

# Stabilität der Bewegung teilweise fluidgefüllter Rotoren

S. Bogomolov, S. Korsunskij

*Zur Ermittlung der Stabilität der Bewegung teilweise fluidgefüllter Rotoren erfolgt*

- die Lösung der Randwertaufgabe für kleine Schwingungen des idealen Fluids im Rotor durch Ermittlung des hydrodynamischen Druckfeldes des Fluidteilchengeschwindigkeitsfeldes und der Eigenfrequenzen der Fluidrelativschwingungen,
- die Analyse der erregten Rotorbewegung sowie des Zhukovski-Problems (Ermittlung der mitschwingenden Massen und Trägheitsmomente) und
- die Ableitung der Gleichungen für die erregten Schwingungen des Systems Rotor-Fluid einschließlich der Aufstellung der entsprechenden Stabilitätsbedingungen

## 1 Problemstellung

Fragen der Bewegungsstabilität für teilweise fluidgefüllte Rotoren entstanden im Zusammenhang mit der Projektierung stark beauftragter Zentrifugen. In letzter Zeit trat dabei die Tendenz auf, die Masse der Rotoren mit dem Ziel der Material- und Energieeinsparung zu verringern. Gleichzeitig wurde jedoch im Rahmen experimenteller Untersuchungen sowie im Betrieb festgestellt, daß bei bestimmtem Füllstand massereduzierter Rotoren niedrigfrequente Schwingungen entstanden, die die Sicherheitsschranken überschritten. Das Frequenzspektrum dieser Vibrationen liegt in der Nähe der Eigenfrequenzen der weich gelagerter Zentrifuge, die wesentlich niedriger als die Drehfrequenz sind. Dabei wurde eine deutliche Erregung der freien Oberfläche der flüssigen Phase beobachtet. Eine Erhöhung der Masse und der Trägheitsmomente des Rotors gestatteten die Beseitigung der gefährlichen Betriebsbedingungen für die Zentrifugen. Fragen der Bewegungsstabilität von Rotoren wurden in einer Reihe von Publikationen untersucht. Die Stabilität von vollständig fluidgefüllten Rotoren wurde in [1] untersucht. Eine Reihe von Arbeiten zur Untersuchung der Stabilität teilweise gefüllter Rotoren basiert in der Hauptsache auf der Lösung von Randwertaufgaben über kleine Schwingungen des Fluides in Ebenen orthogonal zur Rotorachse [2]. Ungeachtet dessen zeigen experimentelle Ergebnisse der beiden erstgenannten Autoren dieses Artikels, daß in Rotoren gleichfalls Fluidwellen in Ebenen parallel zur Achse möglich sind. Basierend auf den Ergebnissen von Untersuchungen über Schwingungen mit endlichem Fluidvolumen [3], [4] sowie Rotorschwingungen [5] gelang es Gleichungen für kleine Schwingungen des Systems Rotor – Fluid für Bewegungen des Fluids parallel zur Rotorachse abzuleiten [6]. Dabei blieben jedoch die Coriolis - Kräfte, die auf die Fluidteilchen bei Drehbewegungen wirken, sowie Fluidwellen, die in zur Rotorachse orthogonalen Ebenen verlaufen, unberücksichtigt. Dies schränkt die praktische Anwendung der in der Arbeit erhaltenen Ergebnisse ein. Die vorliegende Arbeit soll diese Beschränkungen vermeiden. Unter Einbeziehung der Coriolis - Kräfte gelingt es, die Werte der hydrodynamischen Koeffizienten in den Gleichungen für erregten Rotor zu verbessern. Außerdem werden neue Koeffizienten eingeführt, die die Schwingungen des Fluides in Ebenen orthogonal zur Rotorachse berücksichtigen. Damit wird eine Erweiterung der traditionellen Fragenstellungen u.a. durch Einbeziehung des Masse- und Trägheitsmomenteneinflusses des Rotors auf die Stabilität bei räumlichen Relativschwingungen des Fluids möglich.

## 2 Randwertaufgabe über Fluidschwingungen in einem Rotor

Die Randwertaufgabe wird auf der Grundlage der linearisierten Euler – Gleichungen für das rotierende Zylinderkoordinatensystem  $r, \theta, z$ :

$$u_t - 2\omega v + \frac{1}{\rho} p_r = 0$$

$$v_t + 2\omega u + \frac{1}{\rho r} p_\theta = 0 \quad (1)$$

$$w_t + \frac{1}{\rho} p_z = 0$$

<sup>1</sup>Übersetzung ins Deutsche von Holm Altenbach und Udo Fischer – beide TU Magdeburg

