

Die Berechnung dünnwandiger Ringträger mit geschlossenem Querschnitt auf der Grundlage des halbmomentenfreien Schalenmodells nach Wlassow, Teil II

Johannes Altenbach, Wolfgang Kissing, Johannes Schulz

Ausgehend von der halbmomentenfreien Schalentheorie von Wlassow wurden im Teil [11] die allgemeinen Gleichungen für Systeme mit eben gekrümmter Stabachse abgeleitet. Diese Modellgleichungen wurden mit den in Arbeiten von Rangelow und von Hirashima/Yajima abgeleiteten Gleichungen verglichen. Dazu wurden alle Gleichungen in eine einheitliche Schreibweise in der Form von DGL.-Systemen überführt. Der Teil II führt die Vergleichsuntersuchungen am Beispiel eines Ringträgers mit Kastenquerschnitt sowohl in allgemeiner Form als auch numerisch fort.

Following the semi-moment shell theory of Vlasov in part I of the paper the general equations for structures with plane curved axes are given. These equations are compared with the structural equations given in papers by Rangelov and Hirashima/Yajima. All equations are transformed in an unique form of differential equations of first order.

Part II contains the results of a comparison analysis for a curved box beam in a general form of basic equations and in form of numerical values.

6 Anwendung auf den Ringträger mit doppelt symmetrischem Kastenquerschnitt

Es wird ein Ringträger mit doppelt symmetrischem Kastenquerschnitt untersucht. Der Querschnitt einschließlich der Vorzeichendefinition der Koordinaten ist in Bild 5 dargestellt.

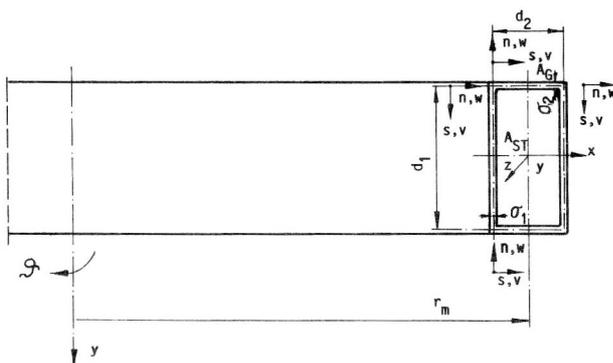


Bild 5 Querschnittsdarstellung und Vorzeichendefinitionen

Die verallgemeinerten Koordinaten $\varphi_1(s)$, $\psi_k(s)$ und $\kappa_k(s)$ sind bereits in Bild 2 (Teil I) [11] enthalten. Der im Bild 6 dargestellte Verlauf der verallgemeinerten Koordinate κ_4 wird im folgenden näherungsweise immer in der angegebenen linearisierten Form verwendet. Bild 7 zeigt den zu κ_4 zugehörigen Verlauf der Querbiegemomente m_4 , der jedoch dem nichtlinearisierten Verlauf von κ_4 entspricht.

Das kanonische Differentialgleichungssystem für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form zeigt Tabelle 2 (im Anhang). Die allgemeine Darstellung verdeutlicht den inneren Aufbau der Gleichungen. Die Berechnung der verallgemeinerten Querschnittswerte kann dabei auch unter Nutzung der in der Baustatik üblichen Integraltabellen $\int_0^1 f_1 f_2 d\xi$ erfolgen, nur daß hier u. a. auch Formen $\int_0^1 f_1 f_2 f_3 d\xi$ auftreten können.

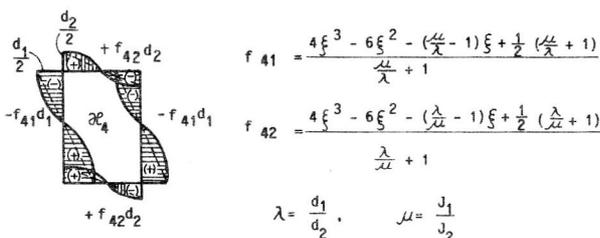


Bild 6 Die verallgemeinerte Koordinatenfunktion κ_4
----- linearisierte Form von κ_4

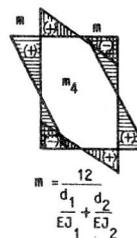


Bild 7 Die Funktion m_4

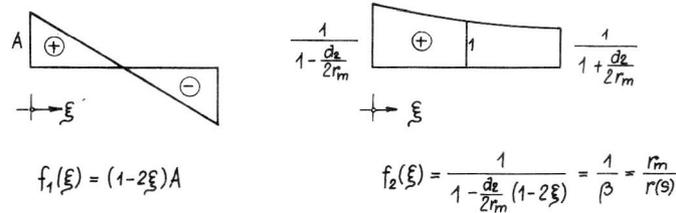


Bild 8
Beispiele für Integrandenfunktionen

Als ein Beispiel ist hier ein Integral, bei dem im Integranden der Kehrwert der Hilfsfunktion β auftritt, angegeben. Beide Funktionen $f_1(\xi)$ und $f_2(\xi)$ sind in Bild 8 graphisch dargestellt.

$$\int_0^1 f_1 f_2 d\xi = \int_0^1 \frac{(1-2\xi)A}{1 - \frac{d_2}{2r_m}(1-2\xi)} d\xi = 2A \frac{r_m^2}{d_2^2} \left(\ln \frac{1 + \frac{d_2}{2r_m}}{1 - \frac{d_2}{2r_m}} - \frac{d_2}{r_m} \right)$$

$$\ln \frac{1 + \frac{d_2}{2r_m}}{1 - \frac{d_2}{2r_m}} - \frac{d_2}{r_m} \cong \frac{1}{12} \cdot \frac{d_2^3}{r_m^3} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right)$$

$$\int_0^1 f_1 f_2 d\xi \cong A \frac{d_2}{6r_m} \left(1 + \frac{3d_2^4}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right)$$

