TECHNISCHE MECHANIK 11 (1990) Heft 4
Manuskripteingang: 15. 03. 1990

Zur Ergodizität dissipativer Strömungen

J. Biehounek

Die Arbeit behandelt das Langzeitverhalten statistischer Lösungen von dissipativen Anfangs-Randwertproblemen, d. h. solcher Differentialgleichungen, deren Zustandsraum absorbierende Mengen und Attraktoren enthält. Die Bindung der Trajektorien an eine Teilmenge des Zustandsraumes erweist sich als wesentlich für das Eintreten in ein stationäres statistisches Regime und die Ergodizität des Prozesses. Ausgehend von Resultaten über die Existenz stationärer statistischer Lösungen werden diejenigen Eigenschaften dissipativer Probleme genannt, die die Ergodizität des Vorganges sichern. eine neue Interpretation der statistischen Lösung als Strömung in einem Raum von Maßen bildet die Basis der Betrachtungen. Die Resultate werden am Beispiel der zweidimensionalen Navier-Stokes'schen Gleichungen erläutert.

The ergodicity of dissipative flows

The paper treats the longtime behaviour of the statistical solution of dissipative initial-boundary value problems, ie. such differential equations whose space of states contains absorbing sets and attractors. The adhesion of the trajectories to a subset of the space of states proved as fundamental for entering a stationary statistical regime and the ergodicity of the process. Starting from results on the existence of stationary statistical solutions, those properties of dissipative problems are stated, which secure the ergodicity of the process. A new interpretation of the statistical solution as a flow in a space of measures forms the basis of the consideration. At last the results will be explained by means of the two-dimensional Navier-Stokes equation.

1. Einleitung

In einer wegweisenden Arbeit aus dem Jahr 1972 hat O. A. Ladyshenskaja die eigenständige Bedeutung von Evolutionsproblemen mit Dissipation, zu denen auch die Strömung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit zählt, hervorgehoben [1]. Wie sie feststellte, „vergessen" solche Systeme im Laufe der Entwicklung „fast alle" Anfangszustände, so daß zu ihrer Beschreibung ein kleiner Teil A des Zustandsraumes (Phasenraumes) ausreicht. Diese Menge, die heute Attraktor genannt wird, stellt seitdem einen zentralen Untersuchungsgegenstand von Arbeiten dar, die der individuellen Lösung dissipativer Probleme gewidmet sind [2] bis [4]. Dabei werden verschiedene Ausprägungen des Begriffes benutzt (maximaler Attraktor bei Babin und Vishik [2], minimaler globaler Attraktor bei Ladyshenskaja [3]). Das Studium dissipativer Anfangs-Randwertprobleme erfordert Ideen und Methoden verschiedener Zweige der Mathematik und mathematischen Physik. Zur Theorie des Attraktors sind weitere Arbeitsrichtungen hinzugetreten. So wird z. B. die Empfindlichkeit dissipativer Systeme gegenüber Änderungen der Anfangsbedingungen behandelt [5], [6]. Die dabei benutzten charakteristischen Exponenten (Ljapunov-Exponenten) sind deshalb von Interesse, weil sie als Bindeglied zwischen Theorie und Experiment dienen können: Einerseits läßt sich nämlich mit ihrer Hilfe die Dimension des Attraktors abschätzen, andererseits sind experimentelle Bestimmungsmethoden bekannt [3], [5], [6], [8].

Daneben entwickelte sich eine statistische Theorie von Anfangs-Randwertproblemen. Sie ist mit einer Verallgemeinerung des Lösungsbegriffes von der individuellen zur statistischen Lösung verbunden. Nach dem Studium der Navier-Stokesschen Gleichungen in den grundlegenden Arbeiten von E. Hopf und C. Foias [9], [10] ist es das Anliegen neuerer Beiträge, die Theorie auf weitere Aufgabenklassen auszudehnen und ihr so einen höheren Grad von Allgemeinheit zu geben [11], [12].

Bemerkenswert ist nun, daß die Navier-Stokesschen Gleichungen sowohl beim Studium der individuellen als auch der statistischen Lösung dissipativer Anfangs-Randwertprobleme die Rolle eines Paradigmas spielen. Dies wirft die Frage nach Zusammenhängen zwischen den beiden Vorgehensweisen auf. Nachdem in den Arbeiten [13], [14] untersucht wurde, wie sich ein Attraktor, der das asymptotische Verhalten der individuellen Lösung kennzeichnet, auf das Langzeitverhalten der statistischen Lösung auswirkt, soll jetzt die Frage diskutiert werden, unter welchen Umständen eine dissipative Strömung ergodisch ist.

Die Ergodentheorie geht auf die zuerst an der klassischen statistischen Mechanik behandelte Frage nach dem Verhältnis von zeitlichem und wahrscheinlichkeitstheoretischem Mittel zurück. Wegen der dabei postulierten Austauschbarkeit der Mittelwerte lassen sich bei ergodischen Vorgängen wichtige statistische Kenngrößen (z. B. die Momente erster und zweiter Ordnung) aus einer einzigen, hinreichend langen Realisierung ableiten. Da dies den experimentellen Aufwand reduziert und viele Untersuchungen überhaupt erst möglich macht, sind Ergodizitätskriterien von erheblichem Interesse. Als notwendige und hinreichende Bedingung findet man in der Literatur (z. B. [15] bis [17]) die Forderung

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{4T^2} \iint_{-T}^{+T} k_2(\tau - \tau')\, d\tau\, d\tau' = 0, \qquad (1)$$

in der k_2 die Autokorrelationsfunktion bedeutet. Verfügt man über diese Funktion, läßt sich die Ergodizität des Vorgangs überprüfen. In solchen Fällen, wo k_2 nicht bekannt ist, muß die Gültigkeit von (1) unterstellt werden. Das ist jedoch so lange eine mehr oder weniger plausible Annahme, so lange sie nicht streng aus den Eigenschaften der Bewegungsgleichungen hergeleitet ist. Dieses Problem wird im vorliegenden Beitrag behandelt. Nach einer näheren Kennzeichnung dissipativer Aufgaben und der von ihnen erzeugten Strömungen im Abschnitt 2, befaßt sich der Abschnitt 3 mit ihrer räumlichen statistischen Lösung. Sie wird auf neuartige Weise als Strömung in einem Raum von Maßen eingeführt. Dazu ist es erforderlich, die Eigenschaften des entsprechenden Evolutionsoperators genauer zu untersuchen. Besondere Beachtung finden die Voraussetzungen, unter denen der Vorgang in ein stationäres statistisches Regime eintritt. Wie gezeigt wird, ist dafür der Fakt maßgebend, daß dissipative Probleme in Gestalt absorbierender Mengen bzw. Attraktoren über relativ kleine Teilmengen des Zustandsraumes verfügen, an die die Trajektorien auf Dauer gebunden sind. Die Frage der Ergodizität wird im Abschnitt 4 auf den zuvor bereitgestellten Grundlagen behandelt. Die angegebenen Voraussetzungen für die Ergodizität des Vorgangs sind nicht an die Kenntnisse der Korrelationsfunktion gebunden, sondern beziehen sich auf grundlegende Eigenschaften der Bewegungsgleichung. Wie nämlich nachgewiesen wird, ist über die Existenz einer stationären statistischen Lösung hinaus entscheidend, daß das Problem eine kompakte absorbierende Menge (und einen entsprechenden Attraktor) besitzt. Die Anwendung der allgemeinen Resultate wird abschließend am Beispiel der zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen erläutert.

