleitung

Dem Begriff des Flächentragwerkes ist eine Klasse fester, deformierbarer Körper zugeordnet, deren hauptsächliche Eigenschaft darin besteht, daß eine Längenausdehnung (Tragwerksdicke) wesentlich geringer als die beiden anderen Ausdehnungen ist.

Obwohl sich prinzipiell jedes Flächentragwerk als dreidimensionales Kontinuum betrachten und modellieren läßt, wurden in der Mitte des 19. Jahrhunderts erste spezielle Theorien entwickelt, die die konstruktiven Besonderheiten der Flächentragwerke bewußt für eine Reduktion des Lösungsaufwandes nutzten und damit die Berechnung von Flächentragwerken in der Ingenieurpraxis ermöglichten. Trotz der heute verfügbaren leistungsfähigen Rechen-technik beruht die Mehrheit aller Problembetrachtungen bzw. Theorien auf einer Modellierung des Tragwerkes als zweidimensionales Bauteil [1].

Die klassische Flächentragwerkstheorie ist, nach einigen Erweiterungen hinsichtlich möglicher Geometrieparameter, Belastungen und Materialien, in ihrer Entwicklung als weitgehend abgeschlossen zu betrachten. Sie beruht auf den grundlegenden Arbeiten von Kirchhoff (Platten) und Love (Schalen). Entsprechende Theorien gehen in der Regel von der Annahme aus, daß die Schnittflächen bei einer Verformung eben bleiben, der Einfluß der Schubverformungen vernachlässigt werden kann und somit Normale zur unverformten Mittelfläche auch Normale zur verformten Mittelfläche sind und in Normalenrichtung keine Dehnungen auftreten (1. Hypothese).

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0$$

Außerdem wird die Normalspannung σ_{33} im Vergleich zu den Spannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{12} als vernachlässigbar angesehen (2. Hypothese).

$$\sigma_{33} \cong 0$$

Aus den Annahmen resultiert eine anwendungsseitige Beschränkung auf glatte, dünne Flächentragwerke aus homogenem, isotropem, linear-elastischem Material. Theorien, die auf den Annahmen von Kirchhoff/Love beru-

hen, können bei dickwandigen, anisotropen oder mehrschichtigen Flächentragwerken sowie bei Faltwerken versagen, da die Hypothesen mehr oder weniger verletzt werden. Eine umfangreiche Diskussion zu den Annahmen der klassischen Theorie und ihren Konsequenzen ist u. a. in [2] nachzulesen.

Im Beitrag sollen ein theoretisches Konzept und eine numerische Umsetzung für die Gruppe der mehrschichtigen Flächentragwerke vorgestellt werden. Derartige Konstruktionen bzw. Konstruktionselemente bestehen heute vielfach aus Schichten, die ihrerseits aus Verbundwerkstoffen gebildet werden. Daher werden nachfolgend neben der Vorstellung der theoretischen Grundlagen, der Berechnungsstrategie und ausgewählter Testbeispiele auch einige Bemerkungen zu den Verbundwerkstoffen gemacht. Dabei wird auch klar, daß zukünftige Entwicklungen bei der Numerik von Mehrschichtflächentragwerken entscheidend von den verbesserten Kenntnissen über die Verbundwerkstoffe abhängen. Beispielhaft werden nachfolgend Grundgleichungen für die numerische Analyse mehrschichtiger Rotationsschalen dargelegt. Diese beziehen sich auf dünne Schalen mit schwacher Krümmung. Materialeitig ist ein Mehrschichtsystem aus isotropen oder speziellen anisotropen Schichten theoretisch beliebiger Anzahl betrachtbar. Die anisotrope Einschichtschale ist als Spezialfall enthalten.

2 Verbundwerkstoffe – Einsatzgebiete und Probleme der Modellbildung

Verbundwerkstoffe (Sandwichkonstruktionen, Laminat) gehören gegenwärtig zu den Materialien mit beträchtlichem Innovationspotential. Während in Luft- und Raumfahrt (Satellitenstrukturen, Rotorblätter, Tragflächen und Leitwerke) sowie im Schiffbau (Hochseeyachten und Sportboote) – in erweitertem Sinne auch im Bauwesen (Stahlbeton) – Verbundwerkstoffe bereits den Stand der Technik repräsentieren und ein hohes Niveau widerspiegeln, vollzieht sich zur Zeit ein technologischer Wandel im Maschinen-, Fahrzeug- und Apparatebau. Dies führt bei-

spielsweise in Europa zu jährlichen Wachstumsraten in Produktion und Einsatz geschichteter Werkstoffkomponenten von 10 bis 25 % [5]. Galten über lange Zeit Stoßfänger, Frontklappen und Spoiler als typische Anwendungsbeispiele innerhalb des Fahrzeugbaus, wurden in jüngster Vergangenheit auch Blatt- und Spiralfedern (in erster Linie für Nutzkraftwagen) sowie Antriebswellen (GOLF Syncro) aus Faserverbundwerkstoffen gefertigt und erfolgreich der Praxiserprobung unterzogen. Ähnliche Entwicklungen sind im Behälterbau (Silos, Druckrohre) und der Werkzeugmaschinenfertigung zu verzeichnen. Bei letzterer – traditionell werden Verbundmaterialien für Verkleidungen und Abdeckungen eingesetzt – erfolgt für Bohrstanzen, Wellen, Hauptspindeln und Werkzeugträger ein teilweiser Ersatz der konventionellen Konstruktionswerkstoffe.

Der Grund für die aufgezeigten Trends liegt in Merkmalen wie: geringes Gewicht bei hoher Festigkeit, guter Korrosionsschutz, teilweise Beständigkeit gegenüber chemischen Substanzen und Umwelteinflüssen, Wartungsarmut sowie das definierbare Schwingungsdämpfungsverhalten. Erwähnt werden sollten jedoch auch hohe Materialkosten und Recyclingprobleme, welche sich in der Vergangenheit negativ auf Wachstumsraten in der Herstellung und im Einsatz der Kunststoffe auswirkten. Weitere Einsatzhemmnisse stellen/stellen fehlende Serienfertigungstechnik und überzogene Prüfanforderungen auf Grund begrenzter Werkstoffkenntnisse dar.

Die wohl bedeutendsten und zugleich bekanntesten Vertreter der Verbundwerkstoffe findet man in den Faserverbunden/Laminaten und den Sandwichkonstruktionen. Beide Klassen von Materialien sind vielfältig miteinander verbunden, und es ist prinzipiell möglich, jeden Sandwichwerkstoff mit Hilfe einer Laminattheorie zu berechnen. Diese Materialien beruhen auf Kombinationen mehrerer meist isotroper Schichten unterschiedlichen Materials. Typisch ist die Verbindung von dünnen, steifen Schichten (Häute) und einem dicken, weichen Kern, was traditionell als Sandwich bezeichnet wird. Lagert man – zur Schaffung spezieller Eigenschaften – orientierte Faserstoffe in eine Grundmatrix eines anderen Materials ein, so ergibt sich ein Faserverbundwerkstoff. Dieser sollte, um technisch sinnvoll einsetzbar zu sein, nach [6] folgende Voraussetzungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{Bruch/Faser}} &> \sigma_{\text{Bruch/Matrix}} \\ E_{\text{Faser}} &> E_{\text{Matrix}} \\ \varepsilon_{\text{Bruch/Matrix}} &>> \varepsilon_{\text{Bruch/Faser}} \end{aligned}$$

Das Spannungs-Dehnungsverhalten eines Faserverbundes (siehe Bild 1) stellt eine Mittlung der Einzelkomponenten dar, wobei die Mittlungsregeln sehr kompliziert sein können.