Das kanonische Differentialgleichungssystem für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form, jedoch für $\beta = r(s)/r_m = 1$, zeigt Tabelle 3. Bei der Berechnung von Ringträgern kann zur Rechenvereinfachung $\beta = 1$ nur für Träger mit geringer Breite, geringer Höhe und sehr großem Krümmungsradius gesetzt werden. Das kanonische Differentialgleichungssystem für den doppelsymmetrischen Kastenquerschnitt veranschaulicht das für dieses Beispiel, indem aus einem Vergleich zwischen den kanonischen Differentialgleichungssystemen für $\beta = \beta(s)$ und $\beta = 1$ ersichtlich ist, daß die Werte für

$$A_G \frac{d_2^2}{r_m^2} \text{ bzw. } A_G \frac{d_1^2 \cdot d_2^2}{r_m^2}$$

dazu gegen Null gehen müssen (vgl. die Gleichungen jeweils für $P'_2(t)$ und $P'_4(t)$).

Der Grenzübergang $r_m \rightarrow \infty$ führt zu den entsprechenden Gleichungen des prismatischen Trägers mit gerader Längsachse (Tabelle 6) (im Anhang).

Das von M. Hirashima und S. Yajima in [7] angegebene Gleichungssystem, das im Punkt 4.1. wiedergegeben wurde (Gl. 13a) und (13b)), wurde analog zur Tabelle 2 aufbereitet und in Tabelle 4 zum Vergleich dargestellt.

Die dabei in eckige Klammern gesetzten Terme entstehen durch die Nichtberücksichtigung der Wandneigungen gegenüber der Ringachse, siehe auch 4.1. Schlußfolgerung 1. Sie führen zu mechanisch nichtsinnvollen Kopplungen der Unbekannten.

Das von R. P. Rangelow in [9] angegebene Gleichungssystem, das in Punkt 4.2. wiedergegeben wurde (Gl. (19a) und (19b)), wurde ebenfalls analog zur Tabelle 2 aufbereitet und in Tabelle 5 zum Vergleich dargestellt. An Hand der Tabelle 5 zeigt sich, daß bei der Lösung nach R. P. Rangelow die Vernachlässigung der Normalverschiebungszustände beträchtlichen Einfluß auf die Gleichungen für die verallgemeinerten Längsverschiebungen (U_i') und die verallgemeinerten Querkräfte (Q_n') hat. Die Vernachlässigung der Normalverschiebungszustände führt zu komplizierteren Kopplungen der Unbekannten.

Die in Tabelle 6 angegebenen Querschnittswerte I_{xx}, I_{yy} stellen die bekannten axialen Trägheitsmomente des Querschnittes dar. Sie entstehen hier aus den verallgemeinerten Querschnittswerten a_{ij}^* . Für $I_{\varphi\varphi}$ gilt:

$$I_{\varphi\varphi} = A \cdot \frac{d_1^2 d_2^2}{48}$$

7 Zahlenbeispiel

Der Vergleich der Modellgleichungen von Hirashima/Yajima, Rangelow und der vorliegenden Arbeit wird am Beispiel eines einseitig starr eingespannten Viertelkreisbogens mit symmetrisch eingeleiteter Einzellast am freien Ende durchgeführt. Dabei wird jeweils zwischen den Fällen mit bzw. ohne starres Endschnitt am freien Ende unterschieden. Beim starren Endschnitt

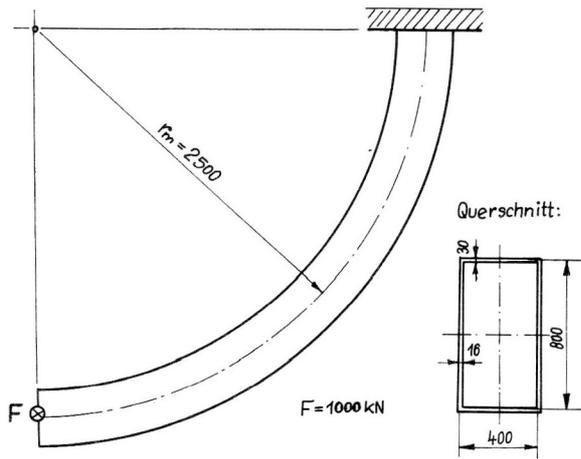


Bild 9
Viertelkreisträger mit Einzellast

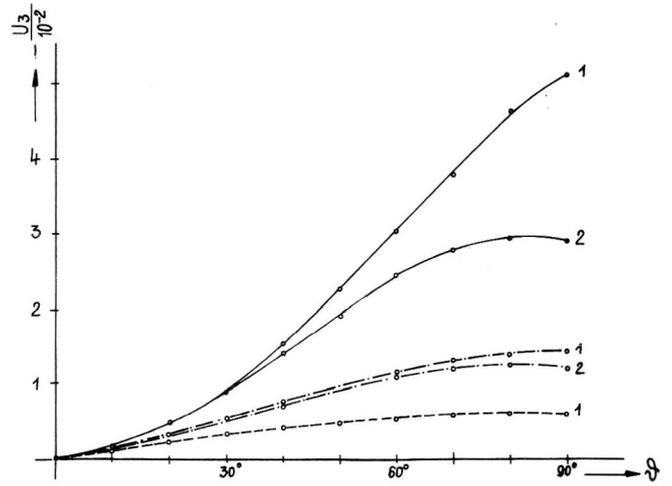


Bild 10
Verlauf der verallgemeinerten Verschiebung U_3
 — vorliegende Theorie
 - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