Dabei bedeuten:  $u, v, w$  die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeiten der Fluidteilchen,  $\omega = \text{konst.}$  die Winkelgeschwindigkeit des Rotors,  $\rho$  die Fluiddichte,

$$p = P - \frac{\rho\omega^2}{2}(r^2 - R_0^2) \quad (2)$$

$P$  der hydrodynamische Druck sowie  $R_0$  der Radius der freien, nicht erregten Fluidfläche. Die Indices bei den Variablen bedeuten Ableitungen nach den entsprechenden Koordinaten. Zu den Eulerschen Gleichungen ist die Kontinuitätsbedingung hinzuzufügen

$$u_r + \frac{1}{r}(u + v_\theta) + w_z = 0 \quad (3)$$

Die Randbedingungen für die Wandregion ergeben sich durch Ausschluß der Strömung des Fluids durch die Wand

$$u = 0 \text{ für } r = R \quad (4)$$

$$w = 0 \text{ für } z = \pm \frac{a}{2} \quad (5)$$

Dabei ist  $R$  der Radius des Hohlraums und  $a$  die Länge seiner Mantelfläche. Die Randbedingung an der freien Oberfläche des Fluids ergibt sich aus der Bedingung für den Druck an der Oberfläche

$$P = 0 \text{ für } r = R_0 + \xi$$

mit  $\xi$  als kleine Amplitude der erregten freien Oberfläche des Fluids.

Unter Berücksichtigung von Gl. (2) sowie Vernachlässigung von Termen 2. Ordnung erhält man

$$p = -\rho\omega^2 R_0 \xi$$

Beachtet man weiterhin, daß die Fluidteilchen sich nicht vermischen ( $\xi_t = u$ ), ergibt sich

$$p_t = -\rho\omega^2 R_0 u \text{ für } r = R_0 + \xi \cong R_0 \quad (6)$$

Nach Umformung der Gln. (1) und (3) in Analogie zu [1] erhält man die Gleichung zur Ermittlung des hydrodynamischen Drucks

$$\nabla^2 p(r, \theta, \tilde{z}) = 0 \quad (7)$$

mit

$$\tilde{z} = z \sqrt{\frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - 4\omega^2}}$$

$\Omega_n^2$  sind die Eigenkreisfrequenzen der Schwingungen des Fluids in den Hohlräumen parallel zur Achse des Rotors ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ).  $\nabla^2$  ist der Laplace-Operator.

Die Lösung der Gl. (7) für die  $n$ te Fluidschwingform, die der Randbedingung (5) genügt, lautet in Abhängigkeit vom Wert des Parameters  $\Omega_n^2$

1. für  $\Omega_n < 2\omega$

$$p_n = [A_n J_1(\kappa_n r) + B_n Y_1(\kappa_n r)] \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{a} z e^{i(\theta - \Omega_n t)} \quad (8)$$

2. für  $\Omega_n > 2\omega$

$$p_n = [A'_n I_1(\kappa'_n r) + B'_n K_1(\kappa'_n r)] \sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{a} z e^{i(\theta - \Omega_n t)} \quad (9)$$

mit

$$\kappa_n = \frac{n\pi}{a\Omega_n} \sqrt{4\omega^2 - \Omega_n^2}, \quad \kappa'_n = \frac{n\pi}{a\Omega_n} \sqrt{\Omega_n^2 - 4\omega^2}$$

und  $J_1, Y_1, I_1, K_1$  als Bessel-Funktionen mit reellem bzw. imaginärem Argument.

Unter Nutzung von Gl. (1) sowie der Identitäten (8) und (9) können die Komponenten der Fluidgeschwindigkeiten abgeleitet werden. Die Koeffizienten  $A_n, B_n, A'_n, B'_n$  werden aus den Randbedingungen (4) bis auf Konstante bestimmt. Zum Zwecke der Eindeutigkeit der Lösung wird eine Normierung vorgenommen

$$u(R_0, 0, \pm \frac{a}{2}, 0) = \mp U_0 \quad (10)$$

mit  $U_0$  als positiver skalarer Größe.