Während die eingelagerten Fasern für die Festigkeit des Verbundes dominant sind, hat die Matrix im Verbund die Aufgabe, Druck-, Zug- und Schubkräfte auf die Fasern zu übertragen, diese vor gegenseitiger Berührung und vor Umwelteinflüssen zu schützen.

Meistens werden Faserverbundwerkstoffe für einen speziellen Lastfall ausgelegt, wobei es sich bei diesen Belastungen in der Regel um Membranspannungszustände handelt. Biegespannungszustände werden dagegen häu-

figer über Sandwichkonstruktionen realisiert, da sie bei Faserverbunden auf unwirtschaftliche Konstruktionen führen würden. Weiterhin ist man bestrebt, nur Belastungen ohne Reißbildung zuzulassen. Dabei sollte beachtet werden, daß Festigkeit und Dehnbarkeit quer zur Faserrichtung niedriger als im Matrixmaterial ohne Einlagerung sind. Hieraus resultiert unter Umständen eine Schädigung des Matrixmaterials, bevor diese auch im Fasermaterial fortschreitet.

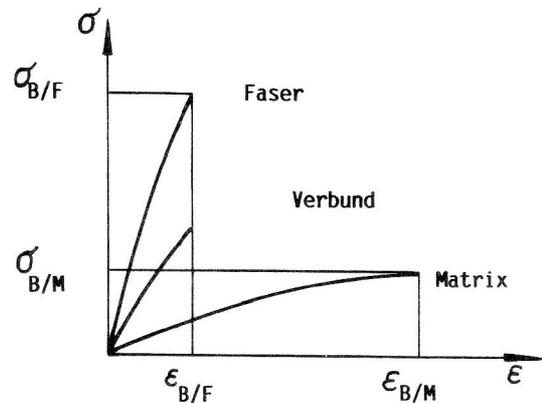


Bild 1
Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Faserverbunden

Als wesentliche Besonderheit faserverstärkter Konstruktionswerkstoffe stellt sich die Anisotropie der Deformationseigenschaften und die geringe Querschubsteife (sowohl in der Ebene des eingelagerten Materials als auch interlaminar) dar. Diese Anisotropie stellt den Konstrukteur vor zusätzliche Probleme bei Dimensionierung und Berechnung von Faserverbunden.

Neben den konventionellen Aufgaben der Bauteildimensionierung bei homogen-isotropen Werkstoffen stellt sich die Anforderung, den Werkstoff selbst zu konstruieren [7], [8], [9].

Zur Diskussion stehen dabei:

1. die Einzelschichtdicke
2. die Matrixeigenschaften
3. die Fasereigenschaften
4. der Faseranteil am Schichtvolumen
5. die Faserorientierung innerhalb der Einzelschicht

Der Bestimmung von Spannungen und Verformungen des Schichtpaketes und der Einzelschichten beliebig aufgebauten Verbundmaterials infolge äußerer Beanspruchung sowie der Optimierung von Werkstoffeigenschaften hinsichtlich geforderter Parameter widmet sich folglich eine Vielzahl von Beiträgen und Forschungsarbeiten. Einen Überblick über Forschungsrichtungen und -tendenzen sowie über unterschiedliche Theorien zur Problemlösung im Falle mehrschichtiger Platten und Schalen vermitteln [1], [10], [11].

3 Möglichkeiten zur Modellierung von Verbundstrukturen

Theorien für Verbundstrukturen, die auf der Erhaltung der Normalen (analog Kirchhoff/Love) beruhen, stoßen bei Betrachtung anisotroper oder mehrschichtiger Flächen-tragwerke häufig auf Schwierigkeiten. Der Grund hierfür ist das notwendige Berücksichtigen von Querschubeinflüssen. Einen Ausweg bietet hier die Theorie von Timoshenko/Reissner/Mindlin, die auf einem erweiterten Balkenmodell von Timoshenko beruht [12]. Auf Platten angewendet, führte Reissner Hypothesen ein, die eine Abschwächung der Kirchhoffschen Hypothesen darstellen [24]. Wichtigste Erweiterung dabei ist folgende Annahme:

Fasern, die zu Beginn der Deformation senkrecht auf der Referenzfläche stehen, müssen nach der Deformation nicht mehr normal gerichtet sein.

Diese Annahme führt auf eine Erhöhung des kinematischen Freiheitsgrades für ein differentielles Plattenelement, hervorgerufen durch unabhängige Rotationen der Normalen.

Am weitesten verbreitet sind gegenwärtig Varianten mit dem kinematischen Freiheitsgrad fünf (drei Translationen und zwei unabhängige Rotationen der Normalen). Bei geometrisch einfacheren Bauteilen (Zylinder, Platten) und/oder Betrachtung der zu lösenden Probleme in lokalen Koordinatensystemen liefern derartige Theorien (Ambarcumjan und Levinson entwickelten gleichfalls Hypothesen auf der Grundlage des kinematischen Freiheitsgrades fünf) oftmals hinreichend genaue Ergebnisse und haben Vorteile bei der numerischen Umsetzung.

Die Untersuchung von Faltenwerken bzw. von verzweigten/verrippen Flächen-tragwerken läßt jedoch eine Theorie-erweiterung auf den kinematischen Freiheitsgrad sechs wünschenswert erscheinen. Nur hier ist eine vollständige Übergabe aller kinematischen und dynamischen Größen in den Verzweigungspunkten erreichbar.

Eine derartige Theorie, die zusätzlich eine unabhängige 3. Rotation der Normalen (Rotation um x_3) umfaßt, wird entsprechend einer in [13], [14] vorgeschlagenen Verfahrensweise vorgestellt.

4 Grundgleichungen für die numerische Analyse von Verbundstrukturen

Für die nachfolgenden Aussagen, die sich beispielhaft auf Rotationsschalen mit Schichtstruktur beziehen, wird ein Koordinatensystem nach (Bild 2) gewählt.

Entsprechend dem zu betrachtenden Schalenproblem gelte:

$$x_1 = s \quad x_2 = \varphi \quad x_3 = x_3$$

Ausgangspunkt für die Lösung statischer bzw. dynamischer Probleme der Schale sind die Funktionale der Deformationsenergie U und der kinetischen Energie T

$$U = 1/2 \int_V \underline{\varepsilon} dV \quad T = 1/2 \int_V \rho \dot{\underline{u}}^T \dot{\underline{u}} dV$$

mit

- $\underline{\sigma}$ Dreidimensionaler Spannungstensor
- \underline{e} Dreidimensionaler Deformationstensor
- \underline{u} Vektor der vollständigen Verschiebung eines Schalenpunktes
- $\dot{\underline{u}} = \partial u / \partial t$ Verschiebungsgeschwindigkeiten
- ρ Dichte des Schalenmaterials
- dV Elementarvolumen der Schale

In den weiteren Ausführungen erfolge stets bei sich wiederholenden lateinischen Indizes eine Summation von 1 bis 3 und bei griechischen Indizes von 1 bis 2.

