

# Turbulente Blasenströmung im Krümmer

Ingo Kosmowski, Hikmat Al-Ahmad, Walter Lilienblum

*Blasenströmungen sind, bedingt durch Effekte im Nachlauf der Blasen, stets turbulent, womit in diesem Fall die zwischen den Phasen- und Geschwindigkeitsverteilungen bestehenden Zusammenhänge eine besondere Bedeutung haben. Ausgehend von umfangreichen experimentellen Arbeiten zum Verhalten von Blasenströmungen werden Möglichkeiten ihrer mathematischen Modellierung aufgezeigt. In Anwendung auf Krümmern werden in die Betrachtungen die Wirkungen von Sekundärströmungen einbezogen.*

## The turbulent bubbly flow within an elbow

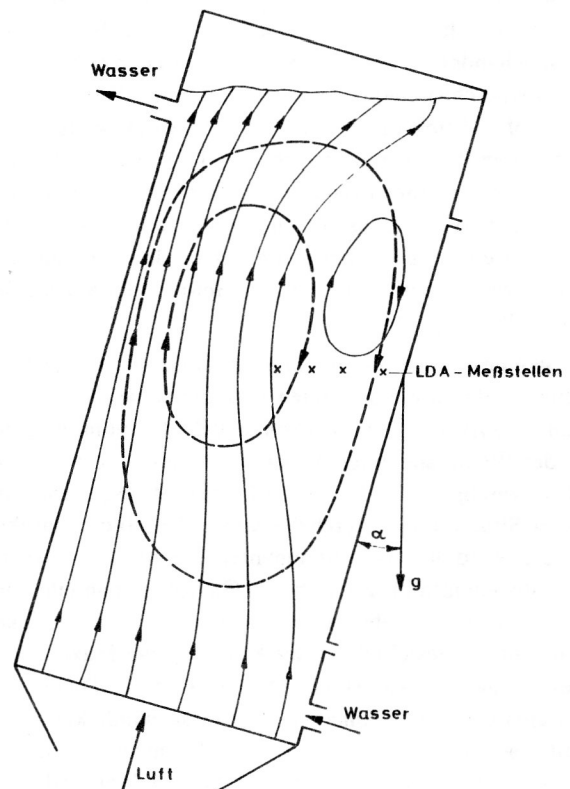
*Bubbly flows are, qualified by effects behind the bubbles, always turbulent with which the relationships between the phase and the velocity distribution are especially significant. Starting from extensive experiments with regard to the behaviour of bubbly flows possibilities of their mathematical modelling are shown. In application to flows within elbows effects of the secondary flow are included into the considerations.*

### 1. Problemstellung

Blasenströmungen sind gasbeladene Flüssigkeitsströmungen, bei denen sich in einer flüssigen Dispersionsphase disperse Gasblasen befinden. Die Spezifik dieser Strömungen im Vergleich zu den feststoffbeladenen Flüssigkeitsströmungen besteht in der Veränderlichkeit der Phasengrenzflächen und in dem besonders großen Dichteunterschied zwischen den Phasen. Daraus resultieren innerhalb des mechanischen Systems ablaufende kinematische Vorgänge, die sich in dem kinematischen Ungleichgewicht der Phasen auswirken. Sie charakterisieren die heterogene Strömung und sind bei Blasenströmungen besonders ausgeprägt.

Diese Vorgänge lassen sich, wie im Bild 1 dargestellt ist, anschaulich anhand eines mit Wasser gefüllten Kanals demonstrieren, der sich weitgehend beliebig in seiner Neigung einstellen läßt. Der Strömungskanal weist Rechteckquerschnitt auf und ist oben geöffnet, womit die von unten über ein Dispergierraster zugeführte Luft aus dem Kanal wieder ungehindert entweichen kann. Der Versuchsstand kann wahlweise mit oder ohne Zu- und Abführung von Wasser betrieben werden. In der Ausgangsposition befindet sich der Kanal in vertikaler Lage ( $\alpha = 0^\circ$ ).

Der Gasvolumenanteil in dem Kanal kann bei konstanter Flüssigkeitsfüllung durch Veränderung der Luftzuführung variiert werden. Dabei gelingt es, mit Hilfe des Dispergierrasters Blasen zu erzeugen, die in etwa eine sphärische Form mit einem Durchmesser in der Größenordnung von 1...5 mm aufweisen. Sie sind bei geringen Gasvolumenanteilen gut sichtbar. Ihre Geschwindigkeit läßt sich durch Auswertung der Verweilzeiten beim Passieren von Laserstrahlen ermitteln. Jeder Blasendurchgang durch den senkrecht zur Strömung gerichteten Laserstrahl ergibt ein Signal bestimmter Länge, was einer Zeitdauer entspricht. In Ergänzung zu den Kenntnissen über das Verhalten der dispersen Phase sind auch Informationen über die Dispersionsphase erforderlich. Hierzu empfiehlt es sich, durch die elektrolytische Bildung von Wasserstoff kleine Bläschen zu erzeugen, die sich aufgrund ihrer geringen Masse schlupfrei der Bewegung der flüssigen Phase anpassen. Damit lie-



**Bild 1**  
Kanal zur Untersuchung von Blasenströmungen mit aufwärts gerichteter Vertikalkomponente der Hauptströmungsgeschwindigkeit

gen die erforderlichen Streuteilchen vor, um die Doppler-Frequenzen zu erhalten, die für eine Messung der Flüssigkeitsgeschwindigkeit mit Hilfe der Laser-Doppler-Anemometrie (LDA) notwendig sind [3].

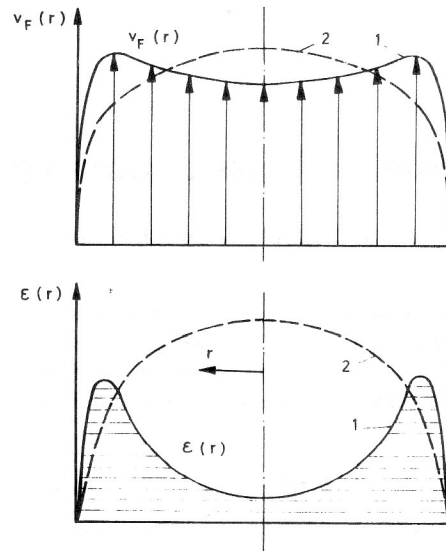
Wird der Kanal gegenüber der Ausgangsstellung um einen kleinen Winkel geneigt, so wirkt aufgrund der senkrecht zur Kanalachse gerichteten Komponente der Gewichtskraft eine Querkraft auf die Strömung. Wie die ausgezogenen Linien (Stromlinien der gasförmigen Phase) im Bild 1

zeigen, erfahren dadurch die Gasblasen eine einseitige Ausrichtung. Selbst bei fehlendem Flüssigkeitsdurchfluß ist, wie die gestrichelten Linien (Stromlinien der flüssigen Phase) verdeutlichen, festzustellen, daß die Flüssigkeit dabei eine Zirkulation erfährt. Die Kenntnis dieses Experimentes besteht darin, daß nicht nur von der Dispersionsphase auf die disperse Phase Wirkungen ausgehen, sondern auch umgekehrt. Es unterstreicht die grundlegende Bedeutung der zwischen den Phasen bestehenden Wechselwirkungen, durch die alle heterogenen Strömungen, und darunter im besonderen die Blasenströmungen, gekennzeichnet sind.