Die Eigenfrequenzen der Flüssigkeit können unter Nutzung der Randbedingungen (6). Ohne auf einzelne Zwischenschritte einzugehen, sei das Ergebnis für die normierten Eigenschwingungen  $\bar{\Omega}_n = \frac{\Omega_n}{\omega}$  angeführt:

1. für  $\bar{\Omega}_n < 2$

$$A_n [k_\Omega J_1(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0) - \bar{R}_0 \bar{\kappa}_n J_0(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0)] + B_n [k_\Omega Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0) - \bar{R}_0 \bar{\kappa}_n Y_0(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0)] = 0 \quad (11)$$

2. für  $\bar{\Omega}_n > 2$

$$A'_n [k_\Omega I_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0) - \bar{R}_0 \bar{\kappa}'_n I_0(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0)] + B'_n [k_\Omega K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0) - \bar{R}_0 \bar{\kappa}'_n K_0(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0)] = 0 \quad (12)$$

mit

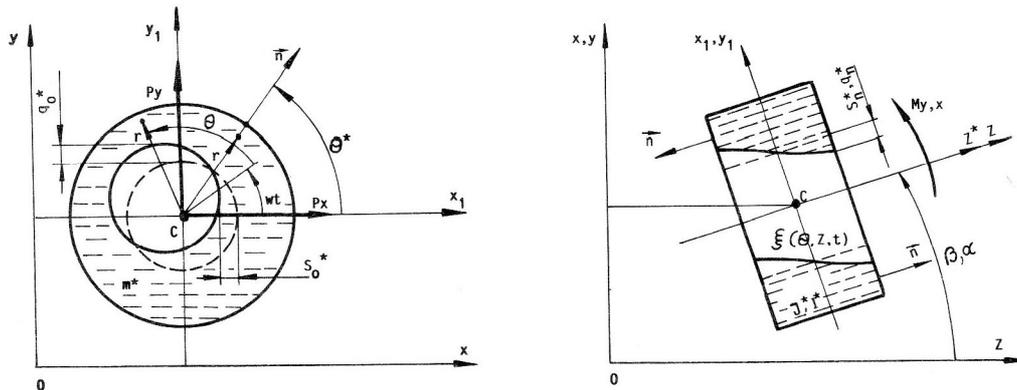
$$k_\Omega = 5 - \bar{\Omega}_n^2 + \frac{2}{\bar{\Omega}_n}, \quad \bar{\kappa}_n = a \kappa_n, \quad \bar{\kappa}'_n = a \kappa'_n, \quad \bar{R}_0 = \frac{R_0}{a}$$

Für den Fall  $n = 0$ , wenn die Schwingungen des Fluides in Ebenen senkrecht zur Drehachse des Rotors verlaufen, gilt die in [2] erhaltene Lösung. Wie die experimentellen Untersuchungen gezeigt haben, spielen in diesem Fall nur die Fluidwellen erster Ordnung eine Rolle in der Dynamik des Rotors. Im weiteren werden alle Parameter, die diesen Wellen entsprechen, mit einem Index 0 versehen ( $p_0, u_0, v_0, \Omega_0$ , usw.).

### 3 Bestimmung der hydrodynamischen Koeffizienten

Zur Ermittlung der mitschwingenden Massen und Trägheitsmomente des Fluides werden erregte Verschiebungen des Rotors (Bild 1) betrachtet. Folgende Koordinatensysteme werden dazu eingeführt:

- $0, x, y, z$  - Inertialsystem,
- $C, x_1, y_1, z_1$  - translativ zum Inertialsystem bewegtes Koordinatensystem und
- $C, r, \Theta^*, z^*$  - mit dem Rotor verbundenes, nichtrotierendes Zylinderkoordinatensystem.



**Bild 1**  
Modell des Rotors bei erregter Bewegung

Außerdem werden verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung der Bewegung der freien Fluidoberfläche definiert:  $q_n, S_n$  ( $n = 0, 1, 3, \dots$ ) - Amplituden der freien Fluidoberfläche im rotierenden Koordinatensystem entlang  $r = R_0$  in den Punkten mit den Koordinaten  $(R_0, 0, \frac{a}{2})$  und  $(R_0, \frac{\pi}{2}, \frac{a}{2})$  entsprechend. Die verallgemeinerten Koordinaten führen im Inertialsystem auf folgende Transformationsformeln

$$q_n^* = q_n e^{\pm i \omega t}; \quad S_n^* = S_n e^{\pm i \omega t}; \quad (13)$$

Im allgemeinen Fall lassen sich die Kraftwirkungen des Fluides auf den Rotor zu einer summarischen hydrodynamischen Kraft

$$\vec{F} = \iint_S P \vec{n} \, dS \quad (14)$$

und einem hydrodynamischen Moment (bezogen auf den Koordinatenursprung)

$$\vec{M} = \iint_S (\vec{r} \times P \vec{n}) \, dS \quad (15)$$

zusammenfassen. Dabei ist  $S$  – die benetzte Oberfläche,  $\vec{n}$  – der Einheitsvektor der äußeren Normalen zur Fluidoberfläche und  $\vec{r}$  – der Radiusvektor eines beliebigen Punktes der Fläche  $S$  mit dem Ursprung im Punkt  $C$ . Es kann festgestellt werden, daß die hydrodynamische Kraft Fluidwellen erzeugt, die sich in der Ebene orthogonal zur Rotorachse ausbreiten und das hydrostatische Moment zu Wellen in Rotorachsen-Längsrichtung führt.