2. Dissipative Anfangs-Randwertprobleme

Anfangs-Randwertprobleme beschreiben instationäre Vorgänge in einem räumlichen Gebiet G. Ihre Lösungen sind also zeit- und ortsabhängige Funktionen $u: [0, T] \times G \to \mathbb{R}^n$, die jedem $(\tau, x) \in [0, T] \times G$ eine reelle Zahl ($n = 1$) oder einen Vektor ($n \geq 2$) $u(\tau, x)$ zuordnen. Zu dieser Funktion stehen zeitliche und räumliche Variablen gleichberechtigt nebeneinander. Nun schreiben aber thermodynamische Gesetze der Zeit eine Richtung zu und zeichnen sie so als Koordinate aus, die Vergangenheit und Zukunft unterscheidet. Diese, auch im Alltag fest verwurzelte Vorstellung vom Wesen der Zeit legt den Gedanken nahe, Zeit und Ort bei Anfangs-Randwertproblemen unterschiedlich zu behandeln. Die Auszeichnung der Zeit führt dazu, die Lösung eines derartigen Problems als Funktion zu verstehen, die jedem $\tau \in [0, T]$ eine Funktion $u(\tau, \cdot)$ des Ortes zuordnet. Für ein fixiertes τ ist $u(\tau, \cdot)$ also Element eines geeignet gewählten Raumes H von Ortsfunktionen, das nachfolgend kürzer mit $u(\tau)$ bezeichnet wird. Damit zählen Räume von Funktionen $u: [0, T] \to H$ zu den Grundlagen einer funktionalanalytischen Behandlung von Anfangs-Randwertproblemen. Den sog. Lebesgue-Räumen $L_p(0, T; H)$, $1 \leq p < \infty$ kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Es handelt sich um die Menge aller Funktionen $u: [0, T] \to H$, für die $\int_0^T \| u(\tau) \|_H^p \, d\tau < \infty$ ist. Bei dem normierten Raum H (Norm $\| \cdot \|_H$), er soll im weiteren Zustandsraum des Problems heißen, handelt es sich gewöhnlich um eine konkrete Ausprägung des abstrakten Hilbertraumes, die gewisse Grundeigenschaften des betrachteten Problems reflektiert. So sind die Elemente von H nachfolgend immer Ortsfunktionen, die den Randbedingungen genügen. Beispielsweise wird beim Anfangs-Randwertproblem

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \cdot \nabla v = -\frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta v + f$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad v(0) = v_0, \quad v|_{\partial G} = 0$$

der Navier-Stokesschen Gleichungen H wie folgt konstruiert:
Man betrachtet die Teilmenge

$$V = \{ v(\cdot) \in (C^\infty(G))^n : \nabla \cdot v = 0 \}$$

der beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf dem beschränkten Gebiet $G \subset \mathbb{R}^n$, die sich durch zwei Besonderheiten auszeichnen. Zum einen sind sie wegen $\nabla \cdot v = 0$ quellenfrei (Inkompressibilitätsbedingung). Zum anderen wird gefordert, daß ihr Träger supp v kompakt ist. Da damit der Abschluß aller jener Punkte $x \in G$, für die $v(x) \neq 0$ ist, eine kompakte, d. h. beschränkte und abgeschlossene Teilmenge aus G bildet, wird als zweiter Grundeigenschaft zäher Flüssigkeiten der Haftbedingungen am Rand Rechnung getragen. Der Zustandsraum H entsteht nun als Abschluß von v. Jedes Element des Abschlusses läßt sich dann als Grenzwert einer Folge aus v darstellen. Dabei ist der jeweils benutzte Abstandsbegriff von Bedeutung. So entstehen, ausgehend von ein und derselben Grundmenge V, unterschiedliche Räume als Abschluß.

Schließt man v in der Norm des Raumes $(L_2(G))^n$ ab, so resultiert der Zustandsraum $\tilde{H}$ der Navier-Stokesschen Gleichungen. Wird dagegen die Norm des Sobolewraumes $(H_0^1(G))^n$ benutzt, entsteht der weiter unten ebenfalls benötigtze Raum $\tilde{H}^1$. Er ist dicht in $\tilde{H}$, wobei die Einbettung stetig ist (vgl. z. B. [18], [19]). Sowohl $\tilde{H}$ als auch $\tilde{H}^1$ sind Realisierungen des abstrakten Hilbertraumes. Die in der Funktionalanalysis übliche Unterscheidung der Variablen $\tau \in [0, T] \subset \mathbb{R}$ und $x \in G \subset \mathbb{R}^n$ hat weitreichende Konsequenzen. Sie ist mit der Überführung der klassischen Anfangs-Randwertaufgabe in ein Anfangswertproblem für eine abstrakte Operatordifferentialgleichung und der entsprechenden Verallgemeinerung der klassischen zur schwachen Lösung des Problems verbunden (vgl. dazu z. B. [28], S. 149ff). Da sich für die funktionalanalytische Problemstellung mit einfachen Techniken Aussagen über die Existenz und die Approximation von Lösungen machen lassen, zählt die Auszeichnung der Zeitkoordinate zu den Grundlagen einer umfassenden Theorie partieller Differentialgleichungen. Andererseits bietet sie Ansatzpunkte zur Weiterentwicklung der Kontinuumsmechanik. Hierbei ist vor allem die Möglichkeit von Bedeutung, komplizierte Probleme geometrisch zu beschreiben. Nach der funktionalanalytischen Vorstellung läßt sich nämlich, wie oben bereits ausgeführt, der Momentanwert $u(\tau)$ als Punkt des Zustandsraumes H deuten. Da H ein Raum von Ortsfunktionen ist, wird also jedem τ eine Ortsfunktion zugeordnet. Der zeitlichen Entwicklung entspricht dann eine Abfolge von Feldern, die sich als Bewegung in H deuten läßt. Dabei durchläuft $u(\tau)$ ein vom Anfangswert $u(0)$ ausgehende Bahnkurve in H.