Der durchströmte Kanal und seine Ausmessung in bezug auf die Verteilung der Phasen, was z. B. mit Hilfe der Methode der Kernstrahlungsabsorption möglich ist, führt auf eine weitere Besonderheit heterogener Strömungen. Es bestehen teilweise größere Unterschiede zwischen dem örtlichen Gasvolumenanteil und den verschiedenen Mittelwerten. Wird ein mittlerer Gasvolumenanteil angegeben, so ist es erforderlich, deutlich zu machen, ob sich der Mittelwert auf das Volumen des gesamten Kanals oder eine Ebene bezieht und um welche Ebene innerhalb des Kanals es sich handelt. In gleicher Weise ist zwischen der örtlichen Relativgeschwindigkeit der Phasen und dem mittleren Schlupf (Mittelwert der Relativgeschwindigkeiten) zwischen den Phasen zu unterscheiden [11]. Wie diesbezügliche Untersuchungen zeigen, ist es wichtig, die Phasenverteilungen stets im Zusammenhang mit den Geschwindigkeitsverteilungen zu betrachten. Um diese Zusammenhänge zu verdeutlichen, wird als Beispiel der vertikal gestellte Kanal gewählt.

Liegt eine geringe Gasbeladung der Strömung vor (gekennzeichnet durch einen kleinen Gasvolumenanteil mit kleinen Blasen), so ist festzustellen, daß der Gasvolumenanteil in der Wandnähe einen Maximalwert erreicht, wobei die Geschwindigkeit der flüssigen Phase recht ausgeglichen ist. Diese Situation wird durch die Kurven 1 in Bild 2 charakterisiert. Wird der Gasvolumenanteil erhöht, so ändert sich das Strömungsbild. Bei höheren Gasvolumenanteilen und größeren Blasen, aber auch bei kleinen Geschwindigkeiten, tritt, dargestellt durch die Kurven 2, der Maximalwert des Gasanteils (was einem Minimalwert der Dichte entspricht) und der Maximalwert der Geschwindigkeit in der Mitte auf. Diese Angaben zu den Geschwindigkeits- und Dichteverteilungen lassen sich für die einzelnen Bedingungen relativ treffsicher angeben [5], [9], [12].

Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang eine weitere Beobachtung. Zwischen der gasförmigen und der flüssigen Phase tritt stets eine Relativgeschwindigkeit auf. Es trifft selbst für sehr kleine Gasvolumenanteile, wobei sich nur einzelne Blasen in der flüssigen Phase bewegen, zu. Hierbei läßt sich innerhalb bestimmter Grenzen unabhängig vom Gasanteil ein örtlicher Schlupf  $v_{GF} = v_G - v_F \approx 0,25 \text{ m/s}$  ermitteln [3]. Ein kleiner örtlicher Schlupf bedeutet jedoch nicht, daß auch der über eine bestimmte Durchströmfläche gemittelte Schlupf in jedem Fall klein ist. Im Extremfall kann sich auch bei einem verschwindend kleinen örtlichen Schlupf ein beträchtlicher mittlerer Schlupf ausbilden. Diese Erscheinung ist als Bankoff-Effekt bekannt [1]. Sie bringt zum Ausdruck, daß ein mittlerer



**Bild 2**

**Qualitative Darstellungen der Geschwindigkeits- und Phasenverteilungen in der aufwärts gerichteten vertikalen Kanalströmung (Kurven 1 bei kleinem Gasvolumenanteil und kleinen Blasen, Kurven 2 bei höheren Gasvolumenanteilen mit größeren Blasen)**

Schlupf auch durch das Wechselspiel von Phasenverteilung und Geschwindigkeitsverteilung entstehen kann. Demzufolge setzt sich der mittlere Schlupf aus zwei Anteilen zusammen, die sich zum einen aus den örtlichen Werten und zum anderen aus den profilbedingten Wechselwirkungen ergeben.

Bei der Betrachtung gasbeladener Flüssigkeitsströmungen ist aber nicht nur die Existenz von Geschwindigkeits- und Phasenverteilungen und ihre gegenseitige Beeinflussung zu beachten. Es ist auch, insbesondere bei Blasenströmungen, die Turbulenz zu berücksichtigen [11].

Bei homogenen Strömungen tritt Turbulenz erst bei Überschreitung eines Stabilitätskriteriums, wie z. B. der Reynolds-Zahl, auf. Blasenströmungen sind dagegen bedingt durch den örtlichen Schlupf zwischen flüssiger und gasförmiger Phase stets turbulent. Selbst bei ruhendem Wasser tritt eine Relativbewegung der Blasen auf, wobei im Nachlauf starke Geschwindigkeitsgradienten erzeugt werden. Nachfolgende Blasen erfahren eine zusätzliche Pendelbewegung. Dadurch ist es erklärlich, daß in der Flüssigkeit eine Turbulenz auftritt, was in den Blasen nicht unbedingt der Fall zu sein braucht.

Aufgrund der Vorgänge im Nachlauf der Blasen ist bei Blasenströmungen in der Regel der Turbulenzgrad höher als bei homogenen Flüssigkeitsströmungen, obwohl in gewissen Fällen auch von einer Dämpfung der Schwingungsbewegung durch die Gasphase gesprochen werden kann.

Um die Zusammenhänge zwischen der Phasenverteilung und der Turbulenz näher zu beschreiben, lassen sich wiederum die am geneigten Kanal durchgeführten Strömungsuntersuchungen nutzen. Anhand des Bildes 1 ist bereits festgestellt worden, daß kleine senkrecht zur Bewegung wirkende Kraftkomponenten ausreichen, um Verschiebungen in der Phasenverteilung zu erzielen. Hierzu bestehen jedoch durch den turbulenten Massenaustausch entge-

gengesetzte Wirkungen [2]. Diese Austauschvorgänge lassen sich durch die Gleichung

$$v_{FG} \epsilon \sin \alpha = \sqrt{v_y'^2} l_m \frac{\partial \epsilon(x,y)}{\partial y} \quad (1)$$

beschreiben, wobei sich bei dem gewählten Nullparametermodell für den Mischungsweg, wie bei Einphasenströmungen,  $l_m = 0,41 y$  setzen läßt. Damit ist ein Zusammenhang zwischen den charakteristischen Parametern einer heterogenen Strömung (wie  $v_{FG}$ ,  $\epsilon$ ) und einer turbulenten Strömung (wie  $v_y'$ ) hergestellt.

Werden in einer weitergehenden Betrachtung der Strömung Richtungsänderungen zugelassen, so muß auch die Möglichkeit des Auftretens von Sekundär- und Rezirkulationsströmungen einbezogen werden. In diesem Zusammenhang sind insbesondere die Auswirkungen auf die Phasenverteilung zu beachten, was sich in einem veränderten Ablöseverhalten der Strömung und in Entmischungerscheinungen äußern kann.