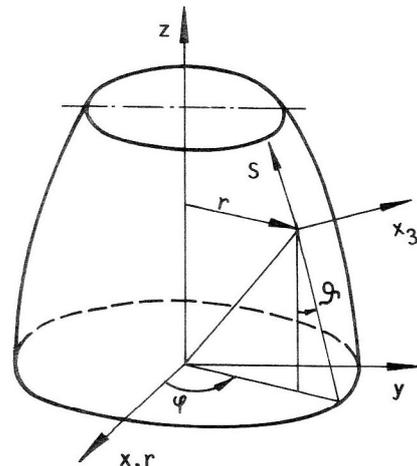


Bild 2
Rotationsschale

Für die Modellierung der Schichtstruktur wird vorausgesetzt, daß das Schichtpaket als Ganzes in das zweidimensionale Modell überführt wird. Im Rahmen der Theorie von Timoshenko, die bei konsequenter Anwendung auf eine Schalentheorie mit sechs kinematischen Freiheitsgraden führt, lassen sich dann die Verschiebungen in einem beliebigen Punkt der Schale wie folgt darstellen

$$\underline{u}(s, \varphi, x_3) = \underline{v}(s, \varphi) + x_3 \underline{\gamma}(s, \varphi)$$

Dabei ist \underline{v} der Verschiebungsvektor der Punkte der Schalenmittelfläche (SMF) und $\underline{\gamma}$ der Vektor der Verdrehwinkel der Normalen zur SMF.

$$\underline{u}^T = (u_1 + x_3 \gamma_1; u_2 + x_3 \gamma_2; u_3 + x_3 \gamma_3)$$

Dieser Vektor enthält neben den Verschiebungen eines Punktes der SMF und den beiden unabhängigen Rotationen der Normalen (γ_1, γ_2) als wesentliche Erweiterung eine Rotation um die Normalenachse.

Unter Verwendung des linearen Greenschen Deformationstensors

$$e_{ij} = 1/2 (\underline{u}_{,i} \underline{g}_j + \underline{u}_{,j} \underline{g}_i)$$

mit \underline{g}_i als Basisvektoren in den äquidistanten Flächen der Schale erhält man dann bei Beschränkung auf lineare Glieder für die Koordinate x_3 die kinematischen Beziehungen der Timoshenko-Schalentheorie:

$$e_{a\beta} = \Omega_{a\beta} + x_3 \chi_{a\beta} \quad e_{a3} = \Omega_{a3} \quad e_{33} = \Omega_{33}$$

Die hier eingeführten Krümmungs- und Verzerrungstensen nehmen folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= 1/2 (\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}) & \chi_{\alpha\beta} &= 1/2 (\kappa_{\alpha\beta} + \kappa_{\beta\alpha} - b_{\alpha}^{\nu} \varepsilon_{\nu\beta} - b_{\beta}^{\nu} \varepsilon_{\nu\alpha}) \\ \Omega_{\alpha 3} &= 1/2 (\gamma_{\alpha} + \psi_{\alpha}) & \Omega_{33} &= \gamma_{33} \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= u_{\alpha||\beta} - b_{\alpha\beta} u_{33} & \kappa_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha||\beta} - b_{\alpha\beta} \gamma_{33} \\ \psi_{\alpha} &= u_{3,\alpha} + b_{\alpha\beta} u_{2\beta} \end{aligned}$$

Mit \parallel wird hier das kovariante Ableiten in der Metrik der Referenzfläche unter Verwendung der Christoffel-Symbole Γ für die Referenzfläche bezeichnet. Ausführlich dargestellt sind die Regeln für das kovariante Ableiten in [15].

Bei Schalen nach (Bild 2) gilt

$$b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} d\theta/ds & 0 \\ 0 & -r \cos\theta \end{bmatrix} \quad b_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} d\theta/ds & 0 \\ 0 & -\cos\theta/r \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{12}^2 = 1/r \sin\theta \quad \Gamma_{22}^1 = -r \sin\theta$$

In Vektor-Matrix-Schreibweise ergeben sich damit die Deformationen beliebiger Rotationsschalen zu

$$\vec{\epsilon} = \underline{L} \vec{u}^*$$

Wobei $\vec{\epsilon}$ der Deformationsvektor und \underline{L} die Matrix der Differentialoperatoren ist.

$$\vec{u}^* = (u_1; u_2; u_3; \gamma_1; \gamma_2; \gamma_3)$$

Bei Rotationsschalen gilt für den Fall allgemeiner, krummliniger Koordinaten folgender Aufbau des Deformationsvektors

$$\vec{\epsilon}^T = (\Omega_{11}; \Omega_{22}; 2\Omega_{12}; \chi_{11}; \chi_{22}; 2\chi_{12}; 2\Omega_{13}; 2\Omega_{23}; \Omega_{33})$$

Hier werden neben den symmetrischen Komponenten des Verzerrungs- und des Krümmungstensors auf der SMF Querschubdeformationen und Dickenänderungen als wesentliche Erweiterung zur Theorie von Kirchhoff/Love berücksichtigt.

Für die betrachtete Aufgabenklasse ergibt sich die Matrix der Differentialoperatoren zu

$$\begin{bmatrix} \partial/\partial s & 0 & -d\theta/ds & 0 & 0 & 0 \\ S/r & \partial/r\partial\varphi & C/r & 0 & 0 & 0 \\ \partial/r\partial\varphi & \partial/\partial s - S/r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d\theta\partial/ds\partial s & 0 & (d\theta/ds)^2 & \partial/\partial s & 0 & -d\theta/ds \\ CS/r^2 & C\partial/r^2\partial\varphi & C^2/r^2 & S/r & \partial/r\partial\varphi & C/r \\ -d\theta\partial/rdr\partial\varphi & K & 0 & \partial/r\partial\varphi & \partial/\partial s - S/r & 0 \\ d\theta/ds & 0 & \partial/\partial s & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C/r & \partial/r\partial\varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{L}$$

Folgende Symbole wurden eingeführt

$$S = \sin\theta \quad C = \cos\theta$$

$$K = 1/r (d\theta \sin\theta/ds + \cos\theta \partial/\partial s)$$

Somit folgt für die Komponenten des Deformationsvektors

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= \partial u_1/\partial s - u_3 d\theta/ds \\ \Omega_{22} &= 1/r (\partial u_2/\partial\varphi + u_1 \sin\theta + u_3 \cos\theta) \\ 2\Omega_{12} &= 1/r (\partial u_1/\partial\varphi - u_2 \sin\theta) + \partial u_2/\partial s \\ \chi_{11} &= \partial\gamma_1/\partial s - \gamma_3 d\theta/ds - d\theta/ds (\partial u_1/\partial s - u_3 d\theta/ds) \\ \chi_{22} &= 1/r (\partial\gamma_2/\partial\varphi + \gamma_1 \sin\theta + \gamma_3 \cos\theta) \\ &\quad + 1/r \cos\theta (\partial u_2/\partial\varphi + u_1 \sin\theta + u_3 \cos\theta) \end{aligned}$$

$$2\chi_{12} = 1/r (\partial\gamma_1/\partial\varphi - \gamma_2 \sin\theta - d\theta/ds (\partial u_1/\partial\varphi - u_2 \sin\theta) + \partial u_2/\partial s \cos\theta) + \partial\gamma_2/\partial s$$

$$2\Omega_{13} = \gamma_1 + \partial u_3/\partial s + u_1 d\theta/ds$$

$$2\Omega_{23} = \gamma_2 + 1/r (\partial u_3/\partial\varphi - u_2 \cos\theta)$$

$$\Omega_{33} = \gamma_3$$

Zur Überführung des dreidimensionalen Funktionals der Deformationsenergie in ein zweidimensionales Funktional ist zunächst die Bestimmung des Elementarvolumens der Schale in folgender Form erforderlich

$$dV = \mu dx_3 dS$$

$$\text{Hierbei gelte: } \mu = \det(\mu_{\alpha\beta})$$

$$dS = r d\varphi ds \quad \text{Elementarfläche auf der SMF}$$

$$\mu_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - x_3 b_{\beta}^{\alpha}$$

$\delta_{\alpha\beta}$ ist das Kronecker-Symbol.