Nachfolgend wird die erregte Bewegung des Rotors in der Ebene  $y0z$  analysiert, d. h., kleine Verschiebungen des Punktes  $C$  parallel zur  $y$ -Achse. Dabei läßt sich die hydrodynamische Kraft aus folgender Gleichung bestimmen

$$F_y = \iint_S P \cos(\widehat{\vec{n}, y}) dS, \quad (16)$$

wobei  $P$  der hydrodynamische Druck des Fluides auf die Oberfläche  $S$  bei der erregten Bewegung des Rotors

$$P = -\rho y \ddot{y} + p_0 \quad (17)$$

ist.

Die Lösung der Randwertaufgabe aus [2] wird in Gl. (17) und das Ergebnis in Gl. (16) eingesetzt

$$F_y = -m^* \ddot{y} - \lambda_0 \ddot{S}_0^* \quad (18)$$

mit

$$m^* = \rho \pi R^2 a \quad (19)$$

und

$$\lambda_0 = \frac{m^*}{\left(\frac{R}{R_0}\right)^2 - 1} \quad (20)$$

Analog erhält man den Ausdruck zur Ermittlung der hydrodynamischen Kraft bei Bewegungen des Rotors in der Ebene  $x0z$

$$F_x = -m^* \ddot{x} - \lambda_0 \ddot{q}_0^* \quad (21)$$

Weiterhin wird eine kleine Drehung des Rotors um die Achse  $x_1$  analysiert. In diesem Fall lautet das hydrodynamische Moment

$$M_{x_1} = \iint_S P [y \cos(\widehat{\vec{n}, z}) - z \cos(\widehat{\vec{n}, y})] dS \quad (22)$$

Der hydrodynamische Druck bei der erregten Rotorbewegung läßt sich wie folgt darstellen

$$P = -\rho \Psi_1 \ddot{\beta} + p_n \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (23)$$

Die Funktion  $\Psi_1(r, \Theta^*, z^*)$  in Gl. (23) ist das Verschiebungspotential für die Fluidteilchen in der  $y0z$ -Ebene bei fehlender Wellenbildung an der freien Oberfläche. Sie muß damit der Gleichung

$$\nabla^2 \Psi_1(r, \Theta^*, \tilde{z}^*) = 0 \quad (24)$$

genügen, wobei die Abkürzung

$$\tilde{z}^* = z^* \sqrt{\frac{\Omega_n^2}{\Omega_n^2 - 4\omega^2}}$$

zu setzen ist. Die Randbedingungen für die Funktion  $\Psi_1$  lassen sich durch Betrachtung des vektoriellen Verschiebungspotentials  $\vec{\Psi}$  mit  $\Psi_1$  als Komponente erhalten. Die Randbedingungen für das vektorielle Verschiebungspotential lauten entsprechend [3]

$$\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{n}} \Big|_S = \vec{R} \times \vec{n}, \quad \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial \vec{n}} \Big|_\Sigma = \vec{R}_0 \times \vec{n} \quad (25)$$

mit  $\Sigma$  als nichterregter freier Fluidoberfläche und  $\vec{R}, \vec{R}_0$  als Radiusvektoren für beliebige Punkte der Oberflächen  $S$  und  $\Sigma$  mit  $C$  als Ursprung. Unter Verwendung der Gl. (25) gilt

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{z^* = \pm a/2} = \pm r \sin \Theta^*, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{r=R} = z^* \sin \Theta^*, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{r=R_0} = z^* \sin \Theta^* \quad (26)$$

Die Lösung der Aufgabe (24), die den Randbedingungen (26) genügt, lautet

$$\vec{\Psi}_1 = a^2 \left\{ \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^3} [R_n(\vec{r}) - R_n^*(\vec{r})] \sin(n\pi z^*) + \bar{z} \vec{r} \right\} \sin \Theta^* \quad (27)$$

1. für  $\bar{\Omega}_n < 2$

$$R_n(\bar{r}) = \frac{\bar{\Omega}_n}{M_n \sqrt{4 - \bar{\Omega}_n^2}} [Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{r}) - L_n J_1(\bar{\kappa}_n \bar{r})]$$

$$R_n^*(\bar{r}) = \frac{\bar{\Omega}_n}{Q_n \sqrt{4 - \bar{\Omega}_n^2}} [Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{r}) - N_n J_1(\bar{\kappa}_n \bar{r})]$$