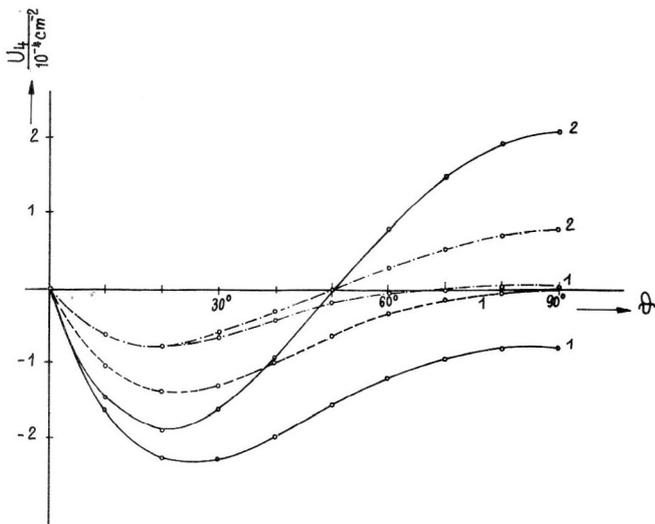


Bild 11
Verlauf der verallgemeinerten Verschiebung U_4
 — vorliegende Theorie
 - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

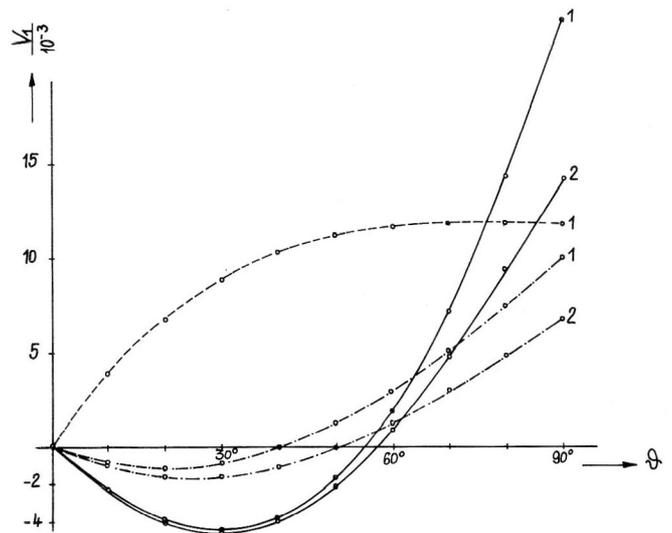


Bild 12
Verlauf der verallgemeinerten Verschiebung V_1
 — vorliegende Theorie
 - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

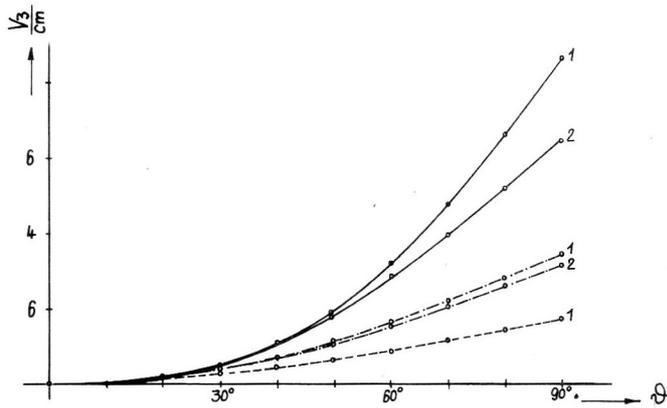


Bild 13
 Verlauf der verallgemeinerten Verschiebung V_3
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

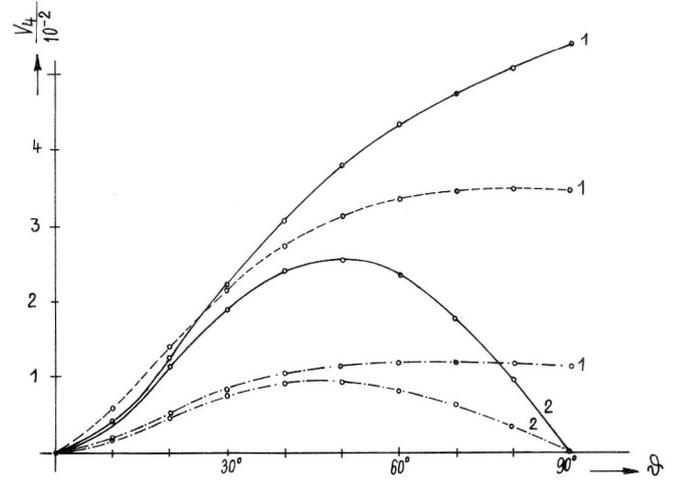


Bild 14
 Verlauf der verallgemeinerten Verschiebung V_4
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

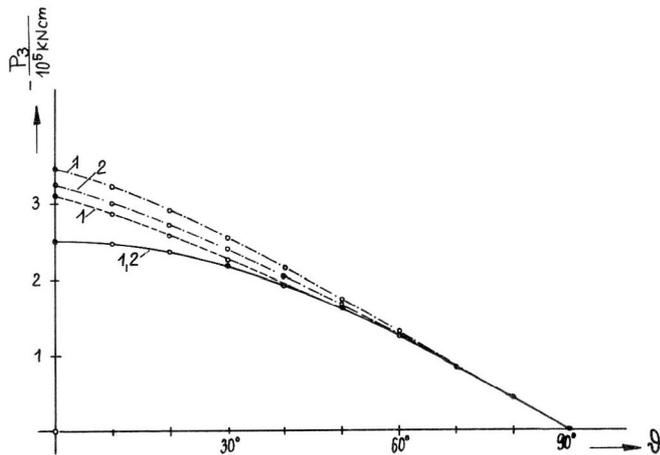


Bild 15
 Verlauf der verallgemeinerten Schnittkraft P_3
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

