TECHNISCHE MECHANIK 13(1992) Heft 1
Manuskripteingang: 08.1.1992

Eine prinzipielle Bemerkung zum Drallsatz

I.Sályi

Das untenstehende hat den Zweck, an eine Form des Drallsatzes zu erinnern, die praktisch immer im Hintergrund bleibt, obwohl ihre Kenntnis ein vollständigeres Bild über die Bewegungsgleichungen der mechanischen Systeme liefert.

1 Der Drall und seine Ableitungen

1.1 Die Definition des Dralles ist allgemein bekannt: Der Drall $\underline{D}$ eines mechanischen Systems, bezogen auf den allgemeinen Punkt A des Bezugssystems, ist das Moment des Impulsvektorsystems auf den Punkt A. Diese Größe hängt vom Ortsvektor $\underline{s}$ des gewählten Punktes A und vom Zeitpunkt t gleicherweise ab:

$$\underline{D} = \underline{D}(\underline{s}, t). \tag{1}$$

Man darf annehmen, daß sie nach beiden Argumenten mindestens einmal stetig differenzierbar ist, und dementsprechend existieren die partiellen Ableitungen

$$\partial \underline{D} / \partial \underline{s} = \underline{D}'(\underline{s}, t) = \underline{D}.\nabla \tag{2}$$

$$\partial \underline{D} / \partial \underline{t} = \dot{\underline{D}}'(\underline{s}, t) \tag{3}$$

in jedem Punkt des Bezugssystems und in jedem Augenblick der Zeit.

$\underline{D}$ und $\dot{\underline{D}}$ sind zeitlich veränderliche Vektorfelder, $\underline{D}'$ ist ein Tensorfeld.

1.2 In den üblichen mechanischen Rechnungen kommt der Feldcharakter des Dralles nicht zum Ausdruck, denn die dem Drallsatz entsprechende Gleichung wird immer auf einen bestimmten Punkt P mit vorgeschriebenem Ortsvektor $\underline{s} = \underline{s}$ (t) bezogen. Im Falle $\underline{s}$ = konst. ist dieser Punkt im Bezugssystem fest, in allen anderen Fällen bewegt er sich auf einer vorgeschriebenen Bahn mit vorgeschriebener Weg-Zeit-Funktion. Dadurch wird der Drall $\underline{D}$ samt seiner partiellen Ableitung $\underline{D}$ samt seiner partiellen Ableitung $\dot{\underline{D}}$ eine allein von der Zeit abhängige Funktion, wobei der Feldfunktionscharakter verloren geht.

Es liegt auf der Hand, die totale Ableitung nach der Zeit zu bilden. Mit $\underline{w} = d s / d t$ gilt:

$$\overset{*}{\underline{D}} = d \underline{D} / d t = \underline{D}' . w + \dot{\underline{D}} = \overset{*}{\underline{D}}(t). \tag{4}$$

Die beiden zeitlichen Ableitungen sind nur dann identisch, wenn $\underline{D}' . \underline{w}$ verschwindet, also nur dann, wenn

1. $\underline{w} = \underline{O}$ ist, d. h., der Punkt P keine Geschwindigkeit hat,
2. der Tensor $\underline{D}'$ entartet ist und den Vektor $\underline{w} \neq \underline{O}$ auf den Vektor $\underline{O}$ abbildet.

Zu diesem Falle muß über $\underline{D}'$ noch folgendes gesagt werden: Ist in einem Punkt mit dem Ortsvektor $\underline{s}$ der Wert des Dralles $\underline{D}$, dann ist er in einem benachbarten Punkt, mit $\underline{s} + \Delta \underline{s}$ gleich $\underline{D} + \underline{I} \times \Delta \underline{s}$, wo $\underline{I}$ der Impuls des mechanischen Systems ist. Folglich ist

$$\Delta \underline{D} = \underline{I} \times \Delta \underline{s} \tag{5}$$

und

$$\Delta \underline{D} . \underline{w} = (\underline{I} \times \Delta \underline{s}) . \underline{w} = (\underline{w} \times \underline{I}) . \Delta \underline{s} . \tag{6}$$

Da aber in diesem Fall das Bewegungsgesetz des Punktes P auf einer vorgeschriebenen Bahn festgelegt ist, hängt $\underline{w}$ nur von der Zeit ab, und $\underline{I}$ ist sowieso von $\underline{s}$ unabhängig. Darum erhalten wir:

$$(\underline{D} . \underline{w})' = \underline{D}' . \underline{w} = \underline{w} \times \underline{I} . \tag{7}$$