Die hier nur kurz zusammengefaßten Beobachtungen zum Verhalten heterogener Strömungen lassen erkennen, daß im Vergleich zu den homogenen Strömungen eine Reihe unterschiedlicher physikalischer Vorgänge zu beachten sind. Deshalb erfordert die mathematische Modellierung heterogener Strömungen eine stärker differenzierte Betrachtung.

## 2. Grundgleichungen der Blasenströmung mit Richtungsänderung

Zur mathematischen Modellierung einer Blasenströmung mit Richtungsänderung wird von den Bilanzgleichungen für heterogene Strömungen ausgegangen.

Da bei einer gasbeladenen Flüssigkeitsströmung wie bei einer homogenen Flüssigkeitsströmung vorausgesetzt werden kann, daß die Zustandsänderung adiabat verläuft, ist es vertretbar, in erster Näherung auf die Energiegleichung zu verzichten [10]. Unter den in der Kontinuumsmechanik üblichen Voraussetzungen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit folgt mit den Volumenanteilen  $\epsilon$  der Phasen  $i = 1, \dots, k$  das aus den Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen und zugehörigen Gleichungen bestehende Gleichungssystem

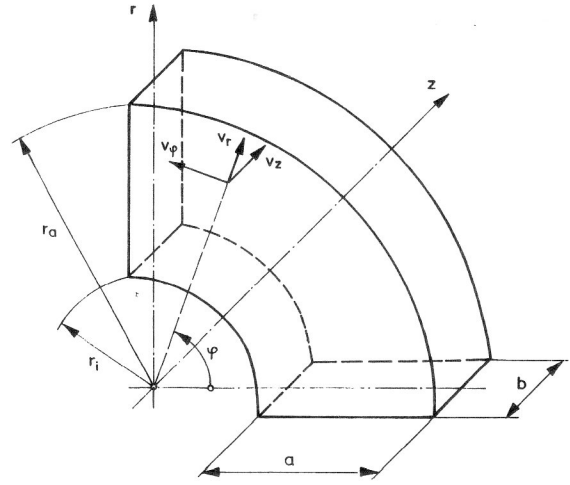
$$\frac{d_i \epsilon_i \rho_i}{dt} + \epsilon_i \rho_i \nabla \cdot \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^k \dot{Q}_{ji} \quad (2)$$

$$\epsilon_i \rho_i \frac{d_i \mathbf{v}_i}{dt} = \nabla^n (\epsilon_i \sigma_i) + \epsilon_i \rho_i \mathbf{g}_i + \sum_{j=1}^k [\mathbf{f}_{ji} - \rho_{ji} \cdot \mathbf{v}_i] \quad (3)$$

$$\left[ \frac{d_i}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \right] \quad (4)$$

$$\sum_{i=1}^k \epsilon_i = 1 \quad (5)$$

Für die Berechnungen wird ein rechteckiger Kanal zugrunde gelegt, der eine stetige Umlenkung erfährt. In diesem Fall erweist es sich als zweckmäßig, die Strömung, wie



**Bild 3**

Anordnung der Zylinderkoordinaten und zugeordnete Lage der Geschwindigkeitskomponenten in der untersuchten Krümmungsströmung

im Bild 3 dargestellt, im Zylinderkoordinatensystem zu betrachten.

Wird angenommen, daß zwischen den Phasen kein Massenaustausch erfolgt, d. h. die Massenstromdichte  $\dot{Q}_{GF} = 0$  ist, so läßt sich für die flüssige Dispersionsphase F mit dem Volumenanteil  $\epsilon_F = 1 - \epsilon$  die Bewegungsgleichung in Spannungen, bezogen auf die Zylinderkoordinaten  $r, \varphi, z$  in Form der Komponentengleichungen

$$(1 - \epsilon) \rho_F \left[ \frac{\partial v_{Fr}}{\partial t} + v_{Fr} \frac{\partial v_{Fr}}{\partial r} + \frac{v_{F\varphi}}{r} \frac{\partial v_{Fr}}{\partial \varphi} + v_{Fz} \frac{\partial v_{Fr}}{\partial z} - \frac{v_{F\varphi}^2}{r} \right] = - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial(1 - \epsilon) p_F}{\partial r} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{Frr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{F\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{Fzr}}{\partial z} + (1 - \epsilon) \frac{\tau_{Frr} - \tau_{F\varphi\varphi}}{r} + f_{GFr} \quad (6a)$$

$$(1 - \epsilon) \rho_F \left[ \frac{\partial v_{F\varphi}}{\partial t} + v_{Fr} \frac{\partial v_{F\varphi}}{\partial r} + \frac{v_{F\varphi}}{r} \frac{\partial v_{F\varphi}}{\partial \varphi} + v_{Fz} \frac{\partial v_{F\varphi}}{\partial z} + \frac{v_{Fr} v_{F\varphi}}{r} \right] = - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial(1 - \epsilon) p_F}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{F\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{F\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{F\varphi z}}{\partial z} + (1 - \epsilon) \frac{2 \tau_{F\varphi r}}{r} + f_{GF\varphi} \quad (6b)$$

$$(1 - \epsilon) \rho_F \left[ \frac{\partial v_{Fz}}{\partial t} + v_{Fr} \frac{\partial v_{Fz}}{\partial r} + \frac{v_{F\varphi}}{r} \frac{\partial v_{Fz}}{\partial \varphi} + v_{Fz} \frac{\partial v_{Fz}}{\partial z} \right] = - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial(1 - \epsilon) p_F}{\partial z} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{Fzr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{F\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(1 - \epsilon) \tau_{Fzz}}{\partial z} + (1 - \epsilon) \frac{\tau_{Fzr}}{r} + f_{GFz} \quad (6c)$$

angeben.

Die zur flüssigen Dispersionsphase zugehörige Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial(1-\varepsilon)\rho_F}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(1-\varepsilon)\rho_F r v_{Fr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(1-\varepsilon)\rho_F r v_{F\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial(1-\varepsilon)\rho_F v_{Fz}}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Für das Gas lassen sich einige Vernachlässigungen formulieren. Während die Spannungen  $\sigma_i$  und die Dichten der Wechselwirkungskräfte  $f_{ji}$  bei der gasförmigen Phase von gleicher Größenordnung wie bei der flüssigen Phase sind, erweisen sich beim Gas die Trägheitskräfte und das Kraftpotential  $U$  als so unbedeutend, daß man sie vernachlässigen kann.