Somit vermittelt die Gleichung eine Abbildung

$$T_\tau : H \to H, \quad \tau \geq 0, \tag{2}$$

die gemäß $u(\tau) = T_\tau\, u(0)$ eine Zuordnung zwischen Anfangs- und Momentanwert herstellt. Die bei explizit zeitabhängigen äußeren Wirkungen, Koeffizienten und Randbedingungen einparametrige Familie $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ von Operatoren T_t (sie heißen Evolutionsoperatoren) verkörpert eine Bewegung in H. Diese wird im weiteren als abstrakte Strömung bezeichnet. Bleibt man beim Beispiel der Navier-Stokesschen Gleichungen, so wird die reale Bewegung der Flüssigkeit in einem bestimmten Gebiet mathematisch durch eine Bewegung in einem abstrakten Raum widergespiegelt. Wie man zeigen kann, ist diese Strömung unter den genannten Voraussetzungen gemäß

$$T_{\tau+\vartheta} = T_\tau, \quad \vartheta \in \mathrm{R}^+$$

stationär, und die Operatoren kommutieren. Es gilt also

$$T_\tau T_\vartheta = T_\vartheta T_\tau.$$

Da wegen $T_0 = I$ ein neutrales Element existiert, stellt $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ eine kommutative Halbngruppe dar. Bei konsequenter Anwendung geometrischer Vorstellungen ordnet T_τ dem Punkt u(0) einen Punkt $u(\tau)$ von H zu und kann daher als Punkt-Punkt-Abbildung angesprochen werden. Nachfolgend geht es um Probleme, für die die Operatoren T_τ, $\tau \geqslant 0$ als eindeutige und stetige Operatoren in H definiert sind. Dabei wird aus der Vielzahl abstrakter Strömungen die spezielle Klasse der dissipativen Strömungen hervorgehoben. Zu ihr zählen neben solchen parabolischen Anfangs-Randwertaufgaben der mathematischen Physik und der Mechanik wie den Navier-Stokesschen Gleichungen, den Gleichungen der magnetohydrodynamischen Turbulenz [11], den Gleichungen vom Typ der chemischen Kinetik [2] und gewissen Gleichungen der Elastizitätstheorie mit nichtlinearen Materialgesetzen [21] auch hyperbolische Aufgaben [34]. Eine phänomenologische Überlegung soll am Beispiel zäher Flüssigkeiten in die Problematik einführen.

Wird das Fluid als kontinuierliches Medium idealisiert, so hat man es mit einem mechanischen System zu tun, das unendlich viele Freiheitsgrade besitzt und dessen Zustandsraum H ein unendlichdimensionaler Raum ist (über die bisherigen Ausführungen hinausgehende Angaben über den Raum H, der als Zustandsraum einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit benutzt wird, finden sich z. B. in [18], [19]). Dementsprechend soll die zeitliche Entwicklung des Geschwindigkeitsfeldes auf einem hoch angeregten, räumlich stark differenzierten Anfangszustand gedanklich verfolgt werden. Da es im Prinzip denkbar ist, diesen mit beliebig feiner Struktur vorzugeben, kann der Anfangswert irgend ein Element von H sein. Nun wird aber der momentane Zustand nicht durch die Anfangsbedingungen bestimmt. Daneben sind noch die äußeren Kräfte, die Randbedingungen und die innere Reibung maßgebenbd. Der Tensor S_R der Reibungsspannungen ergibt sich aber gemäß $S_R = \eta(\nabla v + v \nabla)$, η dynamische Zähigkeit, aus dem Gradienten der Geschwindigkeit. Bei nicht ausreichender Energiezufuhr werden daher anfänglich vorhandene, überhöhte Geschwindigkeitsunterschiede abgebaut. In diesem Fall klingt der Einfluß der Anfangsbedingungen ab, und die Entwicklung wird durch die zeitlich beständigen Wirkungen dominiert. Viele Zustände, die eine Flüssigkeit im Prinzip annehmen kann und die sie zu Beginn vielleicht sogar annimmt, erweisen sich als transient. Indem sie durch die Reibung ausgemerzt werden, reduziert sich die Bewegung auf relativ wenige beständige Zustände. Das Langzeitverhalten des Geschwindigkeitsfeldes wird also durch bestimmte Teilmengen des Zustandsraumes beherrscht, in die sich der Momentanwert im Laufe der Zeit hinein bewegt und die er danach nicht mehr verläßt.

Um zu einer quantitativen Aussage zu gelangen, werden die Navier-Stokesschen Gleichungen skalar mit v multipliziert und durch partielle Integration umgeformt. Das liefert die Gleichung

$$\frac{1}{2}\ \frac{d}{d\tau} \| v \|_{\tilde{H}}^2 + \nu \| \nabla v \|^2 = (f, v), \tag{3}$$

in der $\nu \| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2$ mit

$$\| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2 = \int_G v\nabla : \nabla v\, dx = \int_G \sum_{i,j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)^2 dx \geqslant 0$$

die Energiedissipation beziffert und das Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_G f \cdot v\, dx = \int_G \sum_i f_i v_i\, dx$$

die pro Zeit- und Masseneinheit von den äußeren Kräften in das Problemgebiet G eingetragene Energie bedeutet. Da es sich beim Term $\frac{d}{d\tau} \| v \|_{\tilde{H}}^2$ um die Änderungsrate der (auf die Masseneinheit bezogenen) kinetischen Energie handelt, kann die Gleichung (3) als Bilanzgleichung der kinetischen Energie einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit gelten. Sie zeigt, wie die Entwicklung von $\| v \|_{\tilde{H}}^2$ vom Verhältnis der Terme $\nu \| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2$ und (f, v) abhängt. Beginnt nämlich die Bewegung zum Zeitpunkt τ_0 mit einem Zustand hoher Energiedichte (er werde unabhängig von den ab der Zeit τ_0 wirkenden Kräften f zuvor hergestellt), so kann zunächst $\nu \| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2 > | (f, v) |$ angenommen werden. Dann ist aber $\| v \|_{\tilde{H}}^2$ monoton fallend, wobei der Endzustand für $(f, v) > 0$ durch das Gleichgewicht zwischen (f, v) und $\nu \| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2$ bestimmt wird. Aus der Menge

$$K_{\tilde{H}}(\tau_0) = \{v\colon v \in \tilde{H},\ \| v \|_{\tilde{H}}^2 \leqslant R(\tau_0)\}$$

geht also unter den getroffenen Annahmen für $\tau_1 > \tau_0$ die Menge $K_{\tilde{H}}(\tau_1) \leqslant K_{\tilde{H}}(\tau_0)$ hervor. Sind die Daten (Kräfte, Randbedingungen, Koeffizienten) explizit zeitunabhängig, so kann $K_{\tilde{H}}(\tau_1)$ als neue Menge von Anfangsbedingungen dienen, die für $\tau_2 > \tau_1$ in $K_{\tilde{H}}(\tau_2) \leqslant K_{\tilde{H}}(\tau_1)$ übergeht. Da sich diese Schlußweise fortsetzen läßt, gilt für $\tau_j > \tau_i\ K_{\tilde{H}}(\tau_j) \subseteq K_{\tilde{H}}(\tau_i)$. Die damit entstehende Frage nach dem Entwicklungsgesetz von $\| v \|_{\tilde{H}}^2$ kann prinzipiell mit Hilfe von Gleichung (3) beantwortet werden. Dazu muß allerdings der Zusammenhang zwischen $\| v \|_{\tilde{H}}^2$ und $\| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2$ bekannt sein. Eine solche Beziehung steht aber nicht zur Verfügung. Statt dessen kann nur auf eine Abschätzung von $\| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2$ zurückgegriffen werden. Sie führt wie jetzt gezeigt werden soll, zu einer oberen Schranke für $\| v \|_{\tilde{H}}^2$.