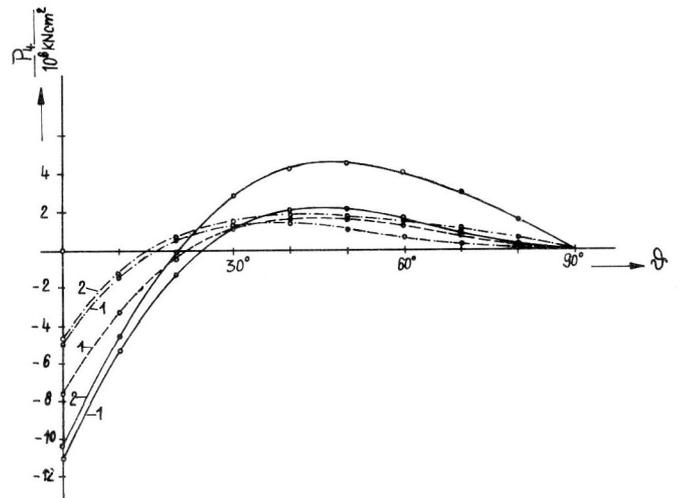


Bild 16
 Verlauf der verallgemeinerten Schnittkraft P_4
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

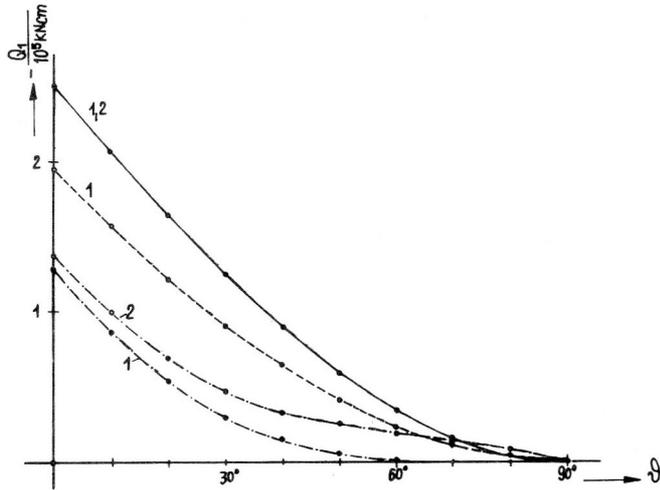


Bild 17
 Verlauf der verallgemeinerten Schnittkraft Q_1
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

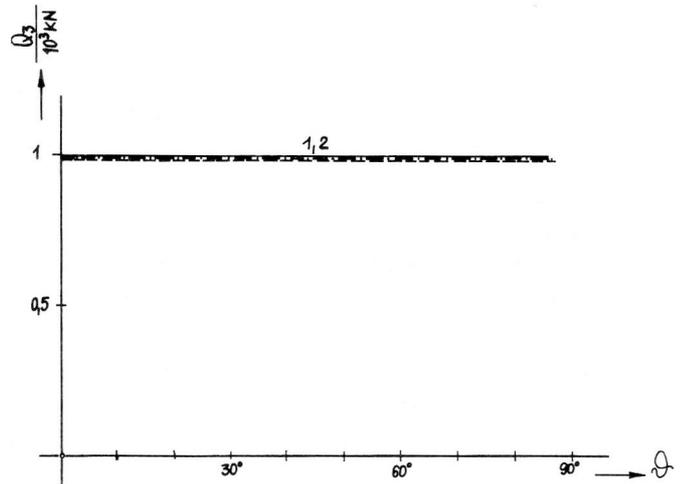


Bild 18
 Verlauf der verallgemeinerten Schnittkraft Q_3
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende

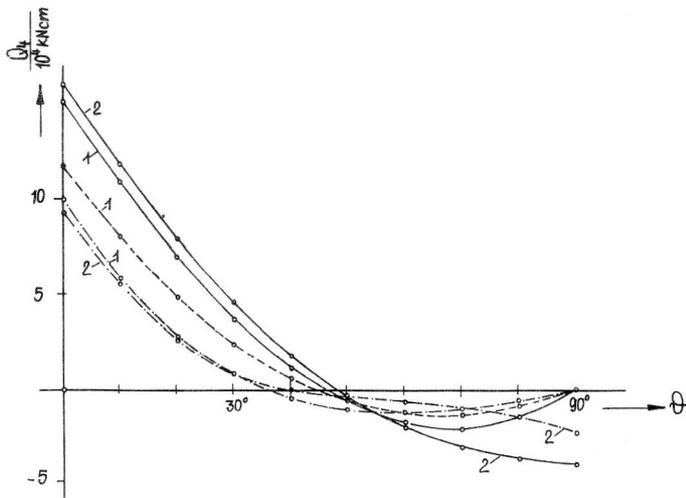
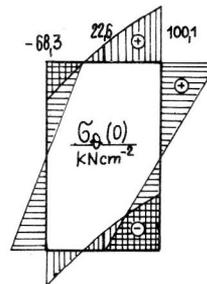
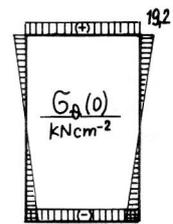