Entsprechend dem gewählten Koordinatensystem ergibt sich für die disperse Gasphase G mit dem Volumenanteil  $\varepsilon_G = \varepsilon$  als Bewegungsgleichung in Spannungen

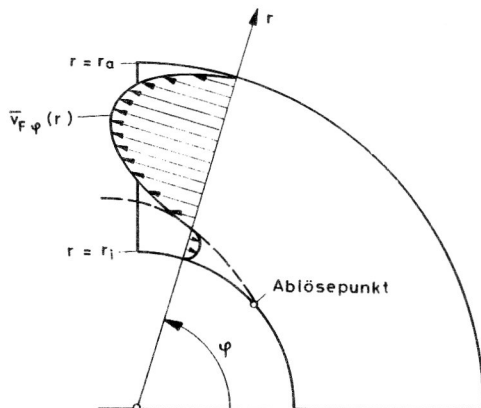
$$0 = - \frac{\partial \varepsilon p_G}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{Gr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \tau_{G\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{Gz}}{\partial z} + \frac{\varepsilon \tau_{Gr} - \varepsilon \tau_{G\varphi\varphi}}{r} - f_{GFr}, \quad (8a)$$

$$0 = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon p_G}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{G\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \tau_{G\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{G\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\varepsilon \tau_{G\varphi}}{r} - f_{GF\varphi}, \quad (8b)$$

$$0 = - \frac{\partial \varepsilon p_G}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{Gz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon \tau_{G\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \varepsilon \tau_{Gzz}}{\partial z} + \frac{\varepsilon \tau_{Gz}}{r} - f_{GFz}. \quad (8c)$$

Als Kontinuitätsgleichung gilt

$$\frac{\partial[\varepsilon \rho_G]}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial[\varepsilon \rho_G r v_{Fr}]}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial[\varepsilon \rho_G r v_{F\varphi}]}{\partial \varphi} + \frac{\partial[\varepsilon \rho_G v_{Fz}]}{\partial z} = 0. \quad (9)$$



**Bild 4**  
Geschwindigkeitsprofil einer Krümmungsströmung mit Rezirkulationsgebiet  
54

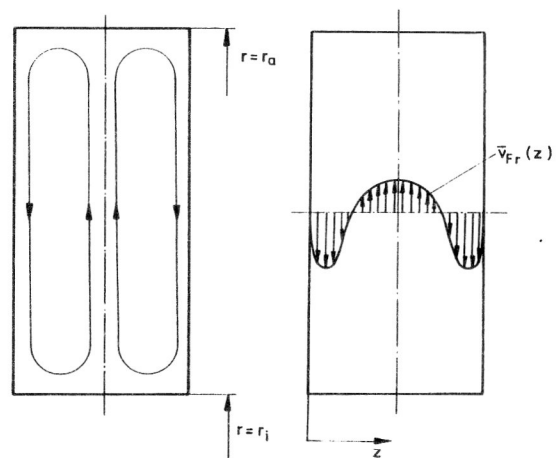
Diese Gleichungen sollen im weiteren als Grundlage für die Strömungsbetrachtungen dienen, indem sie über einen genügend großen Zeitraum zeitlich gemittelt werden. Dabei ist es jedoch erforderlich, sowohl die turbulenten Schwankungen als auch den ständigen Wechsel zwischen den Phasen an einem Ort zu berücksichtigen, was durch entsprechende Mittelwerte möglich ist. Dementsprechend werden die Geschwindigkeiten, Spannungen, Wechselwirkungskräfte und auch der Gasvolumenanteil durch zeitliche Mittelwerte repräsentiert. Im Falle der Geschwindigkeiten soll dies, da außerdem noch die zeitlichen Schwankungen, z. B. als  $v_{Fr}^2$  oder  $v_{Fr}^2 v_{F\varphi}^2$ , auftauchen, durch Querstriche in der Schreibweise  $\overline{v_{Fr}}$ , ... deutlich gemacht werden. Eine solche Kennzeichnung ist bei den Spannungen, den Wechselwirkungskräften und dem Volumenanteil nicht nötig, weshalb in diesen Fällen der Querstrich fortgelassen wird.

Um zu weiteren Vereinfachungen der Gleichungen zu gelangen, muß ein ungefähres Bild von der Strömung vorliegen. Hierbei ist zunächst zu beachten, daß es aufgrund der Umlenkung der Strömung zur Ausbildung von Rezirkulationsgebieten kommen kann. Das Geschwindigkeitsprofil der Hauptströmung, d. h. der Komponente in  $\varphi$ -Richtung, kann deshalb so aussehen, wie es im Bild 4 dargestellt ist.

Eine weitere Besonderheit ist die Ausbildung einer Sekundärströmung. Das entsprechende Stromlinienbild und das zugehörige Geschwindigkeitsprofil, also die Verteilung der Geschwindigkeitskomponente in  $r$ -Richtung in Abhängigkeit von der  $z$ -Koordinate, zeigt das Bild 5.

Außerdem wird davon ausgegangen, daß, abgesehen von den Schwankungen der Turbulenz und des zeitlichen Phasenwechsels, die Strömung stationär ist. Dadurch fallen die partiellen Ableitungen heraus.

Als nächstes sollen die Spannungen etwas genauer betrachtet werden. Der Druck in der Gasphase mag in Anbetracht der Anwesenheit kleiner Bläschen oder Blasen von einigen mm Durchmesser, bezogen auf die zeitlichen Mittelwerte in jeder der beiden Phasen, für ein Makroelement mit mehreren dispersen Elementen durchaus etwas größer als in der



**Bild 5**  
Sekundärströmung in einem Krümmungsbereich mit zugehöriger Geschwindigkeitsverteilung



Flüssigkeit sein. Dagegen kann sicherlich die Druckänderung für jede Phase als nahezu gleich angesehen werden, d. h. es gilt mit  $x = r, \varphi, z$

$$\frac{\partial p_G}{\partial x_i} = \frac{\partial p_F}{\partial x_i} \quad (10)$$

Die Reynoldsschen Spannungen wiederum werden in erster Linie in der Flüssigkeit erzeugt. Der Transport durch die Gasphase erfolgt über Impulse, die quer durch die Blase von einer Phasengrenze zur anderen weitergeleitet werden. Sie gelangen so, wie über einen Stoßdämpfer übertragen, auf die Gasblase, in deren Inneren die Reynoldsschen Spannungen durchaus viel kleiner sein können. Es ist vor allem die Phasengrenze, die über die Grenzflächen-spannung diese Transportfunktion übernimmt, wobei die Deformationen der Blasenoberfläche in Zusammenhang mit Druckschwankungen in der Blase auftreten. Insofern soll auch hierfür

$$\frac{\partial \tau_{F x_i x_j}}{\partial x_k} = \frac{\partial \tau_{G x_i x_j}}{\partial x_k} \quad (11)$$

gelten.

Im folgenden werden nur der Druck und die Reynoldsschen Spannungen der Flüssigkeit verwendet. Deshalb wird bei  $p$  und  $\tau$  auf den Index F verzichtet.

Als weiterer Schritt folgt die Addition der Bewegungsgleichungen für beide Phasen, womit hier die Wechselwirkungskräfte herausfallen.

Es wird hiermit anstelle der Betrachtung von flüssiger und von gasförmiger Phase die neue Einteilung so gewählt, daß zum einen das gesamte Gemisch und zum anderen die Gasphase ins Auge gefaßt werden. Die Blasenströmung wird damit als fast homogene Zweiphasenströmung mit darin driftenden Blasen dargestellt. Diese Verfahrensweise entspricht durchaus näherungsweise dem Verhalten von Blasenströmungen.

In den weiteren Darstellungen wird für den Massenkraftterm  $\partial U / \partial x_i$  die Dichte der Gewichtskraft gesetzt. Die Zentrifugalkräfte ergeben sich aus den Trägheitskräften im Zylinderkoordinatensystem.