Als Ausgangspunkt dient die Eigenwertaufgabe $-\Delta u + \nabla q = \lambda u$, $\nabla \cdot u = 0$, $u_{|\partial G} = 0$. Wird sie auf ähnliche Weise umgeformt wie oben die Navier-Stokessche Gleichung, so entsteht $\| \nabla u \|_{\tilde{H}}^2 = \lambda_k \| u \|_{\tilde{H}}^2$. Die Eigenwerte λ_k bilden bekanntlich eine abzählbare Menge, sie sind reell und unter den angenommenen Randbedingungen gilt $\lambda_k > 0$. Ferner können die Indizes so gewählt werden, daß die Folge $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \ldots$ monoton wächst. Mit dem kleinsten Eigenwert resultiert für die Eigenfunktionen die Abschätzung $\| \nabla u \|_{\tilde{H}}^{2} \geq \lambda_1 \; \| u \|_{\tilde{H}}^2$. Zieht man schließlich noch in Betracht, daß die Eigenfunktionen u ein vollständiges, orthogonales System in $\tilde{H}$ bilden, so läßt sich dieses Ergebnis zu $\| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2 \geq \lambda_1 \| v \|_{\tilde{H}}^2$ für beliebige $v(\tau) \in \tilde{H}$ verallgemeinern. Aus der Energiebilanz (3) folgt so die Differentialungleichung

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \| v \|_{\tilde{H}}^2 + \nu\lambda_1 \| v \|_{\tilde{H}}^2 \leq (f, v) \leq \| v \| \; \| f \|,$$

wobei auf der rechten Seite die Schwarzsche Ungleichung angewandt wurde. Eine Integration nach vorheriger Multiplikation mit $\exp(2 \lambda_1 \nu \tau)$ führt auf

$$\| v(\tau) \|_{\tilde{H}} \leq \| v(0) \| \; e^{-2\nu\lambda_1\tau} + (1 - e^{-2\nu\lambda_1\tau}) \frac{\| f \|}{\nu\lambda_1} \tag{5}$$

Die rechte Seite ist als Funktion von τ monoton fallend. Daher läßt sich immer eine Menge $A_o \subset \tilde{H}$ derart finden, daß für $\tau \geq T$ gilt $T_\tau(K_{\tilde{H}}(0)) \subset A_o$.

Um die Behandlung des Beispiels abzuschließen, sei noch bemerkt, daß die energetische Ungleichung

$$\| v(\tau) \|_{\tilde{H}} + 2\nu \int_0^T \| \nabla v \|_{\tilde{H}}^2 d\tau$$

$$\leq \| v(0) \|_{\tilde{H}}^2 + 2 \int_0^T (f, v) \, d\tau \tag{4}$$

(vgl. [19], S. 232) im engen Zusammenhang zu (3) steht.

Außer der viskosen Reibung sind noch andere Mechanismen geeignet, vergleichbare Erscheinungen hervorzurufen. So ist die ausgleichende Wirkung bei Leitungs- und Diffusionsvorgängen bei starken Gradienten besonders kräftig. Daher sollten dissipative Strömungen auch von anderen Differentialgleichungsproblemen erzeugt werden. In der Tat ist das u. a. für Differentialgleichungen der chemischen Kinetik [2], für die magnetohydrodynamischen Grundgleichungen [11] und für Differentialgleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie [21] nachgewiesen.

Ein derartiges Verhalten veranlaßt die

Definition: Absorbierende Menge

Als absorbierende Menge A_o einer abstrakten Strömung $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ in H bezeichnet man eine solche beschränkte Teilmenge von H, für die es zu jeder beschränkten Menge $\Delta H \subset H$ von Anfangsbedingungen stets ein $T < \infty$ derart gibt, daß für $\tau \geq T$ gilt $T_\tau(\Delta H) \subset A_o$.

Im weiteren werden abstrakte Strömungen, die eine absorbierende Menge besitzen, als dissipativ bezeichnet. Da es zu den Grundeigenschaften dissipativer Strömungen $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ zählt, eine Menge $K_H(\tau_o) \subset H$ von Anfangsbedingungen in eine Menge $K_H(\tau_1) \subset K_H(\tau_o)$, $\tau_1 > \tau_o$ von Momentanwerten abzubilden, stimmt die hier benutzte Begriffsbestimmung im Prinzip mit jenen überein, die bei der Behandlung von Strömungen in einem endlichdimensionalen Zustandsraum üblich sind [7], [20].

Die Frage nach dem Grenzwert $A \subset H$ der Mengenfamilie $\{K_H(\tau), \tau \geq 0\}$ führt zum Attraktor. Hier soll von Babin und Vishik eingeführte Begriff des maximalen Attraktors benutzt werden.

Definition: Maximaler Attraktor

Existiert zu jeder beschränkten Teilmenge $\Delta H \subset H$ des Zustandsraumes H einer Strömung $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ eine in H beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset H$, für die $T_\tau \, \Delta H$ für $\tau \to \infty$ in der Hausdorff-Metrik gegen A strebt und die gemäß $T_\tau A = A$ invariant ist, so heißt A maximaler Attraktor von $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$.

Nach Babin und Vishik [2] besitzen solche dissipativen Strömungen einen maximalen Attraktor, die gleichmäßig beschränkt sind und für $\tau > 0$ vollstetige Operatoren T_τ besitzen. Der maximale Attraktor ist mit dem minimalen globalen B-Attraktor Ladshenskajas inhaltlich verwandt [3]. Ist H zusammenhängend und T_τ, $\tau \geq 0$ stetig, so ist der Attraktor ebenfalls zusammenhängend.

3. Statistische Lösungen

Bei der deterministischen Behandlung von Anfangs-Randwertproblemen, sie führt zum Begriff der individuellen Lösung, wird für fixierte Randbedingungen jedem Anfangswert $a \in H$ ein Momentanwert $u(\tau) \in H$ der schwachen Lösung zugeordnet. Obwohl dieser Lösungsbegriff umfassender als die klassische ist, erweist er sich bei manchen Anwendungen als zu eng. So dürfte er z. B. zur adäquaten Beschreibung der Turbulenz kaum geeignet sein. Weil hier nach der allgemein üblichen Vorstellung auch zufällige Einflüsse wirken, ist eine statistische Behandlung erforderlich. Dabei gelangt man, den Lösungsbegriff erweiternd, zur statistischen Lösung eines Anfangs-Randwertproblems. Bei den Navier-Stokesschen Gleichungen ist ein solcher Zugang seit langem üblich. Im Grunde genommen stellt bereits der klassische Ansatz (O. Reynold [29]) zur Behandlung des Turbulenzproblems aus heutiger Sicht ein statistisches Verfahren dar. Und zwar geht es bei der inzwischen in vielfacher Weise weiterentwickelten Reynoldschen Vorgehensweise darum, mit Hilfe der Navier-Stokesschen Gleichungen gewisse Parameterfunktionen (Momente) zu ermitteln, die die Verteilung des turbulenten Strömungsfeldes als zufällige Größe kennzeichnen. Da auf diesem Wege gewöhnlich aber nur die Momente erster und zweiter Ordnung bestimmt werden können (letztere stehen im Zusammenhang mit der turbulenten Zähigkeit des Mediums) ist eine erschöpfende Beschreibung aller statistischen Eigenschaften ausgeschlossen. Um dieses Ziel zu erreichen, muß das Verteilungsgesetz des zufälligen Prozesses selbst in den Mittelpunkt gerückt werden. Dies geschieht in der neueren, von E. Hopf [9] begründeten statistischen Turbulenztheorie. Das Verteilungsgesetz ist aber ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Zustandsraum H des Problems. Da H ein Raum von Ortsfunktionen ist, soll es nachfolgend räumliche statistische Lösung genannt werden.