Führt man die kinematischen Beziehungen der Timoshenko-Schalen in das dreidimensionale Funktional der Deformationstheorie ein, nimmt dieses folgende Form an

$$U = 1/2 \int_{\Omega} (N_{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + 2Q_{\alpha} \Omega_{\alpha 3} + N_{33} \Omega_{33}) dS$$

Momente höherer Ordnung wurden hierbei vernachlässigt.

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} dx_3$$

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3$$

$$Q_{\alpha} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha 3} dx_3$$

$$N_{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} dx_3$$

Hierbei wurde bereits berücksichtigt, daß für flache Schalen Änderungen der Metrik über die Schalendicke h vernachlässigbar sind. Folglich wird $\mu = 1$.

Der zum Deformationsvektor arbeitskonjugierte Vektor der inneren Kräfte und Momente wird zu

$$\vec{S}^T = (N_{11}; N_{22}; N_{12}; M_{11}; M_{22}; M_{12}; Q_1; Q_2; N_{33})$$

$$\text{dabei gilt: } N_{ij} = N_j \quad M_{ij} = M_j$$

Unter Beachtung des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes ergeben sich damit die physikalischen Beziehungen der Schale

$$\vec{S} = \underline{D} \vec{\epsilon}$$

Die Steifigkeitsmatrix \underline{D} hat folgende Struktur

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & 0 \\ & Q_{22} & Q_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & D_{66} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & Q_{55} & Q_{45} & 0 \\ & & & & & & & Q_{44} & 0 \\ & & & & & & & & Q_{33} \end{bmatrix} = \underline{D}$$

symm.

Diese Steifigkeiten lassen sich für eine Schale mit n orthotropen Schichten wie folgt bestimmen (Bild 3):

$$Q_{ij} = \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} [x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)}]$$

$$B_{ij} = 1/2 \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} [(x_3^{(k)})^2 - (x_3^{(k-1)})^2]$$

$$D_{ij} = 1/3 \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} [(x_3^{(k)})^3 - (x_3^{(k-1)})^3]$$

Die $C_{ij}^{(k)}$ sind die Komponenten der Elastizitätsmatrix des verallgemeinerten Hookeschen Gesetzes

$$\vec{\sigma}^{(k)} = \underline{C}^{(k)} \delta^{(k)}$$

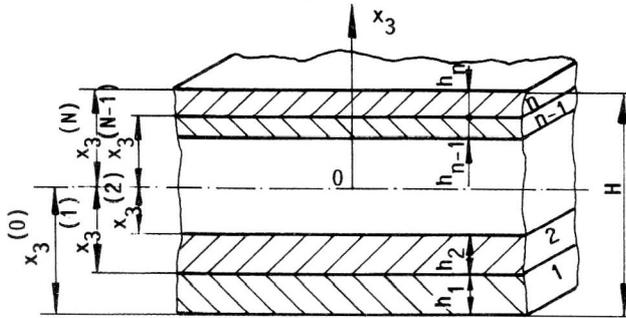


Bild 3
Laminatquerschnitt

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & 0 & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & C_{66} \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}^k$$

der k-ten Schicht, bezogen auf das globale Koordinatensystem (Bild 4).

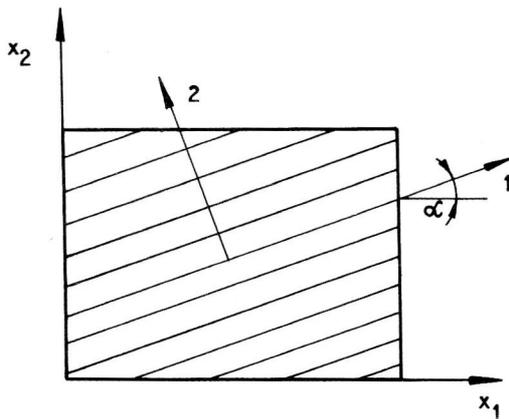


Bild 4
Einzelschicht

Ausgangspunkt für die Berechnung der $C_{ij}^{(k)}$ sind die Steifigkeiten $A_{ij}^{(k)}$ der k-ten Schicht im lokalen Schichtkoordinatensystem. Im allgemeinen ist daher bei Laminaten eine Koordinatentransformation der Form

$$\underline{C} = \underline{T}^T \underline{A} \underline{T}$$

erforderlich, da die Hauptrichtungen des Laminates nicht mit den Richtungen des globalen Systems übereinstimmen. Für den Fall einer faserverstärkten Schichtstruktur nach (Bild 5) nimmt diese Transformationsmatrix folgendes Aussehen an:

$$\begin{pmatrix} C^2 & S^2 & 0 & 0 & 0 & 2SC \\ S^2 & C^2 & 0 & 0 & 0 & -2SC \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -SC & SC & 0 & 0 & 0 & C^2 - S^2 \\ 0 & 0 & 0 & C & -S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & C & 0 \end{pmatrix} = \underline{T}$$

Wobei die Bezeichnungen $C = \cos \alpha$ und $S = \sin \alpha$ gewählt wurden.

Somit sind die Komponenten der Elastizitätsmatrix in jeder Schicht über die nachfolgenden Beziehungen bestimmbar

$$C_{11} = A_{11}C^4 + (2A_{12} + 4A_{66})S^2C^2 + A_{22}S^4$$

$$C_{12} = (S^4 + C^4)A_{12} + (A_{11} + A_{22} - 4A_{66})S^2C^2$$

$$C_{16} = (A_{11} - A_{12} - 2A_{66})C^3S + (A_{12} - A_{22} + 2A_{66})S^3C$$

$$C_{22} = A_{11}S^4 + A_{22}C^4 + (2A_{12} + 4A_{66})S^2C^2$$

$$C_{26} = (A_{11} - A_{12} - 2A_{66})S^3C + (A_{12} - A_{22} + 2A_{66})SC^3$$

$$C_{33} = A_{33}$$

$$C_{66} = (A_{11} - 2A_{12} + A_{22} - 2A_{66})S^2C^2 + (C^4 + S^4)A_{66}$$

$$C_{44} = A_{44}C^2 + A_{55}S^2$$

$$C_{55} = A_{44}S^2 + A_{55}C^2$$

$$C_{45} = (A_{55} - A_{44})SC$$

Die Steifigkeiten $A_{ij}^{(k)}$ der k-ten Schicht im lokalen Schichtkoordinatensystem ergeben sich aus den Elastizitätsmoduli, den Schubmoduli und den Querkontraktionszahlen wie folgt

$$A_{11} = E_{11}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$A_{12} = \nu_{12}E_{11}$$