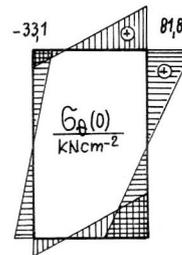
Bild 19
 Verlauf der verallgemeinerten Schnittkraft Q_4
 ——— vorliegende Theorie
 - - - - - Theorie nach Hirashima/Yajima
 - . - . - Theorie nach Rangelow
 1 - System ohne Schott
 2 - System mit starrem Schott am freien Ende



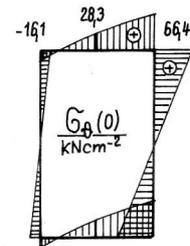
vorliegende Theorie



elementare Theorie



Theorie nach [7]



Theorie nach [9]

Bild 20
 Normalspannungsverlauf an der Einspannung

sind die Konturverformungen (V_4) am freien Ende Null und die zugehörige Querkraft Q_4 vorhanden. Im anderen Fall verschwindet Q_4 , und die Konturverformungen V_4 können sich unbehindert einstellen. Bild 9 zeigt das System und die Belastung.

Die numerische Berechnung erfolgte unter Verwendung eines Übertragungsmatrixalgorithmus mit Zwischenablösungen zur numerischen Stabilisierung [12], [13], [6]. Dieses Lösungsverfahren hat sich bei derartigen Systemen bisher mehrfach bewährt.

In den Bildern 10–14 sind die Verläufe der verallgemeinerten Verschiebungen für die unterschiedlichen Modellgleichungen dargestellt. Die Bilder 15–19 zeigen die Verläufe der entsprechenden verallgemeinerten Schnittkräfte. Die Normalspannungen σ_θ an der Einspannstelle ($\vartheta = 0$) sind jeweils für das System ohne Schott am freien Ende in Bild 20 aufgetragen. Zum Vergleich, insbesondere mit den aus der vorliegenden Theorie folgenden Spannungen, wurden hier auch die Werte, die man mit der elementaren Theorie erhält, mit aufgenommen.

Aus den Ergebnissen folgt anschaulich, daß weder eine elementare Theorie noch die vereinfachten Theorien von Hirashima/Yajima und Rangelow für die Berechnung derartiger Systeme Verwendung finden sollten. Die maßgebenden Spannungswerte betragen hier bei der Theorie von Hirashima/Yajima ca. 82 % und bei der Theorie von Rangelow nur ca. 66 % der Werte nach der Wlassowtheorie. Ferner widersprechen die Verläufe für die Schnittgrößen P_3 und Q_1 in den Lösungen nach Hirashima/Yajima und Rangelow sogar den statischen Gleichgewichtsbedingungen.

8 Zusammenfassung

Für dünnwandige Ringträger mit geschlossenem Querschnitt wird die halbmomentenfreie Schalentheorie nach Wlassow allgemein abgeleitet. Die Modellgleichungen der Wlassowtheorie werden mit denen vereinfachter Ringträgermodelle theoretisch und numerisch verglichen. Die Ergebnisse zeigen, daß die von Hirashima/Yajima bzw. von Rangelow eingeführten Vereinfachungen der Modellgleichungen die Ergebnisse stark verfälschen und ihre Anwendung daher nicht empfohlen werden kann.

Anhang

Tabelle 2

Das kanonische DGI.-System für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form;
Veränderliche: Bogenlänge $t = r_m \cdot \vartheta$; x_4 linearisiert; $\beta = \beta(s)$.

$$\begin{aligned}
 U_1'(t) &= -\frac{1}{r_m} V_2(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} P_1(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_2(t) \\
 U_2'(t) &= +\frac{1}{r_m} \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) + \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} + \frac{1}{2A_G \frac{d_2^2}{12} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right)} + \frac{1}{r_m^2} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \right\} \bar{P}_2(t) \\
 U_3'(t) &= +\frac{1}{r_m} V_4(t) - \frac{1}{r_m} V_4(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{12} + 2A_G \frac{d_2^2}{4}} \bar{P}_3(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{12} + 2A_G \frac{d_2^2}{4}} \bar{P}_4(t) \\
 U_4'(t) &= \frac{1}{r_m} \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{12} + 2A_G \frac{d_2^2}{4}} \bar{P}_3(t) + \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} + \frac{1}{2A_G \frac{d_2^2}{12} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right)} + \frac{1}{r_m^2} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{12} + 2A_G \frac{d_2^2}{4}} \right\} \bar{P}_4(t) \\
 V_1'(t) &= -\frac{1}{r_m} U_3(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_2^2}{4} \left(\frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{A_{ST} d_2^2 + A_G d_2^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} Q_1(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) \\
 &\quad - \frac{1}{G} \left\{ \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} - 2A_G \frac{d_2^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{A_{ST} d_2^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} + A_G d_2^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} \cdot \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} + 2A_G \frac{d_2^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} + 2A_G \frac{d_2^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} - \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2 \frac{1}{1 + \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2} \right\} Q_1(t) \\
 V_2'(t) &= +\frac{1}{r_m} U_1(t) - 1,0 U_2(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_G \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} Q_2(t) \\
 V_3'(t) &= -1,0 U_3(t) - \frac{1}{r_m} \frac{d_2^2}{4} U_4(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_1(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_4(t)
 \end{aligned}$$

$$V_4'(t) = -1,0 U_4(t) - \frac{1}{G} \left\{ \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} - 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4}\right)}{A_{sr} d_2^2 \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4}\right)} \cdot \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4}\right)}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{2r_m}\right) \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} \right\} Q_1(t) \\ + \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{sr}} Q_3(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4}\right)}{A_{sr} d_2^2 \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4}\right)} Q_4(t)$$