Definition: Räumliche statistische Lösung

Es sei $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ eine Strömung, die von einem eindeutig lösbaren Anfangs-Randwertproblem in seinem Zustandsraum H (also einem Raum von Ortsfunktionen) erzeugt wird und m_0 ein auf (H, $\mathfrak{B}$(H)) vorgegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß. Dann nennt man die Familie $\{m_\tau, \tau \geq 0\}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen mit

$$m_\tau(\Delta H) = m_0(T_\tau^{-1}(\Delta H)), \quad \Delta H \in \mathfrak{B}(H) \qquad (6)$$

räumliche statistische Lösung des Differentialgleichungsproblems zum Anfangsmaß m_0.

Dabei ist $\mathfrak{B}$ (H) die σ-Algebra der Borelmengen in H.

Aus der statistischen Lösung folgen die Momentenfunktionen. Beispielsweise gilt für den Erwartungswert der Geschwindigkeit eines zufälligen Strömungsfeldes $EV_1(\tau, X) = \int_H v_i\, m_\tau\, dv_i$.

Die Gleichung (6) verbindet die zufälligen Aspekte der Erscheinung (m_τ) mit den deterministischen (T_τ) und geht von der Annahme aus, die Entwicklung werde nur durch die innere Dynamik des Systems beherrscht. Äußere Störungen bleiben unberücksichtigt, sofern sie nicht von den Anfangsbedingungen herrühren. Diese Vorgehensweise findet eine Parallele in der klassischen statistischen Mechanik. In neuerer Zeit wird sie durch die Erkenntnis gestützt, daß auch einfache deterministische Systeme aus sich heraus, d. h. ohne Störung von außen, Bewegungen vom Typ einer stochastischen Funktion hervorbringen können [22], [23]. In der statistischen Mechanik ist es allerdings nicht üblich, die Gleichung (6) explizit anzugeben. Vielmehr wird über den Liouvilleschen Satz von der Konstanz des Phasenvolumens (also der Invarianz des Lebesgueschen Maßes bezüglich der Hamiltonschen Strömung) die Liouville-Gleichung für die Dichtefunktion (die Radon-Nikodym-Ableitung bezüglich des Lebesgueschen Maßes) von m_τ hergeleitet. Ungeachtet weitreichender Übereinstimmungen, z. B. reflektiert (6) einen Erhaltungssatz der Wahrscheinlichkeit, ist dieser Ansatz nicht auf Probleme mit einem unendlich dimensionalen Zustandsraum übertragbar. Hier stehen solche Begriffe wie Volumen und Lebesguesches Maß nicht zur Verfügung; vor allem bewegt sich der momentane Zustand bei dissipativen Problemen in „schrumpfenden" Teilmengen des Zustandsraumes. Es ist erforderlich, andere Wege einzuschlagen.

Beim konventionellen Verfahren (vgl. z. B. [24] wird die zeitliche Entwicklung des Maßes im Spezialfall der Navier-Stokesschen Gleichung mit einer von E. Hopf [9] eingeführten und von C. Foias [10] verallgemeinerten Gleichung des charakteristischen Funktionals beschrieben. Die Hopfsche Gleichung ist aber eine Differentialgleichung in Variationsableitungen, deren Behandlung ein Problem für sich darstellt. Es dürfte daher von Interesse sien, einen anderen Zugang aufzuzeigen. Er soll nun, einem in [13] bis [15] entwickelten Konzept folgend, dargestellt werden. Indem als Ausgangspunkt die Gleichung (6) herangezogen wird, umgeht man die mit der Hopfschen Gleichung verbundenen Komplikationen. Allerdings treten andere Schwierigkeiten auf. So macht die Theorie wesentlichen Gebrauch von der Beschreibung der Dynamik durch Trajektorien im Zustandsraum (d. h. wie setzt die Existenz von T_τ als eindeutige Punkt-Punkt-Abbildung voraus). Sie versagt mithin dort, wo die Trajektorien-Vorstellung nicht angewandt werden kann. Neben den quantenmechanischen Systemen, wo es wegen der Unbestimmtheitsrelation prinzipiell nicht möglich ist, von Trajektorien zu sprechen, muß als klassisches System die dreidimensionale Flüssigkeitsströmung genannt werden. Hier ist die Eindeutigkeit im Großen nicht nachgewiesen. In dieser Situation ist der Gedanke förderlich, den Evolutionsoperator bei nicht gegebener Eindeutigkeit als mengenwertige Abbildung T_τ; $H \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ aufzufassen, die jedem Anfangswert $a \in H$ eine Menge $T_\tau a \in \mathfrak{B}$ (H) von Momentanwerten zuordnet (vgl. Bild 1). Er soll nachfolgend unter der Voraussetzung entwickelt werden, daß T_τ, $\tau \geq 0$ dem Auswahlsatz von Castaing genügt [26].

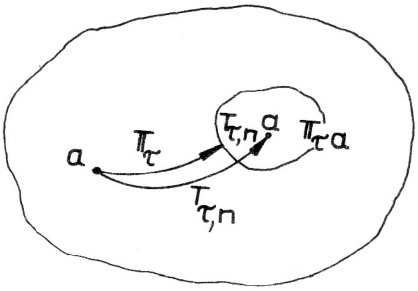

Bild 1

Nach diesem grundlegenden Resultat läßt sich den entsprechenden mengenwertigen Abbildungen eine Folge $\{T_{\tau,n}, n \in N\}$(N: Menge der natürlichen Zahlen) von Punkt-Punkt-Abbildungen $T_{\tau,n}$: H → H mit den folgenden Eigenschaften zuordnen: a) Für alle $a \in H$ gilt $T_{\tau,n}a \in T_\tau a$ und b) der Abschluß der Menge $\{T_{\tau,n}a, n \in N\}$ (um ihn zu erhalten, muß die Menge aller Häufungspunkte hinzugefügt werden) stimmt mit $T_\tau a$ überein. Die auf diese Weise erklärten Abbildungen $T_{\tau,n}$ heißen Selektoren von T_τ. Greift man einen Selektor als Repräsentanten der Entwicklung heraus, so gilt wieder (6) (vgl. dazu [27], [28]). Für die dreidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen wurde die Existenz von Selektoren in [27] bewiesen. Da sich damit die Einschränkungen von (6) auf eindeutig lösbare Probleme in einem wichtigen Fall beheben läßt, kommt der vorgeschlagenen Ausprägung des Begriffs der statistischen Lösung die notwendige Allgemeinheit zu. Zieht man noch in Betracht, daß sich die Äquivalenz mit den von Hopf und Foias bei den Navier-Stokesschen Gleichungen benutzten Lösungsbegriffen zeigen läßt, erlangt Gleichung (6) den Rang einer Grundgleichung, auf die sich weitere Überlegungen stützen lassen. Nach diesen Vorbemerkungen soll die in [13], [14] entwickelte Vorgehensweise in den Grundzügen referiert und jene Resultate genannt werden, die zum Beweis der Ergodizität von Strömungen erforderlich sind. Als Richtschnur dieser Überlegungen dient der Gedanke, die von der individuellen Lösung eines Anfangs-Randwertproblems geläufige Vorstellung der abstrakten Strömung auf die statistische Lösung auszudehnen. Um dieses Ziel zu erreichen, ist es a) erforderlich, einen geeigneten Raum zu wählen und b) einen Evolutionsoperator zu erklären, der die Entwicklung der statistischen Lösung als Bewegung in diesem Raum beschreibt.