$$A_{22} = E_{22}/(1 - \nu_{12}\nu_{21})$$

$$A_{33} = E_{33}/(1 - \nu_{13}\nu_{31})$$

$$A_{44} = G_{23}$$

$$A_{55} = G_{13}$$

$$A_{66} = G_{12}$$

Dabei wird besonders die Konstante A_{33} in der Literatur recht unterschiedlich ermittelt [19], [21]. Die hier vorgeschlagene Möglichkeit erwies sich jedoch als numerisch besonders vorteilhaft. Während nunmehr alle Ausgangsgleichungen zur Formulierung der Elementsteifigkeitsmatrizen vorliegen, sind zur Bestimmung der Elementmassenmatrizen noch weitere Überlegungen notwendig. Wird in das Funktional für die kinetische Energie der Schale

$$T = 1/2 \int_V (\rho \vec{\dot{u}}^T \vec{\dot{u}}) dV,$$

wobei ρ die Dichte des Schalenelements bezeichnet, die Timoshenko-Hypothese $\vec{u} = \vec{v} + x_3 \vec{\gamma}$ eingesetzt, so ergibt sich

$$T = 1/2 \iint (\rho_0 (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \rho_1 (\dot{u}_1 \dot{\gamma}_1 + \dot{u}_2 \dot{\gamma}_2 + \dot{u}_3 \dot{\gamma}_3) + \rho_2 (\dot{\gamma}_1^2 + \dot{\gamma}_2^2 + \dot{\gamma}_3^2)) r d\varphi ds$$

Dabei stellen ϱ_k die verallgemeinerten Dichten der Mehrschichtschale dar. Diese verallgemeinerten Dichten lassen sich für Schalen mit n Schichten wie folgt ermitteln

$$\varrho_0 = \sum_{k=1}^n \varrho_k (x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)})$$

$$\varrho_1 = 1/2 \sum_{k=1}^n \varrho_k ((x_3^{(k)})^2 - (x_3^{(k-1)})^2)$$

$$\varrho_2 = 1/3 \sum_{k=1}^n \varrho_k ((x_3^{(k)})^3 - (x_3^{(k-1)})^3)$$

ϱ_k ist die Dichte der k -ten Schicht. Unter Beachtung des Ausdruckes für den Deformationsvektor $\vec{\epsilon}$ nimmt das Funktional für die kinetische Energie beim Übergang zur Vektor-Matrix-Schreibweise folgende Form an

$$T = 1/2 \iint (\vec{u}^T \underline{R} \vec{u}) r d\varphi ds$$

$$\begin{bmatrix} \varrho_0 & \underline{I} & \varrho_1 & \underline{I} \\ \varrho_1 & \underline{I} & \varrho_2 & \underline{I} \end{bmatrix} = \underline{R}$$

Hierin ist \underline{I} die Einheitsmatrix der Größe (3×3) .

5 Die Finite-Element-Approximation

Auf der Grundlage der im vorhergehenden Abschnitt dargelegten Gleichungen für die Analyse mehrschichtiger Rotationsschalen wurde ein in [12] vorgeschlagenes finites Schalenelement (Bild 5) in das FEM-Programm „FEMCOM“ der Technischen Universität Riga implementiert und ausgetestet. Dieses soll nachfolgend vorgestellt werden.

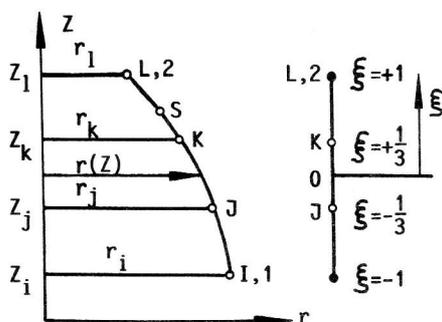


Bild 5
Gekrümmtes Schalenelement

Die Verschiebungen des finiten Elementes werden durch die Werte der Verschiebungen und ihrer ersten Ableitungen in den Knoten 1 und 2 definiert. In diesen Knoten können auch Randbedingungen und äußere Belastungen (rotationssymmetrisch) angetragen werden. Dagegen wird die Geometrie des gekrümmten Elementes durch die Knoten I, J, K, L definiert.

Als Ausgang erfolgt über trigonometrische Funktionen eine Approximation der Verschiebungen in Umfangsrichtung:

$$u_1(s, \varphi) = u_{01}(s) \cos(n\varphi) \quad u_2(s, \varphi) = u_{02}(s) \sin(n\varphi)$$

$$u_3(s, \varphi) = u_{03}(s) \cos(n\varphi) \quad \gamma_1(s, \varphi) = \gamma_{01}(s) \cos(n\varphi)$$

$$\gamma_2(s, \varphi) = \gamma_{02}(s) \sin(n\varphi) \quad \gamma_3(s, \varphi) = \gamma_{03}(s) \cos(n\varphi)$$

Diese Herangehensweise erlaubt prinzipiell auch die Lösung statischer Probleme bei nichtrotationssymmetrischer Belastung sowie die Analyse des Stabilitätsverhaltens rotationssymmetrischer Schalen und Platten. In der gegenwärtigen Programmversion ist dies jedoch auf Grund einer Beschränkung der trigonometrischen Funktionen auf das nullte Reihenglied nicht möglich. Das Annähern der Funktionen u_α und γ_α in Meridianrichtung geschieht durch kubische Polynome:

$$F = \sum_{i=1}^2 [F_i N_i + (\partial F / \partial s)_i J_i N_i^*]$$

$$N_1 = 1/4 (1 - \xi)^2 (2 + \xi) \quad N_2 = 1/4 (1 + \xi)^2 (2 - \xi)$$

$$N_1^* = 1/4 (\xi^2 - 1) (\xi - 1) \quad N_2^* = 1/4 (\xi + 1)^2 (\xi - 1)$$

$$J_i = (\partial s / \partial \xi)_i$$

Dabei sind F_i die Funktionswerte in den Knotenpunkten 1 und 2, N_i und N_i^* die Formfunktionen des finiten Elementes sowie J_i die Jacobische Transformationsdeterminante. $\xi \in (-1; +1)$ ist die lokale Elementkoordinate.

Somit nimmt die Matrix der Knotenverschiebungen des finiten Elementes folgende Form an

$$\underline{u}^{(e)T} = (\vec{d}_1^{(e)} \quad \vec{d}_2^{(e)})$$

$$\vec{d}_1^{(e)} = (u_{01i}; (\partial u_{01} / \partial s)_i; u_{02i}; (\partial u_{02} / \partial s)_i; u_{03i};$$

$$(\partial u_{03} / \partial s)_i; \gamma_{01i}; (\partial \gamma_{01} / \partial s)_i; \gamma_{02i}; (\partial \gamma_{02} / \partial s)_i;$$

$$\gamma_{03i}; (\partial \gamma_{03} / \partial s)_i)$$

Für eine Rotationsschale nach (Bild 2) ist die Meridianform über die Funktion $r = r(z)$ angebar.