$$\bar{P}_1'(t) = -\frac{1}{r_m} Q_2(t) - \hat{p}_1(t)$$

$$Q_1'(t) = -\frac{1}{r_m} \bar{P}_3(t) - \hat{q}_{s1}(t)$$

$$\bar{P}_2'(t) = +Q_2(t) - \hat{p}_2(t)$$

$$Q_2'(t) = +\frac{1}{r_m} \bar{P}_1(t) - \hat{q}_{s2}(t)$$

$$\bar{P}_3'(t) = +\frac{1}{r_m} Q_1(t) + Q_3(t) - \hat{p}_3(t)$$

$$Q_3'(t) = -\hat{q}_{s3}(t)$$

$$\bar{P}_4'(t) = +\frac{1}{r_m} \frac{d_2^2}{4} Q_3(t) + 1,0 Q_4(t) - \hat{p}_4(t)$$

$$Q_4'(t) = +E \frac{96}{J_1 + J_2} V_4(t) + \frac{1}{r_m} \bar{P}_3(t) - \hat{q}_{s4}(t)$$

Tabelle 3

Das kanonische DGL-System für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form;
Veränderliche: Bogenlänge $t = r_m \cdot \vartheta$; x_k linearisiert; $\beta = 1$.

$$U_1'(t) = -\frac{1}{r_m} 1,0 V_2(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{sr} + 2A_G} \bar{P}_1(t)$$

$$U_2'(t) = +\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_2^2}{12}} \bar{P}_2(t)$$

$$U_3'(t) = +\frac{1}{r_m} 1,0 V_1(t) - \frac{1}{r_m} 1,0 V_4(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{sr} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t)$$

$$U_4'(t) = +\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{sr} \frac{d_1^2 d_2^2}{48} + 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48}} \bar{P}_4(t)$$

$$V_1'(t) = -\frac{1}{r_m} \frac{1}{2} U_3(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{sr} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(t) - \frac{1}{G} \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{sr} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(t)$$

$$V_2'(t) = +\frac{1}{r_m} U_1(t) - 1,0 U_2(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_G} Q_2(t)$$

$$V_3'(t) = -1,0 U_3(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_{sr}} Q_3(t)$$

$$V_4'(t) = +\frac{1}{r_m} \frac{1}{2} U_3(t) - 1,0 U_4(t) - \frac{1}{G} \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{sr} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(t) - \frac{1}{G} \frac{2A_{sr} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{sr} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(t)$$

$$P_1'(t) = -\frac{1}{r_m} Q_2(t) - \hat{p}_1(t)$$

$$P_2'(t) = +G \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_2^2}{12} U_2(t) + 1,0 Q_2(t) - \hat{p}_2(t)$$

$$P_3'(t) = +\frac{1}{r_m} \frac{1}{2} Q_1(t) + 1,0 Q_3(t) - \frac{1}{r_m} \frac{1}{2} Q_4(t) - \hat{p}_3(t)$$

$$P_4'(t) = +G \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} U_4(t) + 1,0 Q_4(t) - \hat{p}_4(t)$$

$$Q_1'(t) = -\frac{1}{r_m} \bar{P}_3(t) - \hat{q}_{s1}(t)$$

$$Q_2'(t) = +\frac{1}{r_m} \bar{P}_1(t) - \hat{q}_{s2}(t)$$

$$Q_3'(t) = -\hat{q}_{s3}(t)$$

$$Q_4'(t) = +E \frac{96}{J_1 + J_2} V_4(t) + \frac{1}{r_m} \bar{P}_3(t) - \hat{q}_{s4}(t)$$

Tabelle 4

Das kanonische DGI.-System für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form nach dem Lösungsvorschlag von Hirashima/Yajima;

Veränderliche: Bogenlänge $t = r_m \cdot \vartheta$; Die mit [] gekennzeichneten Terme entfallen, wenn der Neigungswinkel α der Querschnittskonturlinien zur Vertikalen nachträglich berücksichtigt wird.

$$\begin{aligned}
 U_1'(t) &= + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) \\
 U_2'(t) &= + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_2^2}{12}} \bar{P}_2(t) \\
 U_3'(t) &= + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t) \\
 U_4'(t) &= + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2 d_2^2}{48} + 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48}} \bar{P}_4(t) \\
 V_1'(t) &= + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(t) - \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(t) \\
 V_2'(t) &= -1,0 U_2(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_G} Q_2(t) \\
 V_3'(t) &= -1,0 U_3(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) \\
 V_4'(t) &= -1,0 U_4(t) - \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(t) \\
 \bar{P}_1'(t) &= -\frac{2}{R} Q_2(t) \left[-\frac{2}{R} Q_3(t) \right] - P_1(t) \\
 \bar{P}_2'(t) &= \left[-\frac{1}{R} Q_1(t) \right] + 1,0 Q_2(t) \left[-\frac{1}{R} Q_4(t) \right] - P_2(t) \\
 \bar{P}_3'(t) &= +\frac{1}{R} Q_1(t) + 1,0 Q_3(t) - \frac{1}{R} Q_4(t) - P_3(t) \\
 \bar{P}_4'(t) &= +1,0 Q_4(t) - P_4(t) \\
 Q_1'(t) &= \left[+\frac{1}{R} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4}}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_2^2}{12}} \bar{P}_2(t) \right] - \frac{1}{R} \frac{2A_G \frac{d_1^2}{4}}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t) - q_1(t) \\
 Q_2'(t) &= +\frac{1}{R} \frac{2A_G}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) - q_2(t) \\
 Q_3'(t) &= \left[+\frac{1}{R} \frac{2A_{ST}}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) - q_3(t) \right] \\
 Q_4'(t) &= +E \frac{96}{J_1 + \frac{J_2}{2}} V_4(t) \left[+\frac{1}{R} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4}}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_2^2}{12}} \bar{P}_2(t) \right] + \frac{1}{R} \frac{2A_G \frac{d_1^2}{4}}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t) - q_4(t)
 \end{aligned}$$