Im Punkt a) besteht eine wesentliche Differenz zur bisherigen Auffassung in der Literatur, wo es allgemein üblich ist, die räumliche statistische Lösung m_τ als isoliertes mathematisches Objekt zu behandeln. Tatsächlich lassen sich aber auf dem Maßraum $(H, \mathfrak{B}(H))$, dessen Grundmenge der Zustandsraum H des jeweiligen Problems ist, noch weitere Maße μ definieren, die nicht einmal Wahrscheinlichkeitsmaße sein müssen. Zieht man das in Betracht, so gelangt man in natürlicher Weise dazu, als Zustandsraum der statistischen Lösung die Menge dieser Maße mit $\int_H \| u \|^2 m(du) < \infty$ zu benutzen (vgl. dazu [30]). Sie erhält die Bezeichnung $RM(H, \mathfrak{B}(H))$ und stellt einen metrisierbaren topologischen Raum dar. Dieser ist lokalkonvex.

Um den Punkt b) zu behandeln, wird die Gleichung (6) zu

$$\mu_\tau(\triangle H) = (M_\tau \mu_0)(\triangle H) = \mu_0(T_\tau^{-1}(\triangle H)), \triangle H \in \mathfrak{B}(H) \tag{7}$$

abgewandelt. Wie sie in dieser neuen Schreibweise deutlich zeigt, besteht ihr Wesen darin, jedem Anfangsmaß $\mu_0 \in RM(H, \mathfrak{B}(H))$ einen Momentanwert μ_τ zuzuordnen. Da sich zeigen läßt, daß $\mu_\tau \in RM(M, \mathfrak{B}(H))$ gilt, gelangt man in Gestalt der Familie $\{M_\tau, \tau \geq 0\}$ von Operatoren

$$M_\tau: RM(H, \mathfrak{B}(H)) \rightarrow RM(H, \mathfrak{B}(H)) \tag{8}$$

zu einer Familie von Abbildungen, die mit der Strömung im früher erklärten Sinn vergleichbar ist.

Die Analogie zwischen $\{M_\tau, \tau \geq 0\}$ und $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ reduziert sich jedoch nicht allein auf die bisher aufgezeigten formalen Aspekte. Vielmehr spiegeln sich wesentliche Qualitäten von $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ in den Merkmalen von $\{M_\tau, \tau \geq 0\}$ wider. Das betrifft vor allem die folgenden Punkte [14]:

(1) Die Operatoren M_τ bilden eine Abelsche Halbgruppe, wenn die Operatoren T_τ diese Eigenschaft besitzen.

(11) Die Stetigkeit der T_τ hat die Stetigkeit der M_τ zur Folge.

(111) Der dissipative Charakter der Strömung $\{T_\tau, \tau \geq 0\}$ überträgt sich auf die Strömung $\{M_\tau, \tau \geq 0\}$.

Um letzteres zu zeigen, geht man durch Erwartungswertbildung gemäß $Ef(u) = \int_H f(u)\,\mu_\tau(du)$ von (5) zur Beziehung

$$\int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_\tau(du) \leq e^{-c\tau} \int_H \| u(0) \|^2 \mu_\tau(du) + (1 - e^{-c\tau}) \frac{E \| f \|^2}{4c^2}$$

über. Wird auf das erste Integral der rechten Seite der Transformationssatz von Integralen (vgl. z. B. [30]) mit dem Resultat

$$\int_H \| u(0) \|^2 \mu_\tau(du) = \int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_0(du)$$

angewandt, so entsteht

$$\int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_\tau(du) \leq e^{-c\tau} \int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_0(du) + (1 - e^{-c\tau}) \frac{E \| f \|^2}{4c^2} \tag{9}$$

Es sei nun

$$\Delta RM(0) = \{ \# \mu_0 : \int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_0(du) \leq R \} \subset RM(H, \mathfrak{B}(H))$$

eine Menge von Anfangsbedingungen mit $R > \max(E \| f \|^2 (4c^2)^{-1})$.

Die daraus hervorgehende Menge ΔRM_τ von Momentanwerten besitzt die Darstellung

$$\Delta RM(\tau) = \{ \mu_\tau : \mu_\tau = M_\tau \mu_0, \int_H \| u(\tau) \|^2 \mu_\tau(du) \leq r(\tau) \}$$

mit

$$r(\tau) = e^{-c\tau} R + (1 - e^{-c\tau}) E \| f \|^2 (4c^2)^{-1} < R.$$

Wie sich aus (9) unmittelbar ablesen läßt, besitzt $\{M_\tau, \tau \geq 0\}$ eine absorbierende Menge. Beispielsweise kommt

$$A_0 = \{ \mu \in RM(H, \mathfrak{B}(H)), \int_H \| u \|^2 \mu(du) \leq R_0 \}$$

$$R_0 = (1 + \varepsilon) E \| f \|^2 (4c^2)^{-1}, \varepsilon > 0$$

diese Eigenschaft zu.

Neben den genannten Übereinstimmungen bestehen zwischen M_τ und T_τ auch Unterschiede. Eine substantielle Differenz ist darin zu sehen, daß M_τ affin ist. Es gilt nämlich

$$M_\tau(\alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2) = \alpha M_\tau \mu_1 + (1-\alpha) M_\tau \mu_2 \text{ für alle}$$

$\mu_1, \mu_2 \in RM(H, \mathfrak{B}(H))$ und alle $\alpha \in [0; 1]$.