2. für  $\bar{\Omega}_n > 2$

$$R_n(\bar{r}) = \frac{\bar{\Omega}_n}{M'_n \sqrt{\bar{\Omega}_n^2 - 4}} [K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{r}) - L'_n I_1(\bar{\kappa}'_n \bar{r})]$$

$$R_n^*(\bar{r}) = \frac{\bar{\Omega}_n}{Q'_n \sqrt{\bar{\Omega}_n^2 - 4}} [K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{r}) - N'_n I_1(\bar{\kappa}'_n \bar{r})]$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet

$$L_n = \left[ \frac{Y_1'(\kappa_n r)}{J_1'(\kappa_n r)} \right]_{r=R}, \quad N_n = \left[ \frac{Y_1'(\kappa_n r)}{J_1'(\kappa_n r)} \right]_{r=R_0}$$

$$M_n = \frac{1}{\kappa_n} [L_n J_1'(\kappa_n r) - Y_1'(\kappa_n r)]_{r=R_0}$$

$$Q_n = \frac{1}{\kappa_n} [N_n J_1'(\kappa_n r) - Y_1'(\kappa_n r)]_{r=R}$$

$$L'_n = \left[ \frac{K_1'(\kappa'_n r)}{I_1'(\kappa'_n r)} \right]_{r=R}, \quad N'_n = \left[ \frac{K_1'(\kappa'_n r)}{I_1'(\kappa'_n r)} \right]_{r=R_0}$$

$$M'_n = \frac{1}{\kappa'_n} [L'_n I_1'(\kappa'_n r) - K_1'(\kappa'_n r)]_{r=R_0}$$

$$Q'_n = \frac{1}{\kappa'_n} [N'_n I_1'(\kappa'_n r) - K_1'(\kappa'_n r)]_{r=R}$$

$$\bar{z} = \frac{z^*}{a}, \quad \bar{r} = \frac{r}{a}$$

Außerdem bedeuten die Striche bei den Ausdrücken für die Besselfunktionen Differentiation nach der Koordinate  $r$ . Setzt man Gl. (27) und Gl. (8) in Gl. (23) ein und das Ergebnis in Gl.(22), erhält man nach Integration das hydrodynamische Moment

$$M_{x_1} = -J^* \ddot{\beta} - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_n \ddot{S}_n^* \quad (28)$$

1. für  $\bar{\Omega}_n < 2$

$$J^* = \rho \pi a^5 \left\{ \frac{\bar{R}^4 - \bar{R}_0^4}{4} - \frac{\bar{R}^2}{12} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\bar{\Omega}_n}{n^4 M_n Q_n \sqrt{4 - \bar{\Omega}_n^2}} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_n}{\sqrt{4 - \bar{\Omega}_n^2}} \times \right. \right.$$

$$\left. \left[ \bar{R}^2 P_n - R_0^2 S_n \right] - \frac{\bar{R}}{\pi n} [(M_n + Q_n) Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{R}) [(L_n Q_n + N_n M_n) J_1(\bar{\kappa}_n \bar{R})]] \right\} \quad (29)$$

mit

$$\lambda_n = \rho a^4 \left\{ \frac{2\bar{R}}{n^2 \pi} [A_n J_1(\bar{\kappa}_n \bar{R}) + B_n Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{R})] - \frac{\sqrt{4 - \bar{\Omega}_n^2}}{n \bar{\Omega}_n} \times \right.$$

$$\left. \left[ \bar{R}^2 [A_n J_2(\bar{\kappa}_n \bar{R}) + B_n Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{R})] - \bar{R}_0^2 [A_n J_2(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0) + B_n Y_1(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0)] \right] \right\} \quad (30)$$

2. für  $\bar{\Omega}_n > 2$

$$J^* = \rho\pi a^5 \left\{ \frac{\bar{R}^4 - \bar{R}_0^4}{4} - \frac{\bar{R}^2}{12} + \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\bar{\Omega}_n}{n^4 M'_n Q'_n \sqrt{\bar{\Omega}_n - 4}} \left\{ \frac{2\bar{\Omega}_n}{\sqrt{\bar{\Omega}_n - 4}} \times \right. \right. \\ \left. \left. [\bar{R}^2 P'_n - R_0^2 S'_n] - \frac{\bar{R}}{\pi n} [(M'_n + Q'_n) K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R})] [(L'_n Q'_n + N'_n M'_n) I_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R})] \right\} \right\} \quad (31)$$

mit

$$\lambda_n = \rho a^4 \left\{ -\frac{2\bar{R}}{n^2 \pi} [A'_n I_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R}) + B'_n K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R})] - \frac{\sqrt{\bar{\Omega}_n^2 - 4}}{n \bar{\Omega}_n} \times \right. \\ \left. \{ \bar{R}^2 [A'_n I_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R}) + B'_n K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R})] - \bar{R}_0^2 [A'_n I_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0) + B'_n K_1(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0)] \} \right\} \quad (32)$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen verwendet