Die durch Summation gewonnenen Bewegungsgleichungen für das Gemisch lauten demzufolge

$$\begin{aligned} & \rho_F(1 - \epsilon) \left[ \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{Fr}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{Fr}}{\partial \varphi} + \bar{v}_{Fz} \frac{\partial \bar{v}_{Fr}}{\partial z} - \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} \right] \\ & = -g \rho_F(1 - \epsilon) \cos \varphi - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \\ & \quad + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\varphi\varphi}}{r} \quad , \quad (12a) \end{aligned}$$

$$\rho_F(1 - \epsilon) \left[ \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial \varphi} + \bar{v}_{Fz} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial z} + \frac{\bar{v}_{Fr} \bar{v}_{F\varphi}}{r} \right]$$

$$\begin{aligned} & = -g \rho_F(1 - \epsilon) \sin \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} \\ & \quad + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} \quad , \quad (12b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho_F(1 - \epsilon) \left[ \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{Fz}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{Fz}}{\partial \varphi} + \bar{v}_{Fz} \frac{\partial \bar{v}_{Fz}}{\partial z} \right] \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} \quad . \quad (12c) \end{aligned}$$

Hinzu kommen die drei Bewegungsgleichungen für die Gasphase und die Kontinuitätsgleichungen für das Gemisch und die Gasphase.

### 3. Aufbereitung der Gleichungen

Als Schwerpunkt der Untersuchungen wird der Bereich angesehen, in dem die Sekundärströmung und die Rezirkulationsströmung eine besondere Bedeutung haben. Da hierbei von den allgemeinen Betrachtungen der heterogenen Strömung ausgegangen wird, ist die homogene Strömung als Spezialfall impliziert.

Bei der Krümmenströmung verlagert sich für wachsende  $\varphi$ -Werte das Maximum der Geschwindigkeitsverteilung  $\bar{v}_{F\varphi}(r)$  mehr und mehr zur Außenkontur. Dabei verstärkt sich die Sekundärströmung. An der Innenkontur tritt ein Rezirkulationsgebiet auf. Außerdem wandern bei der gasbeladenen Flüssigkeitsströmung die Blasen bei ihrer Bewegung in  $\varphi$ -Richtung, wobei gleichzeitig eine Komponente in Richtung zur Innenkontur auftritt. Erst bei Ausbildung einer sehr ungleichmäßigen Konzentrationsverteilung  $\epsilon(r)$  treten starke Rückvermischungen auf, die eine weitere Phasentrennung verhindern.

Die genannten Erscheinungen machen sich bei einer Krümmenströmung innerhalb von  $\varphi = 60^\circ \dots 90^\circ$  besonders deutlich bemerkbar. Für diesen Bereich wird von den zuvor aufgestellten Bewegungsgleichungen ausgegangen. Dabei soll folgendermaßen vorgegangen werden. Zunächst wird die Hauptströmung  $\bar{v}_{F\varphi}(r)$  für  $\varphi = \text{konst}$  berechnet. Dabei bedeutet

$$\bar{v}_{F\varphi} = \frac{1}{b} \int_0^b \bar{v}_{F\varphi}(r, z) dz \quad (13)$$

mit  $b$  als Kanalbreite eine Mittelwertbildung für  $r = \text{konst}$  und  $\varphi = \text{konst}$ , wobei das Profil in Abhängigkeit von der  $z$ -Koordinate stark abgeflacht, d. h. fast kantig, ist, wie es auch bei der turbulenten Kanalströmung des homogenen Fluides üblich ist. Aufgrund von  $\bar{v}_{Fr} = 0$  ergibt sich für die Gl. (12a) eine starke Reduzierung.

In dieser ersten Rechnung wird der Einfluß der Sekundärströmung über eine zusätzliche Wirbelviskosität berücksichtigt. Die entsprechenden Trägheitskräfte in der Gl. (12b),  $\bar{v}_{Fr} \partial \bar{v}_{F\varphi} / \partial r + \bar{v}_{Fr} \bar{v}_{F\varphi} / r$ , werden zunächst herausgelassen.

Des weiteren sind einige Terme vernachlässigbar, z.B.  $\bar{v}_{Fz} \partial \bar{v}_{F\varphi} / \partial z$ ,  $1/r \cdot \partial \tau_{r\varphi} / \partial \varphi$ . Wegen  $\bar{v}_{Fz} = 0$  und  $\partial \dots / \partial z = 0$  fällt bei der Hauptströmung die Gl. (12c) ganz weg.

Das Berechnungsmodell sieht als nächsten Schritt die Ermittlung des Sekundärströmungsprofils  $\bar{v}_{Fr}(z)$  für  $\varphi = \text{konst}$  und  $r = \text{konst}$  vor. Eine solche Rechnung soll für einen großen Bereich von  $r$ -Werten innerhalb der Schranken  $1,1 r_i < r < 0,9 r_a$  durchgeführt werden. In diesem Bereich verlaufen die Stromlinien der Sekundärströmung nahezu wandparallel. Für die Fälle in der Nähe der Innen- und der Außenkontur wird wegen des dreidimensionalen Charakters der gesamten Strömung auf die Erfassung der Sekundärströmung verzichtet. Folglich entfällt  $\bar{v}_{Fz}$  und damit die Gl. (12c).

Gl. (12c).

In der Gl. (12a) können bei der Berechnung der Sekundärströmung noch einige Terme vernachlässigt werden, z.B.  $\bar{v}_{Fz} \partial \bar{v}_{Fr} / \partial z$ ,  $\partial \tau_{rr} / \partial r$ ,  $1/r \cdot \partial \tau_{r\varphi} (\partial \varphi / \tau_{rr} - \tau_{r\varphi}) / r$ .

Die Ableitungen  $\partial \dots / \partial z$  spielen jedoch bei der Sekundärströmung eine große Rolle, auch in der auf die Sekundärströmung bezogenen Gl. (12b)

Mit dem Ergebnis, daß die Terme

$$\frac{1}{b} \int_0^b \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} dz = f_1(r) \quad (14)$$

und

$$\frac{1}{b} \int_0^b \frac{\bar{v}_{Fr} \bar{v}_{F\varphi}}{r} dz = f_2(r) \quad (15)$$

aus der Berechnung der Sekundärströmung vorliegen, können sie in die auf die Hauptströmung bezogene Gl. (12b) eingesetzt werden. Nach der nun zu realisierenden Berechnung der Hauptströmung sollte eine zweite Sekundär- und eine dritte Hauptströmungsrechnung folgen.

Durch die Aussparung des wandnahen Bereiches bei  $r_i$  und  $r_a$  entsprechend der Bedingung  $1,1 r_i < r < 0,9 r_a$  entfällt der Einfluß der  $z$ -Komponente der Geschwindigkeit und damit der zugehörigen Bewegungsgleichung (12c) bei sämtlichen Rechnungen. Es bleiben so jeweils zwei Bewegungsgleichungen für das Gemisch und zwei für das Gas, einerseits für die Hauptströmung und andererseits für die Sekundärströmung, übrig. Diese insgesamt acht Bewegungsgleichungen stellen bei dem gewählten Modell die Berechnungsgrundlage dar.