Dieser Ausdruck verschwindet nur, wenn $\underline{w}$ parallel zu $\underline{I}$ ist. Diese Bedingung ist z. B. für den Schwerpunkt S immer erfüllt. Das heißt, daß die partielle Ableitung $\dot{\underline{D}}$ und die totale zeitliche Ableitung $\overset{*}{\underline{D}}$ bezüglich des Schwerpunktes untereinander gleich sind:

$$\overset{*}{\underline{D}}_S = \dot{\underline{D}}_S . \tag{8}$$

2 Massenpunktsystem

2.1 Ein Massenpunktsystem soll aus n Massenpunkten bestehen mit ($i = 1, . . . n$)

m_i	Massen,
$\underline{r}_i = \underline{r}_i(t)$	Ortsvektoren,
$\underline{v}_i = \underline{v}_i(t) = \dot{\underline{r}}_i(t)$	Geschwindigkeiten
$\underline{a}_i = \underline{a}_i(t) = \dot{\underline{v}}_i(t)$	und Beschleunigungen.

Der Impuls dieses Systems ist bekannterweise

$$\underline{I} = \sum \underline{I}_i = \sum \underline{m_i} \underline{v}_i = \underline{I}(t) , \tag{9}$$

und der Drall desselben, bezogen auf einen beliebigen festen Punkt A des Raumes mit dem Ortsvektor $\underline{s}$ kann in die Form gebracht werden.

$$\underline{D} = \sum (\underline{r}_i - \underline{s}) \times \underline{I}_i = \sum (\underline{r}_i - \underline{s}) \times \underline{m_i} \underline{v}_i = \underline{D}(\underline{s}, t) \tag{10}$$

Hier soll der Impulsvektor $\underline{I}_i$ als ein zum i-ten Massenpunkt wirkender Vektor betrachtet werden.
Die zeitlichen (partiellen) Ableitungen von (9) und (10) sind:

$$\dot{\underline{I}} = \sum m_i \underline{a}_i , \tag{11}$$

$$\dot{\underline{D}} = \sum (\underline{r}_i - \underline{s}) \times m_i a_i = \dot{\underline{D}}(\underline{s}, t) . \tag{12}$$

Die Gleichung (12) bleibt auch dann gültig, wenn für den Drall ein im Raum beweglicher Bezugspunkt P mit $\underline{s} = \underline{s}(t)$ gewählt wird. (Die Differentiation von $\underline{D}$ erstreckt sich dabei nicht auf $\underline{r}_j - \underline{s}$, weil nach der obigen Definition der partiellen Ableitung $\dot{\underline{s}} = \underline{O}$ ist und außerdem $\dot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}}_i = O$ ist).

2.2 Im Sinne des 2. Newtonschen Satzes ist $m_i \underline{a}_i = \underline{F}_i$, wo $\underline{F}_i$ die Summe der am i-ten Massenpunkt angreifenden Kräfte ist. Damit können wir die Gleichungen (11) und (12) in folgender Form schreiben:

$$\dot{\underline{I}} = \sum \underline{F}_i = \underline{F}(t) \qquad (13)$$

$$\dot{\underline{D}} = \sum (\underline{r}_i - \underline{s}) \times \underline{F}_i = \underline{M}(\underline{s}, t) \; . \qquad (14)$$

Diese Ergebnisse (die wir – mit Rücksicht auf die in der Mechanik allgemein üblichen Methoden, mit derer Hilfe die bei den Massenpunktsystemen erzielten Ergebnisse auf Kontinua übertragbar sind – allgemeiner formulieren dürfen) unterscheiden sich teilweise von den allgemein üblichen. Die Deutung der Gleichungen (13) und (14) enthält nämlich eine schöne und vollständige Symmetrie:

Die zeitliche (partielle) Ableitung

- des Impulses ist gleich der Summe der am mechanischen System wirkenden Kräfte,
- des Impulsmomentenfeldes ist gleich dem Momentenfeld der am mechanischen System wirkenden Kräfte.

Diese Sätze sind allgemein gültig, ohne daß $\underline{s}$ irgendwelchen Bedingungen unterworfen wäre. Die Funktion $\underline{s} = \underline{s}(t)$ kann in (14) ohne Begrenzung berücksichtigt werden. (14) ist eine allgemeine Form des Drallsatzes.