$$P_n = (M_n + Q_n) Y_2(\bar{\kappa}_n \bar{R}) - (L_n Q_n + N_n M_n) J_2(\bar{\kappa}_n \bar{R})$$

$$S_n = (M_n + Q_n) Y_2(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0) - (L_n Q_n + N_n M_n) J_2(\bar{\kappa}_n \bar{R}_0)$$

$$P'_n = (M'_n + Q'_n) K_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R}) - (L'_n Q'_n + N'_n M'_n) I_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R})$$

$$P'_n = (M'_n + Q'_n) K_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0) - (L'_n Q'_n + N'_n M'_n) I_2(\bar{\kappa}'_n \bar{R}_0)$$

Analog läßt sich das hydrodynamische Moment bei Rotordrehungen um die Achse  $y_1$

$$M_{y_1} = -J^* \ddot{\alpha} - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_n \ddot{q}_n^* \quad (33)$$

ermitteln.

#### 4 Ableitung der Gleichungen für die erregte Rotorbewegung

Die Gleichungen der erregten Rotorbewegungen lassen sich auf der Grundlage der entsprechenden Lagrangeschen Gleichungen 2. Art ableiten. Dazu müssen zunächst die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie des Fluides erweitert werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Werte für die hydrodynamischen Koeffizienten der mitschwingenden Massen ( $m^*$ ) und Trägheitsmomente ( $J^*$ ), der Trägheitsbindungen ( $\lambda_0, \lambda_n$ ) sowie der Eigenfrequenzen der Fluidschwingungen ( $\Omega_0, \Omega_n$ ). Der Ausdruck für die kinetische Energie des Fluides kann auf folgende Weise geschrieben werden [4, 5]

$$T^* = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) m^* + \frac{1}{2} (\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) J^* + (\dot{x} \dot{S}_0^* + \dot{y} \dot{q}_0^*) \lambda_0 \\ + \dot{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{q}_n^* \lambda_n + \dot{\beta} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \dot{S}_n^* \lambda_n \\ + \frac{1}{2} [(\dot{S}_0^*)^2 + (\dot{q}_0^*)^2] \mu_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [(\dot{S}_n^*)^2 + (\dot{q}_n^*)^2] \mu_n + \frac{1}{2} I^* (\dot{\phi} + \dot{\alpha} \beta)^2 \quad (34)$$

mit

$$I^* = \frac{1}{2} \rho a^5 \pi (\bar{R}^4 - \bar{R}_0^4)$$

Neben den bereits vorher ermittelten Koeffizienten, die in Gl. (34) eingehen, müssen weiterhin die mitschwingende Massen  $\mu_0, \mu_n$  bestimmt werden. Zur Ermittlung der mitschwingenden Massen  $\mu_n$  wird aus der rechten Seite der Gl. (34) die kinetische Energie der freien Fluidschwingungen für die  $n$ te Schwingform in der Ebene  $yOz$  herausgenommen

$$T_{nx_1} = \frac{1}{2} \mu_n (\dot{S}_n^*)^2, \quad (n = 1, 3, \dots) \quad (35)$$

Andererseits läßt sich die kinetische Energie des in der  $y0z$ -Ebene schwingenden Fluides wie folgt angeben

$$T_{nx1} = \frac{1}{2} \rho \iiint_Q (u_n^2 + v_n^2 + w_n^2) e^{\pm i\omega t} dQ, \quad (36)$$

wobei  $Q$  das vom Fluid eingenommene Volumen und  $u_n, v_n, w_n$  die Geschwindigkeitskomponenten der Fluidteilchen entsprechend der Randwertaufgabe für kleine Fluidschwingungen sind. Letztere lassen sich wie folgt darstellen

$$u_n = \tilde{u}_n(r, \Theta, z) \dot{S}_n(t), \quad v_n = \tilde{v}_n(r, \Theta, z) \dot{S}_n(t), \quad w_n = \tilde{w}_n(r, \Theta, z) \dot{S}_n(t),$$

wobei  $\dot{S}_n = u_0 e^{-i\Omega_n t}$  und  $u_0$  durch Gl. (10) bestimmt werden.