Insbesondere die Gleichungen für die gasförmige Phase lassen sich stark vereinfachen. Hierbei ist es vor allem eine Frage der zweckmäßigen Umformung der Wechselwirkungskräfte, wodurch sich gegenüber der bisherigen Schreibweise das Aussehen der Bewegungsgleichungen verändert.

Die acht Gleichungen erhalten die folgenden Formen.

a) Für das Gemisch, bezogen auf die Hauptströmung, gilt

$$- \varrho_F (1 - \varepsilon) \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} = - g \varrho_F \cos \varphi (1 - \varepsilon) - \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2 \tau_{rzw}}{b}, \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \varrho_F (1 - \varepsilon) \left[ \frac{1}{b} \int_0^b \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} dz + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial \varphi} \right. \\ \left. + \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\bar{v}_{Fr} \bar{v}_{F\varphi}}{r} dz \right] = - g \varrho_F \sin \varphi (1 - \varepsilon) - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ + \frac{\partial \bar{\tau}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2 \bar{\tau}_{r\varphi}}{r}, \end{aligned} \quad (16b)$$

wobei sich

$$- \frac{2 \tau_{rzw}}{b} = \frac{1}{b} \int_0^b \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} dz \quad (17)$$

setzen läßt.

b) Für die Gasphase reduziert sich im Falle der Hauptströmung die  $\varphi$ -Komponente der Bewegungsgleichung (8b) durch Einsetzen von

$$- f_{GF\varphi} = \frac{3}{4} \frac{\varrho_F}{d_B} \bar{\varepsilon} c_w (\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi})^2 \quad (18)$$

sowie

$$\begin{aligned} - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{\tau}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2 \bar{\tau}_{r\varphi}}{r} \\ \approx \left[ \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial \varphi} + g \sin \varphi \right] (1 - \varepsilon) \varrho_F \end{aligned} \quad (19)$$

auf

$$\frac{3}{4} c_w (\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi})^2 = \left[ \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial \varphi} + g \sin \varphi \right] d_B (1 - \varepsilon), \quad (20)$$

wobei der Zahlenwert für den Widerstandsbeiwert  $c_w$  vom Blasendurchmesser  $d_B$  abhängig ist [11]. Die  $r$ -Komponente [15] wird mittels

$$f_{GFr} = c_r \varrho_F (\bar{v}_{Gr} - \bar{v}_{Fr}) \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} + \Delta p_{ph} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial r} \quad (21)$$

sowie durch die Gleichung

$$- \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \bar{\tau}_{rr}}{\partial r} \approx \left[ g \cos \varphi - \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} \right] (1 - \varepsilon) \varrho_F \quad (22)$$

vereinfacht. Es bedeuten  $c_r$  ein Beiwert für die Blaszirkulation und  $\Delta p_{ph}$  die Druckdifferenz an der Phasengrenze. Schließlich bleibt

$$\bar{\varepsilon} (1 - \varepsilon) \varrho_F \left[ g \cos \varphi - \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} \right] = c_r \varrho_F (\bar{v}_{Gr} - \bar{v}_{Fr}) \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r}$$

$$+ D_t g \varrho_F \frac{1 - \varepsilon}{\bar{v}_{Gr} - \bar{v}_{Fr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \quad (23)$$

übrig, wobei anstelle von  $\Delta p_{ph}$  mit  $D_t$  der Blasendiffusionskoeffizient eingeführt wurde.

c) Im Falle der Sekundärströmung gilt für das Gemisch in der  $r$ -Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_F(1 - \varepsilon) \left[ \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{Fr}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial^2 \bar{v}_{Fr}}{\partial \varphi} - \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} \right] \\ = -g \varrho_F \cos \varphi (1 - \varepsilon) - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \end{aligned} \quad (24a)$$

und in der  $\varphi$ -Richtung

$$\begin{aligned} \varrho_F(1 - \varepsilon) \left[ \bar{v}_{Fr} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{F\varphi}}{r} \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\bar{v}_{Fr} \bar{v}_{F\varphi}}{r} \right] \\ = -g \varrho_F \sin \varphi (1 - \varepsilon) - \frac{\partial p}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} \end{aligned} \quad (24b)$$

d) Für die Gasphase im Falle der Sekundärströmung ergibt sich analog zur Gl. (20)

$$-\frac{3}{4} c_w (\bar{v}_{Gr} - \bar{v}_{Fr})^2 = \left[ g \cos \varphi - \frac{\bar{v}_{F\varphi}^2}{r} \right] d_B (1 - \varepsilon) \quad (25a)$$

und analog zur Gl. (23), diesmal aber auf die  $z$ -Richtung bezogen,

$$0 = c_r (\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi}) \varepsilon \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial z} + D_t g \frac{1 - \varepsilon}{\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \quad (25b)$$

Dieses Gleichungssystem muß durch Konstitutivgleichungen für die Spannungen und die Wirbelviskosität ergänzt werden. Hierfür lassen sich die Ansätze [7]

$$\tau_{\varphi z} = \varrho_F (1 - \varepsilon) (v_t + v_F) \left[ \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial z} + \frac{\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi}}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right], \quad (26)$$

$$\tau_{rz} = \varrho_F (1 - \varepsilon) (v_t + v_F) \left[ \frac{\partial \bar{v}_{Fr}}{\partial z} + \frac{\bar{v}_{Gr} - \bar{v}_{Fr}}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right], \quad (27)$$

$$\tau_{r\varphi} = \varrho_F (1 - \varepsilon) (v_t + v_F) \left[ \frac{\partial \bar{v}_{F\varphi}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi}}{1 - \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right], \quad (28)$$

einbringen.

Weiterhin wird für die dem Mischungswegansatz entsprechende Wirbelviskosität

$$v_{tw} = l_m^2 \left[ \frac{\partial [(1 - \varepsilon) \bar{v}_{F\varphi}]}{\partial r} \right] \quad (29)$$

und die aus der Schwarmturbulenz resultierende Wirbelviskosität

$$v_{tB} = 0,4 \sqrt[3]{d_B^4 \varepsilon g (\bar{v}_{G\varphi} - \bar{v}_{F\varphi})} \quad (30)$$

verwendet und die Summation [14]

$$v_t = v_{tw} + v_{tB} \quad (31)$$

durchgeführt.

## 4. Numerische Umsetzung

Die numerische Umsetzung der aufbereiteten Gleichungen führt auf zwei Rechenprogramme [8], [13].