Tabelle 5

Das kanonische DGI.-System für den Ringträger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form nach dem Lösungsvorschlag von Rangelow; Veränderliche: Bogenlänge $t = r_m \cdot \vartheta$; Normalverschiebungszustände nicht einbezogen; Näherungsweise hier $\kappa = R_i/R(t,s)$ durch $1/\beta = r_m/r(s)$ ersetzt.

$$\begin{aligned}
 U_1'(t) &= -\frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{A_{ST}}{A_G}} V_2(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_2(t) \\
 U_2'(t) &= +\frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - \left(\frac{d_2}{2r_m}\right)^2}} - \frac{1}{1 + \frac{A_{ST}}{A_G}} \right\} V_2(t) + \frac{1}{E} \frac{1}{r_m} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(t) + \\
 &\quad + \frac{1}{A_G \frac{d_2^2}{12} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4}\right)} \\
 &\quad + \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - \left(\frac{d_2}{2r_m}\right)^2} + 2A_G \frac{d_2^2}{12} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4}\right)} + \frac{1}{r_m^2} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \right\} \bar{P}_2(t) \\
 U_3'(t) &= +\frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} V_1(t) - \frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} V_4(t) - \frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_4(t)
 \end{aligned}$$

$$U_4'(t) = +\frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{12} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} \right\} V_1(t) - \frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{12} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} \right\} V_4(t) +$$

$$+ \frac{1}{E} \frac{1}{r_m} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(t) + \frac{1}{E} \left\{ \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} + 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) + \frac{1}{r_m^2} (2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}) \right\} \bar{P}_4(t)$$

$$V_1'(t) = -\frac{1}{r_m} U_3(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} Q_1(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) -$$

$$- \frac{1}{G} \left\{ \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} - 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}}{A_{ST} d_2^2 \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2 \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} \right\} Q_4$$

$$V_2'(t) = +\frac{1}{r_m} U_1(t) - 1.0 U_2(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_G \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} Q_2(t)$$

$$V_3'(t) = -1.0 U_3(t) - \frac{1}{r_m} \frac{d_2^2}{4} U_4(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_1(t) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) + \frac{1}{r_m} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_4(t)$$

$$V_4'(t) = -1.0 U_4(t) + \frac{1}{G} \left\{ \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} - 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}}{A_{ST} d_2^2 \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} \frac{1}{2} \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2 \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} \right\} Q_4$$

$$+ \frac{1}{r_m} \frac{1}{G} \frac{1}{2} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(t) + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_2^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2 \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right)} Q_4(t)$$

$$\bar{P}_1'(t) = -\frac{1}{r_m} Q_2(t) - p_1^{**}(t)$$

$$\bar{P}_2'(t) = +Q_2(t) - p_2^{**}(t)$$

$$\bar{P}_3'(t) = +\frac{1}{r_m} Q_1(t) + Q_3(t) - p_3^{**}(t)$$

$$\bar{P}_4'(t) = +\frac{1}{r_m} \frac{d_2^2}{4} Q_3(t) + Q_4(t) - p_4^{**}(t)$$

$$Q_1'(t) = +\frac{E}{r_m^2} \left\{ 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right) + \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) \right\} V_1(t) -$$

$$- \frac{E}{r_m^2} \left\{ 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right) + \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} + \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) \right\} V_4(t) -$$

$$- \frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \bar{P}_3(t) - \frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} \right\} \bar{P}_4(t) - q_{s1}^{**}(t)$$

$$Q_2'(t) = +\frac{E}{r_m^2} \left\{ 2A_G \left(1 - \frac{d_2^2}{12r_m^2} - \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right) - \frac{1}{r_m^2} \left\{ 2A_G \frac{d_2^2}{12} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} - \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) \right\} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_G} \right\} V_2(t) +$$

$$+ \frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \bar{P}_1(t) - \frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{1 - (\frac{d_2}{2r_m})^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right\} \bar{P}_2(t)$$

$$Q_3'(t) = -q_{s3}^{**}(t)$$

$$Q_4'(t) = -\frac{E}{r_m^2} \left\{ 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right) + \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} - \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{12} \frac{1}{1 - \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2}} \right\} V_1(t) + \right.$$

$$+ \frac{E}{r_m^2} \left\{ 2A_G \frac{d_1^2}{4} \left(1 + \frac{d_2^2}{12r_m^2} + \frac{d_2^4}{80r_m^4} \right) \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \right) + \frac{1}{r_m^2} 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48} \left(1 + \frac{3d_2^2}{20r_m^2} - \frac{3d_2^4}{112r_m^4} \right) \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{12} \frac{1}{1 - \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2}} \right\} + r_m^2 \frac{96}{J_1 J_2} \right\} V_4(t) +$$

$$+ \frac{1}{r_m} \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} \bar{P}_3(t) + \frac{1}{r_m^2} \left\{ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} \frac{A_{ST}}{A_G}} - \frac{1}{A_{ST} \frac{d_2^2}{12} \frac{1}{1 - \left(\frac{d_2}{2r_m} \right)^2}} \right\} \bar{P}_4(t) - q_{s4}^{**}(t)$$

Tabelle 6

Das kanonische DGI.-System für den geraden Träger mit Kastenquerschnitt in allgemeiner Form.