Ein Zusammenhang zwischen den Koordinaten r und z und der lokalen Elementkoordinate ξ wird durch kubische Polynome beschrieben

$$z = z_I P_I + z_J P_J + z_K P_K + z_L P_L$$

$$r = r_I P_I + r_J P_J + r_K P_K + r_L P_L$$

mit

$$P_I = -9/16 (\xi - 1) (\xi^2 - 1/9)$$

$$P_J = 27/16 (\xi - 1/3) (\xi^2 - 1)$$

$$P_K = -27/16 (\xi + 1/3) (\xi^2 - 1)$$

$$P_L = 9/16 (\xi + 1) (\xi^2 - 1/9)$$

6 Vergleichsrechnungen

Nachfolgend werden einige numerische Beispiele zur Dokumentation der Leistungsfähigkeit des vorgeschlagenen Berechnungsablaufes dargelegt. Hierbei soll im ersten Teil der Unterschied in der Genauigkeit bei Verwendung des kinematischen Freiheitsgrades fünf bzw. sechs verdeutlicht werden. Der zweite Teil wendet sich dann einzelnen Beispielen mehrschichtiger Flächentragwerke zu.

1. Beispiel

Eine homogene, isotrope, linear elastische Torusschale nach (Bild 6) soll unter konstantem Innendruck stehen. Sie wird hinsichtlich ihrer radialen Aufweitung in den Punkten A und B untersucht. Sowohl bei Verwendung des kinematischen Freiheitsgrades fünf als auch bei Verwendung des Freiheitsgrades sechs erfolgt eine Analyse im globalen Koordinatensystem der Schale.

- konstanter Innendruck $p_0 = 1 \text{ psi}$
- Schalenradius 1 $R = 15 \text{ in.}$
- Schalenradius 2 $r = 10 \text{ in.}$
- Schalendicke $h = 0,5 \text{ in.}$
- Materialparameter $E = 10^7 \text{ psi}$
 $\nu = 0,3$

Quelle	w_A in in.	w_B in in.	Hinweise
{22}	$0,4300 \cdot 10^{-4}$	$0,1250 \cdot 10^{-4}$	FEM
FEMCOM	$0,4276 \cdot 10^{-4}$	$0,1457 \cdot 10^{-4}$	f = 6, 36 Ele.
FEMCOM	$0,2260 \cdot 10^{-4}$	$0,1524 \cdot 10^{-4}$	f = 5, 36 Ele.

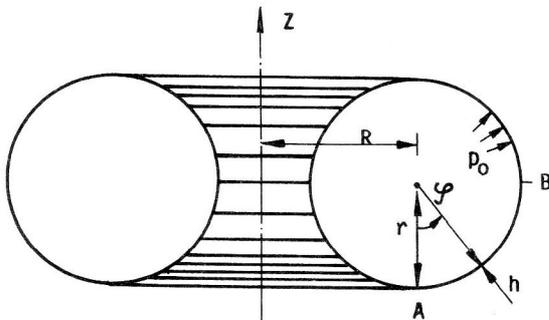


Bild 6
Torusschale

2. Beispiel

Betrachtet wird die kleinste Eigenfrequenz $f = \omega/2\pi$ (bei einer Anzahl von 3 Umfangswellen) einer zusammengesetzten Schale (Bild 7). Diese besteht aus homogenem, linear elastischem Material. Durchgeführt wird die Analyse aus dem globalen Koordinatensystem der Schale heraus.

- Zylinderschalendicke $h_1 = 0,1032 \text{ m}$
- Zylinderschalendicke $R_1 = 0,053875 \text{ m}$
- Zylinderschalendicke $h_1 = 0,64 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- Seitenlänge des Kegels $s_2 = 0,07097 \text{ m}$
- Kegelschalendicke $h_2 = 0,264 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
- Winkel $\alpha = \pi/3$
- Materialparameter $E = 4,482 \cdot 10^4 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,35$
 $\rho = 1,7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

Quelle	f in Hz	Hinweise
{23}	886,0	Experiment
{23}	897,0	FDM
{23}	871,9	FEM 32 Elemente
FEMCOM	871,2	f = 6 36 Elemente
FEMCOM	1723,0	f = 5 36 Elemente

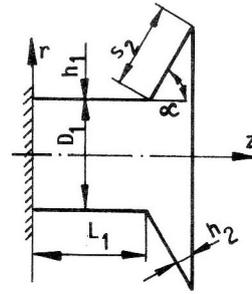


Bild 7
Zylinderkegel

3. Beispiel

In diesem Beispiel werden die maximalen Verschiebungen einer dreischichtigen Kreisplatte (Bild 8) betrachtet. Jede Schicht besteht aus homogenem Material mit den angeführten Materialkomponenten. Die Platte, die durch eine konstante Flächenlast belastet wird, ist am Außenrand fest eingespannt.

- konstante Flächenlast $p_0 = 1 \text{ psi}$
- Radius $r = 10 \text{ in.}$
- Dicke der oberen Deckschicht $h_{1D} = 0,028 \text{ in.}$
- Dicke der unteren Deckschicht $h_{3D} = 0,022 \text{ in.}$
- Dicke des Kerns $h_K = 0,750 \text{ in.}$
- Materialparameter
Deckschichten: $E_{1D} = E_{2D} = E_{3D} = E_D = 10^7 \text{ psi}$
 $G_{12D} = E_D / (2(1 + \nu_D))$
 $G_{23D} = G_{13D} = 0$
 $\nu_{12D} = \nu_{23D} = \nu_{13D} = \nu_D = 0,3$
 $E_{1K} = E_{2K} = E_{3K} = G_{12K} = 0$
 $\nu_{12K} = \nu_{23K} = \nu_{13K} = 0$
 $G_{23K} = G_{13K} = 3 \cdot 10^4 \text{ psi}$

Quelle	Elementanzahl	$(w_{\max} E_D h_{ges}^3) / (p_0 r^{-4})$	Hinweise
{16}	10 für 1/4 Plat.	1,6020	FEM *1
{16}	10 für 1/4 Plat.	1,6789	FEM *2
{17}	28 für 1/4 Plat.	1,4515	FEM
FEMCOM	28 für 1/4 Plat.	1,5293	f = 5

- *1 Äquivalente homogene Platte
- *2 Schichtplatte

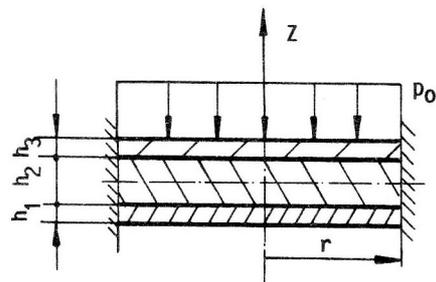


Bild 8
Kreisplatte

4. Beispiel

Untersucht wird eine beidseitig eingespannte Kreiszylinderschale (Bild 9), die aus einer orthotropen Schicht besteht. Gegeben sind die Komponenten der Elastizitätsmatrix des verallgemeinerten Hooke'schen Gesetzes, bezogen auf das lokale Schichtkoordinatensystem.

Die Schale steht unter allseitigem, konstantem Innendruck.