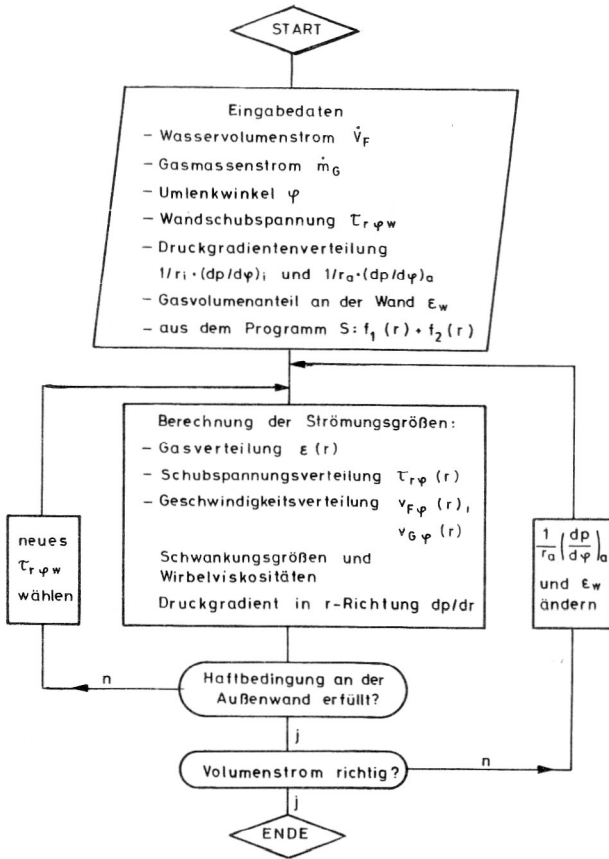
Das erste Programm dient zur Berechnung der Hauptströmung (Programm H). Es beruht auf einem quasiaidimensionalen Berechnungsverfahren der realen Blasenströmung unter Einbeziehung von Schubspannungen und turbulenter Blasendiffusion und kann zur Berechnung der Hauptströmung ab Umlenkwinkel von etwa  $60^\circ$  eingesetzt werden.

Das zweite Programm wird im wesentlichen zur Berechnung der Sekundärströmung (Programm S) verwendet. Es liefert aber außer der Geschwindigkeit der Sekundärströmung auch die Trägheitskräfte, die bei der Berechnung der Hauptströmung zunächst nicht berücksichtigt werden. Somit ermöglicht dieses Programm eine nachträgliche Korrektur des Programmes für die Hauptströmung.

Wie zuvor beschrieben, basieren beide Programme auf einem System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung. Nach einigen Vereinfachungen läßt sich daraus ein System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung gewinnen. Für die Lösung dieses Gleichungssystems können Differenzenverfahren benutzt werden. Das gewählte Differenzenverfahren ist ein Einschrittverfahren mit zweifacher Wiederholung je Schritt. Die Lösung der Differentialgleichung erfolgt unter Beachtung gewisser Randbedingungen mit einer Anfangsbedingung für den Anstieg der Geschwindigkeit, indem die Schubspannungen an der einen Wand zunächst willkürlich vorgegeben wird.

Werden die Randbedingungen erfüllt, ist das Problem als gelöst zu betrachten. Falls es nicht der Fall sein sollte, werden nach geeigneten Strategien diejenigen Anfangssteigungen gesucht, die die Randbedingungen erfüllen. Dieses Vorgehen entspricht dem Abschlußverfahren zur Lösung einer Randwertaufgabe durch Zurückführung auf eine Anfangswertaufgabe. Da die Randwertaufgabe dieses komplizierten nichtlinearen Gleichungssystems analytisch nicht lösbar ist, müssen die unbekanntenen Anfangsbedingungen  $\tau_{r\varphi}(r = r_i)$ ,  $\tau_{\varphi z}(z = 0)$  und  $\tau_{rz}(z = 0)$  iterativ ermittelt werden. Jeder Iterationsschritt erfordert dabei die Lösung einer Anfangswertaufgabe.

Der Programmablaufplan für die Berechnung der Hauptströmung ist im Bild 6 dargestellt. Daraus ist zu entnehmen, daß als Eingabedaten auch Ergebnisse aus der Berechnung der Sekundärströmung erforderlich sind, was den iterativen Charakter der Berechnungen dokumentiert. Weiterhin sind Informationen über die Druckgradientenverteilung notwendig. Hierzu sind entweder Versuche oder bestimmte Annahmen erforderlich. In diesem Fall sind Auswertungen durchgeführter Untersuchungen [4], [6] und einfache Betrachtungen zugrunde gelegt worden. Daraus ist ersichtlich, daß ab bestimmten Umlenk winkeln an

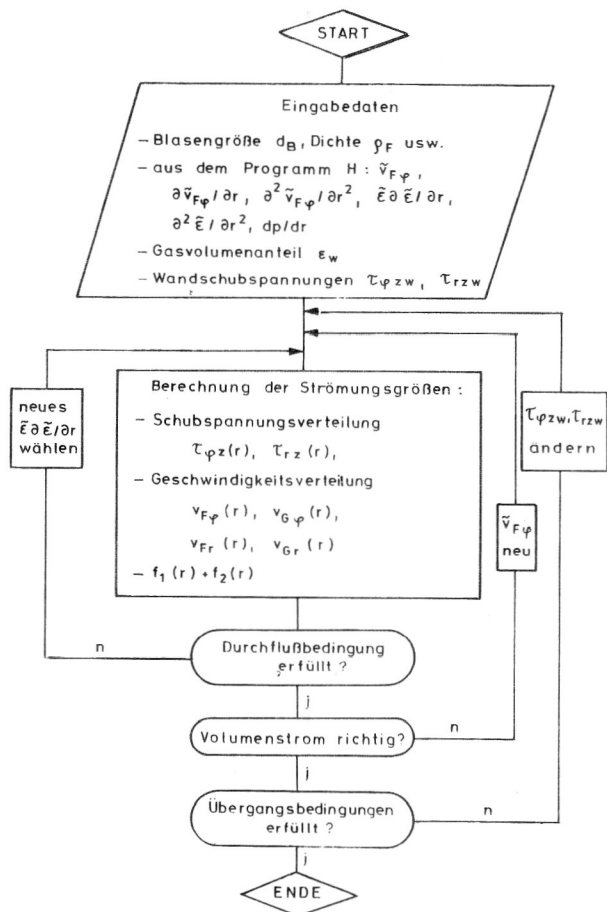


**Bild 6**  
Ablaufplan des Hauptströmungsprogrammes

der Innenwand ein positiver Druckgradient in Strömungsrichtung auftritt. Quer zur Strömung kann sich ein Druckgradient einstellen, der sich in Abhängigkeit vom Radius von einem positiven Wert an der Innenwand auf einen negativen Wert an der Außenwand verändert. Dabei wird von einer Geraden ausgegangen, die  $1/r_i \cdot (\partial p/\partial \varphi)_i$  und  $1/r_a \cdot (\partial p/\partial \varphi)_a$  miteinander verbindet. Für diesen Verlauf läßt sich die Beziehung

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \left[ \frac{1}{r_a} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_a - \frac{1}{r_i} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_i \right] \frac{r - r_i}{r_a - r_i} + \frac{1}{r_i} \left( \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right)_i \quad (32)$$

aufstellen. Bei der Bestimmung von  $1/r_a \cdot (\partial p/\partial \varphi)_a$  und  $1/r_i \cdot (\partial p/\partial \varphi)_i$  müßte man sich zunächst auf eine experimentell gewonnene Druckverteilung stützen. Im Verlauf der Rechnung sind diese Werte zu überprüfen und gegebenenfalls zu korrigieren. Unbedingt erforderlich ist es, daß bei der Abarbeitung des Programmes die Randbedingungen beachtet werden. Die wichtigste Randbedingung, die die Ergebnisse erfüllen müssen, ist die Haftbedingung. Danach muß die Geschwindigkeit an den Wänden des Krümmers gleich Null sein, d. h.  $v_{F\varphi}(r = r_i) = 0$  und  $v_{F\varphi}(r = r_a) = 0$ . Diese Bedingung kann, da nach dem Newtonschen Reibungsgesetz eine Proportionalität zwischen der Schubspannung und dem Geschwindigkeitsgradienten besteht, durch die Wahl der Wandschubspannung  $\tau_{r\varphi w}$  erfüllt werden. Mit der Vorgabe von  $\tau_{r\varphi}(r = r_i) = \tau_{r\varphi w}$  wird gleichzeitig der Anstieg des Geschwindigkeitsprofils als Startwert gewählt. Es