Der Vergleich der Gln. (35) und (36) liefert eine Gleichung für die mitschwingende Masse

$$\mu_n = \rho \iiint_Q (\tilde{u}_n^2 + \tilde{v}_n^2 + \tilde{w}_n^2) dQ \quad (37)$$

In Analogie wird die mitschwingende Masse  $\mu_0$  für  $n = 0$  bestimmt

$$\mu_0 = \rho \iiint_Q (\tilde{u}_0^2 + \tilde{v}_0^2) dQ \quad (38)$$

Die vollständigen Ausdrücke für  $\mu_n$  und  $\mu_0$  werden aufgrund ihrer Größe hier nicht angeführt. Die potentielle Energie des schwingenden Fluides lautet

$$U^* = \frac{1}{2} [(S_0^*)^2 + (q_0^*)^2] \tilde{\Omega}_0^2 \mu_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} [(S_n^*)^2 + (q_n^*)^2] \tilde{\Omega}_n^2 \mu_n, \quad (39)$$

mit  $\tilde{\Omega}_0 = \Omega_0 \pm \omega$ ,  $\tilde{\Omega}_n = \Omega_n \pm \omega$ .

Betrachtet wird jetzt die Bewegung des Rotors, der auf einer elastischen Stütze mit gleicher vertikaler und horizontaler Steifigkeit  $c$ . Rotor und Welle werden dabei als starr angesehen. Die Wellenmasse ist in der Rotormasse enthalten. Die Gleichungen des Systems Rotor – Fluid lassen sich wie folgt ermitteln: die Ausdrücke für die kinetische und die potentielle Energie des Festkörpersystems werden zu den Ausdrücken für die Fluidenergie (34) und (39) addiert und nachfolgend in die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art eingesetzt. Dabei erhält man

$$m\ddot{x} + cx + \lambda_0 \dot{S}_0^* = 0, \quad \mu_0 (\dot{S}_0^* + \tilde{\Omega}_0^2 S_0^*) + \lambda_0 \ddot{x} = 0 \quad (40)$$

$$m\ddot{y} + cy + \lambda_0 \dot{q}_0^* = 0, \quad \mu_0 (\dot{q}_0^* + \tilde{\Omega}_0^2 q_0^*) + \lambda_0 \ddot{y} = 0 \quad (41)$$

$$J\ddot{\alpha} + I\omega\dot{\beta} + c\frac{l^2}{4}\alpha + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_n \dot{q}_n^* = 0, \quad J\ddot{\beta} - I\omega\dot{\alpha} + c\frac{l^2}{4}\beta + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \lambda_n \dot{S}_n^* = 0$$

$$\mu_n (\dot{q}_n^* + \tilde{\Omega}_n^2 q_n^*) + \lambda_n \ddot{\alpha} = 0, \quad \mu_n (\dot{S}_n^* + \tilde{\Omega}_n^2 S_n^*) + \lambda_n \ddot{\beta} = 0 \quad (42)$$

mit  $m = m^0 + m^*$ ,  $J = J^0 + J^*$ ,  $I = I^0 + I^*$ , wobei  $m^0, J^0, I^0$  Masse und Trägheitsmomente des Rotors darstellen.

## 5 Stabilitätsuntersuchung der Rotorbewegung

Zur Untersuchung der Stabilität des Systems Rotor – Fluid, welches durch die Gln. (40) – (42) beschrieben wird, kann man das Hurwitz-Kriterium einsetzen. Die charakteristische Gleichung für das System der Gln. (40) und (41) lautet

$$k^4 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\mu_0 m}\right) + k^2 (\tilde{\Omega}_0^2 + p) + p^2 \tilde{\Omega}_0^2 = 0 \quad (43)$$

mit  $p^2 = \frac{c}{m}$ . Die Stabilitätsbedingung des Systems führt auf

$$m > \frac{\lambda_0^2}{\mu_0}$$

Berücksichtigt man weiterhin, daß  $m = m^0 + m^*$  ist, erhält man

$$m > \frac{\lambda_0^2}{\mu_0} - m^* \quad (44)$$

Die Stabilitätsbedingung (44) enthält die Steifigkeit der Stützung nicht.

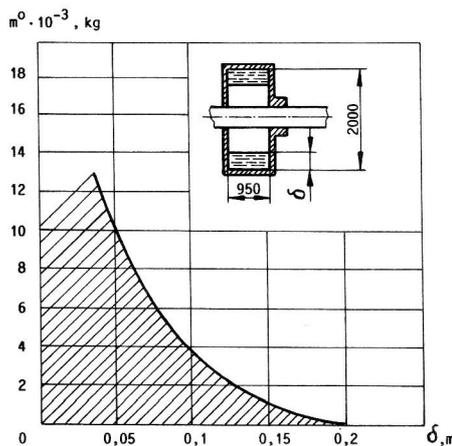
In analoger Weise wird das Stabilitätsgebiet der Lösung des Gleichungssystems (42) bestimmt, wobei nur die erste Eigenschwingungsform des Fluides ( $n = 1$ ) berücksichtigt wird.