Damit ist das hier beschriebene statistisch Entwicklungsproblem im wesentlichen linear. Und zwar gilt das unabhängig vom Bewegungsgesetz des speziellen Systems, also insbesondere auch für die nichtlinearen Navier-Stokesschen Gleichungen. Hier führt die klassische statistische Behandlung im Anschluß an Reynolds [31] bekanntlich auf ein System partieller Differentialgleichungen (dem sog. Friedman-Keller-System), dessen erste Gleichung

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial \tau} + \overline{v} \cdot \nabla \overline{v} = -\frac{1}{\varrho} \nabla \overline{p} + \nu \Delta \overline{v} - \nabla \cdot (\overline{v'v'}) + f$$

den Namen Reynolds trägt. Da dieses System auf keiner Stufe abgeschlossen ist, stößt man auf das Abschlußproblem der klassischen statistischen Turbulenztheorie, das bis heute noch keine in jeder Hinsicht zufriedenstellende Lösung gefunden hat. Der neuere Zugang bedarf dagegen keiner Abschlußhypothese. In dieser Hinsicht liefert er einen bemerkenswerten Beitrag zur statistischen Turbulenztheorie und überwindet ein prinzipielles Problem der älteren, auf Reynolds zurückgehenden Methode der Momentenfunktion. Schließlich sei noch bemerkt, daß die M_τ, $\tau \geq 0$ die Masse eines Maßes bewahren. Geht man also von einem Wahrscheinlichkeitsmaß m_0 als Anfangsmaß aus, so sind auch die daraus hervorgehenden Momentanwerte für alle $\tau > 0$ wieder Wahrscheinlichkeitsmaße. Damit besteht die Möglichkeit, den Definitionsbereich von M_τ auf Teilmengen von $RM(H, \mathfrak{B}(H))$ einzuschränken. Das besondere Interesse gilt natürlich der Einschränkung M_τ^1 von M_τ auf die Menge $RM^1(H, \mathfrak{B}(H))$ der Wahrscheinlichkeitsmaße. Auf diese Operatoren bezieht sich auch eine Aussage über die Vollstetigkeit, die weiter unten ebenfalls benötigt wird: Der Evolutionsoperator T_τ ordne für $\tau > 0$ jedem $U_0 \in H$ ein $u(\tau) \in E$ zu. Dabei sei E ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und $E \subset H \subset E^*$ ein Evolutionstripel. Ferner werden einer beschränkten Menge von Anfangsbedingungen

($\| u(\tau) \| \leqslant C(R_0,\tau) < \infty$, $\tau > 0$ zugeordnet. Dann sind die M^1_τ, $\tau > 0$ vollstetig [24].

Als eine Voraussetzung für die Ergodizität der Strömung soll nun die Existenz stationärer statistischer Lösungen behandelt werden. Bei den konservativen Systemen der klassischen statistischen Mechanik sind die Trajektorien im Zustandsraum X an eine Hyperfläche $X_E \subset X$ konstanter Energie gebunden. Der dem System zugängliche Teil von X ist, endliche Gesamtenergie vorausgesetzt, beschränkt. Da diese Eigenschaft für das Eintreten in eine stationäre Gleichgewichtsverteilung wesentlich ist (vgl. [32], S. 45), entsteht die Frage, ob ähnliche Vorstellungen auch für die hier betrachteten dissipativen Systeme zutreffen, die eine Strömung in einem unendlichdimensionalen Zustandsraum erzeugen. Nun unterscheiden sich die dissipativen Anfangs-Randwertprobleme grundsätzlich von den Hamiltonschen Gleichungen. Bei solchen Systemen, die einen Attraktor besitzen, tritt jedoch asymptotisch insofern ein vergleichbares Verhalten ein, als die Trajektorien ebenfalls an eine beschränkte Teilmenge $A \subset H$ des Zustandsraumes gebunden sind. Es soll gezeigt werden, daß diese Eigenschaft auch unter den neuen Bedingungen für das Eintreten in ein stationäres statistisches Regime maßgebend ist. Vorbereitend wird dazu der Begriff der stationären statistischen Lösung eingeführt. Und zwar soll eine solche räumliche statistische Lösung als stationär bezeichnet werden, die gemäß

$$m(\Delta H) = m(T_\tau^{-1}(\Delta H)) \qquad (10)$$

für alle $\tau \in R^+$ und alle $\Delta H \in \mathfrak{B}(H)$ gegenüber einer Translation der Zeitachse invariant ist. In der Ergodentheorie heißen solche Maße invariant bezüglich der Strömung $\{T_\tau, \tau > 0\}$ und die entsprechenden Abbildungen maßtreu.

Drückt man (10) mit Hilfe der Evolutionsoperatoren M^1_τ aus, so erweist sich m wegen der für alle M^1_τ gültigen Beziehung

$$m(T_\tau^{-1}(\Delta H)) = (M^1_\tau)(\Delta H) = m(\Delta H),\ \Delta H \in \mathfrak{B}(H) \qquad (11)$$

als allgemeiner Fixpunkt der Operatorenfamilie $\{M^1_\tau, \tau \geqslant 0\}$.

Diese Feststellung ist für die Methodik des weiteren Vorgehens von großer Bedeutung, da mit dem Satz von Markov-Kakutani eine Aussage über die Existenz allgemeiner Fixpunkte von Operatorenfamilien zur Verfügung steht. Danach besitzt eine Familie kommutierender, stetiger und affiner Abbildungen $S: X \to X$ in der kompakten, konvexen Teilmenge X eines lokalkonvexen Raumes einen allgemeinen Fixpunkt. Wie bereits festgestellt wurde, erfüllen die Operatoren $M^1_\tau, \tau \geqslant 0$ einige Voraussetzungen dieses Satzes von Haus aus. So sind sie stetig, affin und bilden eine kommutative Gruppe. Wegen $RM^1(H,\mathfrak{B}(H)) \subset RM(H,\mathfrak{B}(H))$ wirken die M^1_τ außerdem in der konvexen Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes. Offen ist damit lediglich die Frage der Kompaktheit des Definitionsbereiches. Wie sich zeigt, ist dafür die Dissipativität der Strömung $\{M_\tau, \tau \geqslant 0\}$ maßgebend. Ist nämlich die Strömung dissipativ, dann gibt es für jede beliebige Menge $\Delta RM^1 \subset RM^1(H, \mathfrak{B}(H))$ von Anfangsbedingungen ein T derart, daß für $\tau \geqslant T$ gilt $M_\tau(\Delta RM_1) \subset A^0$. Es sei nun $A_0 = M^1_\tau A^0$. Sind die Voraussetzungen erfüllt, unter denen M^1_τ vollstetig ist, dann ist A_0 relativ kompakt in $RM^1(H,\mathfrak{B}(H))$. Man kann zeigen, daß A_0 (ebenfalls wegen der Dissipativität) dann auch kompakt ist. Da sich ferner bei dissipativen Strömungen die zeitliche Entwicklung ganz in der absorbierenden Menge abspielt, liegt in Gestalt von $A_0 \subset RM^1(H, \mathfrak{B}(H))$ eine kompakte, konvexe Teilmenge eines lokalkonvexen Raumes vor, die zur Anwendung des Fixpunktsatzes berechtigt. Somit besitzen solche Anfangs-Randwertprobleme, die in ihrem Zustandsraum eine dissipative Strömung erzeugen und die weiteren Voraussetzungen erfüllen, stationäre statistische Lösungen [14].

Strömungen $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ mit einem allgemeinen Fixpunkt $u = T_\tau u$, $\tau \geqslant 0$, $u \in H$, bei denen also die individuelle Lösung stationär wird, besitzen in Gestalt des auf u konzentrierten Dirac-Maßes δ_u trivialerweise eine stationäre statistische Lösung. Daher sei bemerkt, daß die Stationarität der individuellen Lösung nicht zu den Voraussetzungen obiger Überlegungen gehört.