$$U_1'(z) = +\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} + 2A_G} \bar{P}_1(z) - \frac{1}{E} \frac{1}{A} \bar{P}_1(z)$$

$$U_2'(z) = +\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{12}} \bar{P}_2(z) - \frac{1}{E} \frac{1}{J_{yy}} \bar{P}_2(z)$$

$$U_3'(z) = +\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2}{12} + 2A_G \frac{d_1^2}{4}} \bar{P}_3(z) - \frac{1}{E} \frac{1}{J_{xx}} \bar{P}_3(z)$$

$$U_4'(z) = -\frac{1}{E} \frac{1}{2A_{ST} \frac{d_1^2 d_2^2}{48} + 2A_G \frac{d_1^2 d_2^2}{48}} \bar{P}_4(z) - \frac{1}{E} \frac{1}{J_{yy'}} \bar{P}_4(z)$$

$$V_1'(z) = +\frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_1^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{12}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(z) - \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_1^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{12}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(z)$$

$$V_2'(z) = -1,0 U_2(z) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_G} Q_2(z)$$

$$V_3'(z) = -1,0 U_3(z) + \frac{1}{G} \frac{1}{2A_{ST}} Q_3(z)$$

$$V_4'(z) = -1,0 U_4(z) - \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_1^2}{4} - 2A_G \frac{d_1^2}{12}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_1(z) + \frac{1}{G} \frac{2A_{ST} \frac{d_1^2}{4} + 2A_G \frac{d_1^2}{12}}{A_{ST} d_2^2 \cdot A_G d_1^2} Q_4(z)$$

$$P_1'(z) = -P_1(z)$$

$$\bar{P}_2'(z) = +1,0 Q_2(z) - P_2(z)$$

$$\bar{P}_3'(z) = +1,0 Q_3(z) - P_3(z)$$

$$\bar{P}_4'(z) = +1,0 Q_4(z) - P_4(z)$$

$$Q_1'(z) = -q_1(z)$$

$$Q_2'(z) = -q_2(z)$$

$$Q_3'(z) = -q_3(z)$$

$$Q_4'(z) = +E \frac{96}{J_1 + J_2} V_4(z) - q_4(z)$$

Literatur

- [1] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
- [2] Kissing, W.: Verallgemeinerte Stabmodelle zur Behandlung dünnwandiger geschlossener Konstruktionen unter Einbeziehung von stationären Temperaturlastfällen. Diss. B, TH Magdeburg, 1982.
- [3] Altenbach, J.; Kissing, W.: Berechnungsmodelle und -methoden für dünnwandige geschlossene Stabschalen. X. ikm Weimar (1984) H. 3, S. 8-12.
- [4] Altenbach, J.; Kissing, W.: Numerische Berechnung konischer dünnwandig geschlossener Konstruktionen. Schiffbau Forschung, Rostock, 24 (1985) 1, S. 33-39.

- [5] Altenbach, J.; Kissing, W.: Statische und dynamische Analyse für prismatische und nicht-prismatische Kastenträger. Technische Mechanik 7 (1986) H. 1, S. 37–41.
- [6] Kissing, W.; Reckziegel, P.: Nichtprismatische dünnwandige Konstruktionen und ihre rechnergestützte Untersuchung mit der halbmomentenfreien Schalentheorie. Schiffbauforschung, Rostock, 28 (1989) 4, S. 203–208.
- [7] Hirashima, M.; Yajima, S.: Baustatischer Beitrag zu elastischen, dünnwandigen Stäben. Bulletin of Science and Engineering Research. Laboratory, Waseda University, No. 45 (1969), S. 121–133.
- [8] Grünberg, N. J.: Anwendung der Variationsmethode nach Prof. W. S. Wlassow bei der Berechnung kantiger Schalen mit kreisförmiger Achse. In: Experimentelle und theoretische Untersuchungen dünnwandiger räumlicher Konstruktionen, S. 102–130, Staatlicher Verlag für Bauwesen und Architektur, Moskau 1952.
- [9] Rangelow, R. P.: Anwendung der Variationsmethode von W. S. Wlassow bei der Festigkeitsuntersuchung von kantigen Schalen mit einer geschlossenen Querschnittskontur, gebildet durch eine beliebige ebene Kurve. Diss. TU für Bauwesen, Sofia 1965.
- [10] Altenbach, J.; Horeschi, H.: Kritische Betrachtungen zu einer Arbeit von Rangelow. Unveröffentlichte Arbeit.
- [11] Altenbach, J.; Kissing, W.; Schulz, J.: Die Berechnung dünnwandiger Ringträger mit geschlossenem Querschnitt auf der Grundlage des halbmomentenfreien Schalenmodells nach Wlassow Teil I. Techn. Mechanik 12 (1991) H. 3, S. 159–168.
- [12] Landgraf, G.: Die elastische Berechnung von drehsymmetrisch belasteten Rotationsschalen mittels eines kanonischen DGI.-Systems. Problemseminar Flächenträgerwerke I, TU Dresden H. 1/74, S. 2–15.
- [13] Altenbach, J.; Ignatjew, W. A.; Kissing, W.; Sokolow, O.: Berechnung dünnwandiger räumlicher Stabschalenkonstruktionen (russ.). Strojizdat Moskau (im Druck).

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. J. Altenbach
 Fakultät Maschinenbau
 WB Festkörpermechanik
 Technische Universität „Otto von Guericke“
 PSF 4120
 O-3010 Magdeburg

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Kissing
 Fakultät Maschinenbau
 Technische Hochschule Wismar
 PSF
 O-2400 Wismar

Dr.-Ing. J. Schulz
 Bauakademie
 Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
 Plauener Str. 163
 O-1092 Berlin