$$2\left(\frac{cl^2}{4J} + \tilde{\Omega}_1^2\right)\left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 J}\right) + \frac{I^2}{J^2}\omega^2 > 0,$$

$$\left(\frac{cl^2}{4J} + \tilde{\Omega}_1^2\right) + 2\frac{cl^2}{4J}\tilde{\Omega}_1^2\left(1 - \frac{\lambda_1^2}{\mu_1 J}\right) + 2\frac{I^2}{J^2}\omega^2\tilde{\Omega}_1^2 > 0 \quad (45)$$

Auf der sicheren Seite ist an Stelle Gl.(45) die einfachere Bedingungen

$$J > \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} \text{ oder } J^0 > \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} - J^* \quad (46)$$



**Bild 2**

Instabilitätsgebiet für das Beispiel (Beschreibung im Text)

Auf Bild 2 ist Stabilitätsgrenze für einen Zentrifugenrotor des Typs OTH-2000 in Abhängigkeit von der Rotormasse  $m^0$  und der Dicke der Fluidschicht  $\delta$  dargestellt. Das Instabilitätsgebiet wurde schraffiert gezeichnet. Wie zu erkennen ist, können bei der Nennmasse des Rotors von 4720 kg niederfrequente Vibrationen entstehen. Die Ursache dafür sind Fluidschwingungen im Rotor in Ebenen orthogonal zur Drehachse bei einem Füllstandsniveau von  $\delta < 0.1$  m. Die Frequenz der Fluidschwingungen läßt sich entsprechend den in [2] angeführten Formeln berechnen. Die Schwingungsfrequenz der Konstruktion unterscheidet sich von der Eigenfrequenz des Fluids bezüglich des Rotors um den Wert der Winkelgeschwindigkeit.

Die Ungl. (46) wird für die analysierte Zentrifuge bei beliebigem Füllstandsniveau eingehalten. Daher treten Schwingungen in Ebenen längs der Drehachse nicht auf. Für das Beispiel wurde das einfachste Modell des mechanischen Systems gewählt. Das theoretische Konzept gestattet jedoch auch die Analyse komplizierterer Situationen. Dabei sind in den Bewegungsgleichungen für das System nur die Terme, die die Bewegung des Festkörperteils des Systems beschreiben, zu ändern. Die Stabilitätsanalyse für die erhaltenen Gleichungen kann man mit jeder bekannten Methode durchführen.

Abschließend sei angemerkt, daß bei der Berechnung der kritischen Drehgeschwindigkeiten für den Rotor, die ihre Ursache in Unwuchten haben, als Trägheitskennwerte die Masse, die die Summe aus Rotormasse und mitschwingender Fluidmasse entsprechend Gl. (19) darstellt, sowie die Trägheitsmomente, die die Summe der Trägheitsmomente des Rotors und des mitschwingenden Fluids entsprechend den Gln. (28) oder (31) repräsentieren, zu berücksichtigen sind. Zuvor sollten die Werte der Eigenfrequenzen aus den Gln. (11) und (12) ermittelt werden.

#### LITERATUR

- [1] Ishlinskij, A.Yu.; Temchenko, M.E.: Über kleine Schwingungen der Vertikalachse vollständig mit idealinkompressibler Flüssigkeit gefüllter Rotoren (russ.). – In: Zhurn. PMTF 1960, 3, 65 – 75.
- [2] Sun-Zao: Über Oberflächenwellen von Flüssigkeiten unter der Wirkung von Zentrifugalkräften (russ.). – In: Zhurn. PMTF 1960, 3, 90 – 96.

- [3] Mikishev, G.N.; Rabinovich, B.I.: Dynamik starrer Körper mit teilweise fluidgefüllten Hohlräumen (russ.). – Moskau: Mashinostroenie, 1968.
- [4] Mikishev, G.N.: Experimentelle Methoden in der Dynamik kosmischer Apparate (russ.). – Moskau: Mashinostroenie, 1978.
- [5] Goloskokov, E.G.; Filippov, A.P.: Nichtstationäre Schwingungen mechanischer Systeme (russ.). – Kiev: Naukova Dumka, 1966.
- [6] Bogomolov, S.; Korsunskij, S.; Fischer, U.: Kritische Drehgeschwindigkeiten elastisch gestützter Rotoren, die teilweise mit Flüssigkeit gefüllt sind. – In: Technische Mechanik 6(1985)4, 5 – 13.

**Anschrift der Verfasser:**

Prof. Dr. S. Bogomolov und Dr. S. Korsunskij, Lehrstuhl für Dynamik und Festigkeit von Maschinen, Polytechnisches Institut Charkow, ul. Frunze 21, Charkow, Ukraine