- konstanter Innendruck $p_0 = 1 \text{ kg/cm}^2$
- Schalenlänge $l = 800 \text{ cm}$
- Schalenradius $R = 200 \text{ cm}$
- Schalendicke $h = 10, 20 \text{ und } 40 \text{ cm}$
- Materialparameter $C_{22} = 2,1 \cdot 10^3 \text{ kg/mm}^2$
 $C_{33} = 0,262931 C_{22}$
 $C_{11} = 0,543103 C_{22}$
 $C_{44} = 0,159914 C_{22}$
 $C_{12} = 0,233190 C_{22}$
 $C_{55} = 0,266810 C_{22}$

Quelle	R/h	$(w_{\max} C_{22} h) / (p_0 R^2)$	Hinweise
<18>* <18>* <19>* FEMCOM	5	1,049 0,947 1,061 1,042	dünne Schale dicke Schale dicke Schale 21 Elemente; $f = 5$
<18> <18> <19> FEMCOM	10	0,998 1,049 1,089 1,044	
<18> <18> <19> FEMCOM	20	1,024 1,049 1,086 1,048	

* FEM-Lösung

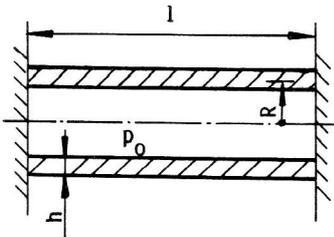


Bild 9
Kreiszylinderschale

5. Beispiel

Eine beidseitig eingespannte Kreiszylinderschale (Bild 9) steht unter konstantem Innendruck. Betrachtet wird die maximale Radialaufweitung der Schale, die aus vier orthotropen Schichten besteht.

- konstanter Innendruck $p_0 = 6,41 / \pi \text{ psi}$
- Schalenlänge $l = 20 \text{ in.}$
- Schalenradius $R = 20 \text{ in.}$
- Schalendicke $h = 1,0 \text{ und } 0,2 \text{ in.}$
- Faserorientierung $(45^\circ / -45^\circ / -45^\circ / 45^\circ)$ und $(0^\circ / 90^\circ / 90^\circ / 0^\circ)$
- Materialparameter $E_1 = 7,5 \cdot 10^6 \text{ psi}$
 $E_2 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ psi}$
 $G_{12} = 1,25 \cdot 10^6 \text{ psi}$
 $G_{23} = G_{13} = 0,63 \cdot 10^6 \text{ psi}$
 $\nu_{12} = 0,25$

Quelle	R/h	α	$(w_{\max} E_1 h_{\text{ges}}) / (p_0 R^2)$	Hinweise
<18>*1 <18>*1 <20>*1 FEMCOM	20	(45/-45)s	2,210 2,160 2,210 2,132	dünne S. dicke S. *2
<18> <18> <20> FEMCOM	100	(45/-45)s	1,960 1,950 1,960 2,036	
<18> <18> <20> FEMCOM	20	(0/90)s	1,670 1,630 1,640 1,639	
<18> <18> <20> FEMCOM	100	(0/90)s	1,550 1,550 1,550 1,557	

*1 FEM-Lösung

*2 $f = 5$; 36 Elemente

6. Beispiel

Ermittelt wird die erste Eigenkreisfrequenz einer beidseitig gelenkig gelagerten Zylinderschale (Bild 10).

Sie besteht aus vier, symmetrisch zur Referenzfläche angeordneten, orthotropen Schichten.

- Schalenlänge a
- Schalenradius R
- Schalendicke h
- Materialparameter

$$E_1 = 25 E_2$$

$$G_{12} = G_{13} = 0,5 E_2$$

$$G_{23} = 0,2 E_2$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = 0,25$$

$$\rho = 1$$

Quelle	R/a	a/h	α	$(\omega a^2 / h_{\text{ges}}) \sqrt{\rho / E_2}$
<21>*1 FEMCOM *2	5	100	(0/90)s	20,360 73,440
<21> FEMCOM		10		11,830 13,088
<21> FEMCOM	10	100		16,630 38,538
<21> FEMCOM		10		11,790 11,504
<21> FEMCOM	20	100		15,550 22,542
<21> FEMCOM		10		11,780 11,073
<21> FEMCOM	100	100		15,190 13,982
<21> FEMCOM		10		11,780 10,931

*1 Theorie höherer Ordnung

*2 $f = 6$; 36 Elemente

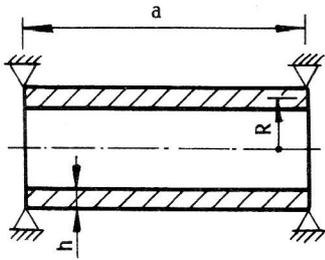


Bild 10
Kreiszyllinderschale

7. Beispiel

Eine Kreiszyllinderschale (Bild 11) wird durch eine konstante Linienlast bei 1/2 in Radialrichtung belastet. Die dadurch hervorgerufene maximale Radialaufweitung der beidseitig gelenkig gelagerten Schale wird ermittelt. Die Schale besteht aus drei orthotropen Schichten.

- konstante Linienlast
in Radialrichtung bei 1/2 $p = 14417 \text{ lb./in.}$
- Schalenlänge $l = 80 \text{ in.}$
- Schalenradius $R = 18 \text{ in.}$
- Schalendicke $h = 2,4 \text{ in.}$
(0,8 in. pro Schicht)
- Faserorientierung: $(90^\circ/0^\circ/90^\circ)$ und $(0^\circ/90^\circ/0^\circ)$
- Materialparameter: $E_1 = 1 \cdot 10^7 \text{ psi}$
 $E_2 = 4 \cdot 10^5 \text{ psi}$
 $G_{12} = 2 \cdot 10^5 \text{ psi}$
 $G_{23} = G_{13} = 0,8 \cdot 10^5 \text{ psi}$
 $\nu_{12} = 0,25$

Quelle	α	$(w_{\max} E_2 h_{\text{ges}} / p R^2) \sqrt{R h_{\text{ges}}}$	Hinweise
FEMCOM	(18) 0/90/0	3,010	dünne Sch.
	(18)	3,011	dicke Sch.
		3,388	21 Elemente
FEMCOM	(18) 90/0/90	3,581	
	(18)	3,596	
		4,379	

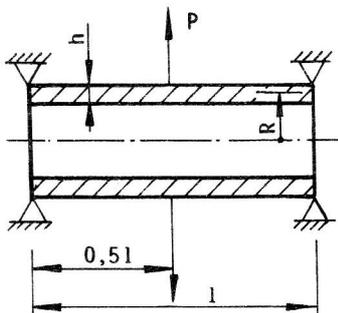


Bild 11
Kreiszyllinderschale

Die Beispiele 1 und 2 dienten speziell der Untersuchung der Auswirkungen des kinematischen Freiheitsgrades fünf bzw. sechs auf die Genauigkeit in den Ergebnissen. Vorgangene Betrachtungen geometrisch einfachster Problemstellungen (Kreisplatte, Zylinderschale) hatten zuvor weder bei statischen noch bei dynamischen Aufgabenstellungen einen nennenswerten Genauigkeitszuwachs durch die Verwendung des kinematischen Frei-

heitsgrades sechs nachweisen können. Aus diesem Grunde wurden die Beispiele 3 bis 7 generell über den kinematischen Freiheitsgrad fünf realisiert.

Ein vollständig anderes Bild ergab sich jedoch für die Torusschale (Beispiel 1) und die zusammengesetzte Schale nach Beispiel 2. Während die Problembetrachtung in lokalen Bereichskoordinatensystemen keine Unterschiede in den Ergebnissen in Abhängigkeit vom verwendeten Freiheitsgrad, lieferte, wurden diese signifikant für eine Problembeschreibung in globalen Koordinaten (r, φ, z) .