Nach (14) ist das folgende Vorgehen möglich: zuerst soll das Drallfeld, und nachher dessen zeitliche (partielle) Ableitung gebildet werden. (Siehe das Beispiel unten).

2.3 Es ist üblich, für $\underline{\mathrm{I}}_i$ die Bezeichnung „i-ter kinetischer Vektor" zu gebrauchen. So können wir auch über ein (gebundenes) kinetisches Vektorsystem sprechen. Aus den obigen folgt auch der bekannte Satz, daß

das kinetische Vektorsystem und das Kräftesystem mechanischen Systems einander gleichwertig sind.

(Diese Aussage kann natürlich auch ohne den Begriff des Dralles bewiesen werden.) Will man im Sinne dieses Satzes vorgehen, dann muß zuerst die zeitliche Ableitung der Impulsvektoren, dann derer Momentenfeld gebildet werden.

Es sind beide Wege gangbar und gleichwertig.

3 Beispiel zur Anwendung des Drallsatzes

Dieses Beispiel soll den Gedankengang darstellen, den der Drallsatz verlangt. Zur Lösung der vorgestellten einfachen Aufgabe gibt es bekannterweise auch andere Möglichkeiten.

Die Gelenkmittelpunkte A und B (Bild 1) der massebehafteten Stange 2 von der Länge $1 = 2R$ können sich entlang der x- bzw. y-Achse bewegen. Der Schwerpunkt S fällt nicht in den geometrischen Mittelpunkt K. Die Entfernung beider Punkte voneinander ist R_O. Die Masse ist m, das Hauptträgheitsmoment – gerechnet zu der, durch den Schwerpunkt senkrecht zur Bildebene gelegten Hauptträgheitsachse – sei J.

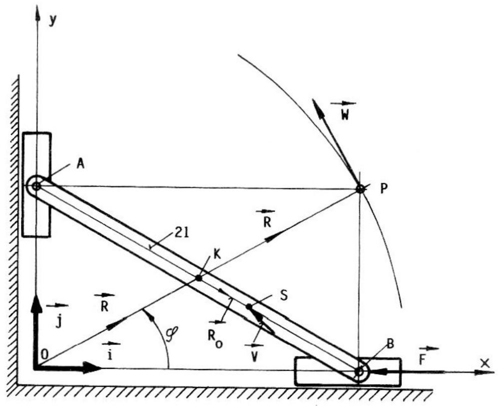

Bild 1

In Anbetracht der Aufgabe können die Massen der translatorisch bewegten Körper 1 und 3 in den Punkten A und B konzentriert und als Massen der Stange angesehen werden, deren Wirkung in den Größen m und J schon berücksichtigt wurde.

Die Schwerkraft und alle Widerstände werden gegenüber der Kraft $\underline{F}$ vernachlässigt.

Die dem Drallsatz entsprechende Gleichung wollen wir auf den Punkt P als Momentanpol mit der Polgeschwindigkeit $\underline{w} = \dot{\varphi}\, \underline{k} \times \underline{r}_{OP}$ beziehen, wo $\underline{k}$ der Einheitsvektor der z-Achse ist. $\underline{w}$ ist offensichtlich nicht parallel zur Schwerpunktgeschwindigkeit $\underline{v}$.

Der Drall ist:

$$\underline{D}_P = \underline{D}_s + m\underline{v} \times (\underline{R} - \underline{R}_O) \qquad (15)$$

mit

$$\underline{D}_s = J \dot{\varphi} \underline{k} \, . \qquad (16)$$

Im Sinne des oben gesagten ist $\dot{\underline{D}}_s = \overset{*}{\underline{D}}_s$, und darf $(\underline{R} - \underline{R}_s)$, als Arm des Impulsvektors der partiellen Differentiation nicht unterworfen werden. So erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$J \ddot{\varphi}\, \underline{k} + m\dot{\underline{v}} \times (\underline{R} - \underline{R}_O) = \underline{F} \times \underline{r}_{BP}. \qquad (17)$$

Wird φ zur verallgemeinerten Koordinate gewählt und werden alle veränderlichen Größen in (17) durch φ, $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ ausgedrückt, dann erhalten wir eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für φ.

Achtet man darauf, daß $(\underline{R} - \underline{R}_O)$ nicht differenziert wird, dann kann man φ und seine Ableitungen schon im Ausdruck von $\underline{D}_P$ in Gleichung (15) einführen.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. István Sályi
egyetem város
Miskols, Ungarn