**Bild 7**  
Ablaufplan des Sekundärströmungsprogrammes

kommt also darauf an, die Wandschubspannung so lange zu korrigieren, bis die Geschwindigkeit an der Außenwand auf Null gebracht ist. Weiterhin muß gesichert werden, daß die errechneten Flüssigkeits- und Gasvolumenströme mit den vorgegebenen Werten übereinstimmen. Der Flüssigkeitsvolumenstrom wird dem Druckgradientenverlauf an der Außenwand  $1/r_a \cdot (\partial p/\partial \varphi)_a$  angepaßt, wobei zu beachten ist, daß zwischen den Druckgradienten und den Schubspannungen Zusammenhänge bestehen. Der Gasvolumenstrom wird mit Hilfe des Gasvolumenanteils an der Wand gesteuert. Hierfür gilt

$$\varepsilon(r = r_i) = 0 \text{ und } \varepsilon(r = r_a) = 0.$$

Den Ablaufplan zur Berechnung der Sekundärströmung zeigt das Bild 7. Für dieses Programm ist die wichtigste zu erfüllende Bedingung die Durchflußbedingung. Sie besagt, daß die Sekundärströmung an den Seitenwänden ebensoviel nach innen transportieren muß, wie in der Kanalmitte nach außen. Solch eine Bedingung gilt allerdings nur für ein Gebiet im Krümmer, in dem keine Änderung der Geschwindigkeits- und Phasenverteilung in  $\varphi$ -Richtung erfolgt. Es wird also

$$\bar{v}_r = \int_0^{b/2} [\bar{v}_{Fr}(1 - \varepsilon) + \bar{v}_{Gr}\varepsilon] dz = 0 \quad (33)$$

vorausgesetzt. Weiterhin kann

$$\bar{v}_{Fr} = \int_0^{b/2} [\bar{v}_{Fr}(1 - \epsilon)] dz = 0 \quad , \quad (34)$$

$$\bar{v}_{Gr} = \int_0^{b/2} \bar{v}_{Gr} \epsilon dz = 0 \quad . \quad (35)$$

gefordert werden.

Von diesen Bedingungen kann u.U. etwas abgewichen werden, wenn es das Experiment zuläßt.

Die Durchflußbedingungen lassen sich durch die Wahl der richtigen Werte von  $\bar{v}_{F\varphi}$  und  $\bar{\epsilon} \partial \bar{\epsilon} / \partial r$  einhalten. Weiterhin ist zu beachten, daß die Schubspannungen in der Kanalmitte gleich Null sind. Diese Werte lassen sich durch eine entsprechende Wahl von  $\tau_{rz} = \tau_{rz}(z=0)$  und  $\tau_{\varphi zw} = \tau_{\varphi z}(z=0)$  gewährleisten.

#### LITERATUR

- [1] Bankoff, S.G.: A Variable Density Single-Fluid for Two-Phase Flow with Particulate Reference to Steam-Water Flow. Trans. ASME, Ser. C, J. Heat Transfer 82 (1960) 4, pp.255/272.
- [2] Borodulja, W.A.; Kosmowski, I.; Lilienblum, W.; Chodan, I.W.; Pylow, S.A.: Mechanische Austauschvorgänge bei einem Flüssigkeitsgasgemisch in einem geneigten Strömungskanal. Wiss. Zeitschrift TH Magdeburg 24 (1980) 4, S. 95/97.
- [3] Borodulja, W.A.; Kosmowski, I.; Lilienblum, W.; Chodan, I.W.; Pylow, S.A.: Experimentelle Untersuchungen einer Flüssigkeitsgasströmung im geneigten Kanal. Wiss. Zeitschrift TH Magdeburg 24 (1980) 4, S. 99/103.
- [4] Fister, W.; Zahn, G.; Adrian, F.-W.: Theoretische und experimentelle Untersuchungen an den Rückführkanälen hydraulischer Strömungsmaschinen. VDI-Berichte 424 (1981), S. 173/192.
- [5] Galaup, J.P.; Delhay, J.M.: Utilisation de sondes optiques miniatures en écoulement diphasique gazliquide. Application a la mesure du taux de presence local et de la vitesse local de la phase gazeuse. La Houille Blanche 31 (1976) 1, 8/10 et 17/30.
- [6] Hoang, K.; Davis, M.R.: Flow Structure and Pressure Loss for Two-Phase Flow in Return. Trans. ASME, J. of Fluid Engng. 106 (1984), pp.30/37.
- [7] Ishii, M.: Thermo-Fluid Dynamic Theory of Two-Phase Flow. Paris: Eyrolles 1975.
- [8] Jarmusek, L.: Berechnung der Haupt- und Sekundärströmung in einem Krümmer bei Blasenströmung. Diplomarbeit TU Magdeburg 1987.
- [9] Kobayasi, K.; Iida Y.; Kanagae, N.: Distribution of Local Void Fraction of Air-Water Two-Phase Flow in a Vertical Channel. Bull. ISME 13 (1970) 62, pp.1005/1012.
- [10] Koswowski, I.: Einfluß der Gasbeladung auf Flüssigkeitsströmungen. Techn. Mechanik 1 (1980) 1, S. 103/107.
- [11] Lilienblum, W.: Turbulente Blasenströmung im geneigten Kanal. Techn. Mechanik 6 (1984) 1, S. 68/77.
- [12] Lilienblum, W.; Chodan, I.W.: Turbulenz und Geschwindigkeitsprofile in einer geneigten Blasensäule. Wiss. Zeitschrift TH Magdeburg 28 (1984) 4, S. 53/59.
- [13] Malat, P.: Berechnung der Krümmerströmung bei Blasenströmung. Diplomarbeit TU Magdeburg 1989.
- [14] Sato, Y.; Sekoguchi, K.: Liquid Velocity Distribution in Two-Phase Bubble Flow. Int. J. Multiphase Flow 2 (1975), pp. 79/95.
- [15] Zun, I.: The Transverse Migration of Bubbles Influenced. Int. J. Multiphase Flow 6 (1980), pp. 583/588.

#### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. sc. techn. I. Kosmowski  
 Doz. Dr. sc. techn. W. Lilienblum  
 Institut für Strömungstechnik und Thermodynamik  
 Technische Universität „Otto von Guericke“  
 Universitätsplatz 1  
 Magdeburg, 3010  
 Dr.-Ing. H. Al-Ahmad  
 Fakultät für Maschinenbau und Elektrotechnik  
 Universität Damaskus