In beiden Beispielen ist eine gute bis sehr gute Übereinstimmung zwischen Referenzlösung und Lösung mit dem Programm FEMCOM ($f = 6$) zu verzeichnen. Die FEMCOM-Lösungen mit dem kinematischen Freiheitsgrad fünf hingegen sind als nicht akzeptabel zu betrachten.

Eine durchgängig gute Übereinstimmung mit Referenzlösungen zeichnet sich für solche Beispielrechnungen ab, die der Überprüfung des vorgeschlagenen Verfahrens zur Modellierung von Mehrschichtkonstruktionen dienen. Dabei ist der Unterschied zu solchen Referenzlösungen, die sich einer Theorie höherer Ordnung bedienen, besonders gering. Eine etwas bessere Genauigkeit ist für Laminataufbauten zu verzeichnen, deren Faserorientierung $(0^\circ/90^\circ \text{ etc.})$ lediglich rechtwinklige Transformationen lokaler Schichtkoordinaten (Bild 4) in globale Koordinaten des Faserverbundes erfordert (Beispiel 5).

Eine Sonderrolle nimmt lediglich die Kreiszyllinderschale nach Beispiel 6 ein. Hier auftretende Abweichungen zwischen Referenz- und FEMCOM-Lösungen, die teilweise beträchtliche Größenordnungen erreichen, sind wohl in erster Linie auf die geometrischen Verhältnisse der Schale zurückzuführen. Analoge Untersuchungen im Vorfeld dieses Beitrages bestätigen, daß der vorgeschlagene Berechnungsalgorithmus bei Kreiszyllinderschalen, die zu sehr dünnen Kreisringen geringer Länge entarten, versagt.

Dieses Phänomen ist analog bei sehr dünnen Platten zu beobachten [25]. Hier erzwingen spezielle Schubverzerrungsausdrücke, daß die Schubverzerrungen Null werden. Eine dadurch entartete Steifigkeitsmatrix ist die Ursache dafür, daß zu starre Ergebniswerte bestimmt werden.

Insgesamt kann jedoch eingeschätzt werden, daß die untersuchten numerischen Beispielaufgaben die Leistungsfähigkeit der vorgestellten Algorithmen unterstreichen.

LITERATUR

- [1] Altenbach, H.: Modellierung des Deformationsverhaltens mehrschichtiger Flächentragwerke – ein Überblick zu Forschungsrichtungen und -tendenzen. *Wiss. Z. Techn. Hochschule Magdeburg*, 32 (1988), 4, 86–94.
- [2] Голденвейзер, А. Л.: Теория упругих тонких оболочек. Москва, Наука, 1976.
- [3] Амбарцумян, С. А.: Общая теория анизотропных оболочек. Москва, Яука, 1974.
- [4] Родионова, В. А.: Теория анизотропных оболочек с учетом поперечных сдвигов и об-атия. Ленинград, Изд. Ленингр. гос. университета, 1983.

- [5] Jakobi, R., Maier, M., Neitzel, M.: Zum Stand der Entwicklung von Bauteilen aus Verbundwerkstoffen. Vortrag auf der 13. wiss.-techn. Tagung „Verstärkte Plaste '90“, Dresden, 16.–17. 10. 1990, 1.1./1 – 1.1./19.
- [6] Puck, A.: Kunststoffe für tragende Bauteile. SIA – Studientagung, 17.–18. 10. 1975 in Zürich und Dübendorf.
- [7] Kleinholz, R.: Beitrag zum Verstärken von Kunststoffen unter besonderer Berücksichtigung der Verstärkungs- und Matrixwerkstoffe. Dissertation, TH Aachen, 1971.
- [8] Desserich, G. M.: Beitrag zur Spannungs- und Verformungsanalyse mehrschichtiger Flächentragwerke. Dissertation, ETH Zürich, 1983.
- [9] Knauer, B., Glieschke, K.: Verbundstrukturoptimierung. Vortrag auf der 13. wiss.-techn. Tagung „Verstärkte Plaste '90“, Dresden, 16.–17. 10. 1990.
- [10] Reddy, J. N.: Finite element modelling of layered, anisotropic composite plates and shells: A review of recent research. Shock Vib. Dig., 13 (1981), 3–12.
- [11] Reddy, J. N.: A review of the literature on finite element modelling of laminated composite plates. Shock Vib. Dig., 17 (1985), 3–8.
- [12] Рикардс, Р. Б.: Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. Рига, Зинатне, 1988.
- [13] Rikards, R. B., Goldmanis, M. V.: A Curved Finite Element of Revolution Shells after Timoshenko's Shear Model, ZAMM 65 (1985) 9, 427–435.
- [14] Rikards, R. B., Chate, A. K.: Ermittlung der Eigenschwingungen von Rotationsschalen mit der Methode der Finiten Elemente. Technische Mechanik 8 (1987) 3, 5–13.
- [15] Green, A. E., Zerna, W.: Theoretical Elasticity, Oxford, Clarendon Press, 1968.
- [16] Gosh, S. K.: Static, Free Vibration and Thermal Analysis of Thick Sandwich and Laminated Plates and Shells of Revolution. Ph. D. Thesis, Indian Institute of Technology, Bombay, India, 1977.
- [17] Khatua, T. P., Cheung, Y. K.: Triangular element for multilayer sandwich plates. ASCE J. Engng. Mech., 98, pp. 1225–1238, 1972.
- [18] Kant, T., Menon, M. P.: Higher-Order Theories for Composite and Sandwich Cylindrical Shells with C^0 Finite Element. Comput. Struct. 33, No. 5, pp. 1191–1204, 1989.
- [19] Kant, T.: Thick shells of revolution – some studies. Ph. D. Thesis, Dept. of Civil Engng., Indian Institute of Technology, Bombay, India, 1976.
- [20] Hass, D. J., Lee, S. W.: A nine noded assumed strain finite element method. Comput. Struct.; 26; 445–452; 1987.
- [21] Reddy, J. N., Liu, C. F.: A higher order shear deformation theory of laminated elastic shells. Int. J. Engng. Sci., Vol. 23; No. 3, pp. 319–330, 1985.
- [22] Zienciewicz, O. C.: The finite element method. 3rd. Ed., London, McGraw-Hill, 1977.
- [23] Ross, C. T. F., Finite Elements for the Vibration of Cones and Cylinders, Int. Journ. for Numer. Meth. in Engineering 9 (1975), 833–845.
- [24] Reissner, E., On the Theorie of Bending of Elastic Plates, J. Math. Phys. 23 (1944), 184–191.
- [25] Hinton, E., Owen, D. R. J., Krause, G., Finite Elemente Programme für Platten und Schalen, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, 1990.

Anhang

Umrechnung der amerikanischen Maßeinheiten in das metrische System

1 psi	=	6890 N/m ²
1 in.	=	0,0254 m
1 ft.	=	0,3048 m
1 sq. in.	=	6,45*10 ⁻⁴ m ²
1 sq. ft.	=	929*10 ⁻⁴ m ²
1 cu. in.	=	16,387*10 ⁻⁶ m ³
1 cu. ft.	=	0,028 m ³
1 lb.	=	0,45359 kg

Anschrift der Autoren:

Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach
 Institut für Werkstofftechnik und Werkstoffprüfung
 Prof. Dr.-Ing. habil. Johannes Altenbach
 Eckart Nast
 Institut für Festkörpermechanik
 Technische Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg
 Postfach 4120
 Universitätsplatz 2
 O-3010 Magdeburg