4. Zur Ergodizität dissipativer Strömungen

Beim Studium dissipativer Anfangs-Randwertprobleme, die einen Attraktor besitzen, steht das Langzeitverhalten im Vordergrund. Demgemäß treten Übergangsvorgänge als temporäre Erscheinungen zurück. Dieser Sachverhalt, der eine Vereinfachung bedeutet, ist nicht die einzige Eigenschaft dissipativer Strömungen, die ihre besondere Behandlung rechtfertigt. Bedeutsam dürfte auch der Umstand sein, daß die Frage nach der Ergodizität des Vorgangs gestellt und die Bedingungen genannt werden können, unter denen wahrscheinlichkeitstheoretischer Mittelwert (das Ensemblemittel) und Zeitmittel der Zustandsgröße übereinstimmen.

In der Ergodentheorie (vgl. z. B. [23]) werden solche meßbare Transformationen $T: X \to X$ in einem Maßraum $(X, \mathfrak{X}, m)$ als ergodisch bezeichnet, für die aus der Invarianz einer Menge $\Delta X \in \varkappa$ gemäß $T^{-1}(\Delta X) = \Delta X$ entweder folgt $m(\Delta X)$ oder $m(\Delta X) = 1$. Anders ausgedrückt: Eine maßtreue Transformation ist genau dann ergodisch, wenn sich X nicht in zwei disjunkte T-invariante Mengen streng positiven Maßes zerlegen läßt (letztere Eigenschaft nennt man auch metrische Transitivität).

Zur Ergodizität maßtreuer Transformationen sind weitere Eigenschaften äquivalent. Beispielsweise gibt es zu zwei Mengen ΔX_1, ΔX_2 mit $m(DX_1)$, $m(\Delta X_2) > 0$ stets ein n derart, daß $m(T^{-n}(\Delta X_1) \cap \Delta X_2) > 0$ ist. Geht man zu parameterunabhängigen Transformationen, also zu den hier interessierenden Strömungen $T_\tau: H \to H$ über, so zeigt sich ein weiterer Zusammenhang. Als Schlußfolgerung aus dem Ergodentheorem von Birkhoff ergibt sich nämlich für ergodische Strömungen die Gleichheit der erwähnten Mittelwerte entsprechend

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_\tau X)\,d\tau = \frac{1}{m(H)} \int_H f\,dm$$

unter der Voraussetzung $f \in L_1(H, \mathfrak{B}(H), m)$.

Mit dem Nachweis invarianter Maße wurde im Abschnitt 3 eine Grundlage zur Behandlung ergodischer Strömungen geschaffen. Genauer zu untersuchen ist noch die metrische Transitivität. Dabei wird sich zeigen, daß jene Strömungen diese Eigenschaft besitzen, in deren Zustandsraum ein Attraktor existiert. Da die Trajektorien den Attraktor erst nach langer Zeit erreichen, tritt die Ergodizität der Strömung also nur asymptotisch ein. Ein erstes, noch sehr allgemeines Resultat, das sich in ähnlicher Form auch in der Literatur findet ([7], S. 26) besteht in dieser Aussage: Eine Strömung $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ mit dem zusammenhängenden Zustandsraum H ist ergodisch, wenn (i) für $\tau \to \infty$, ein bezüglich der Strömung invariantes Maß auf $(H, \mathfrak{B}(H))$ existiert und (ii) $\{T_\tau \geqslant 0\}$ einen kompakten Attraktor besitzt. Ein Beweis läßt sich wie folgt erbringen. Zunächst ist $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ wegen (i) asymptotisch maßtreu. Ferner besitzt die Strömung in A eine invariante Menge. Diese ist zusammenhängend. Außerdem ist A als kompakte Menge Element der σ-Algebra $\mathfrak{B}(H)$. Nun ist mit A auch $H \setminus A$ invariant, und es gilt $H \setminus A \in \mathfrak{B}(H)$. Da A zusammenhängend ist, sind das die einzigen invarianten Mengen. Für alle $\tau \to \infty$ gelangen alle Trajektorien in A. Daher ist m auf A konzentriert: $m(A) = 1$. Andererseits muß dann $m(H \setminus A) = 0$ sein. Also folgt aus der Invarianz einer Menge $\Delta H \in \mathfrak{B}(H)$ entweder $m(\Delta H) = 0$ oder $m(\Delta H) = 1$, und die Strömung ist metrisch transitiv. Daher ist sie auch (asymptotisch) ergodisch.

Abstrakte Strömungen widerspiegeln Entwicklungen. Im vorliegenden Beitrag interessieren Systeme, deren Evolution durch eine Anfangs-Randwertaufgabe regiert wird. Dies wird allerdings noch nicht genügend deutlich. Indem so ein wesentlicher Aspekt nur mittelbar angesprochen wird, reicht das bisher erzielte Resultat noch nicht aus. Es muß noch durch Aussagen über jene Eigenschaft des Bewegungsgesetzes konkretisiert werden, die zur Ergodizität des Vorgangs führen. Dies soll nun nachgeholt werden.

Gegeben sei also ein Anfangs-Randwertproblem mit dem reellen, separablen Hilbertraum H als Zustandsraum, dessen Evolutionsoperatoren die folgenden Eigenschaften besitzen: Sie seien (i) stationär und stetig sowie (ii) gleichmäßig beschränkt. Ferner möge (iii) eine in H kompakte absorbierende Menge $A_0 \subset H$ existieren und (iv) jedem $u_0 \in H$ eindeutig ein $u(\tau) \in E$ zugeordnet werden ($E \subset H \subset E^*$ Evolutionstripel). Dabei sei (v) $u \to \|u\|_E$ für alle $m_\tau \in RM^1(H, \mathfrak{B}(H))$ integrierbar und beschränkt. Dann ist die von der Aufgabe in H erzeugte Strömung asymptotisch ergodisch.

Zum Beweis: Die Voraussetzungen (i) – (iii) gewährleisten nach Satz 1.1. in [2] die Existenz eines kompakten maximalen Attraktors.

Darüber hinaus besitzt das Problem stationäre statistische Lösungen. Zunächst bilden wegen (i) die M_τ, $\tau \geqslant 0$ eine Abelsche Gruppe und sind daher kommutativ. Sie sind darüber hinaus affin. Mit den Voraussetzungen (iii) – (v) besitzt das Problem schließlich stationäre statistische Lösungen. Die weiteren Voraussetzungen des Satzes von markov-Kakutani werden durch (ikii) – (v) gesichert. Nach (iii) ist nämlich $\{T_\tau, \tau \geqslant 0\}$ dissipativ ,was sich, wie im Abschnitt 3 gezeigt wurde, auf $\{M_\tau, \tau \geqslant 0\}$ überträgt. Somit verfügt auch $\{M_\tau, \tau \geqslant 0\}$ über eine absorbierende Menge $A_0 \in RM^1(H, \mathfrak{B}(H))$. Da (iv) und (v) die Vollstetigkeit von M_τ zur Folge haben, ist A_0 kompakt. So sind alle Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt, und es existieren stationäre statistische Lösungen.

Zum Schluß soll dieses allgemeine Resultat am Beispiel der zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen mit dem Zustandsraum $\breve{H}$ erläutert werden.

Wie sich nachweisen läßt, kommen den von den zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen in $\breve{H}$ erzeugten Strömungen alle erforderlichen Eigenschaften zu, die zur Ergodizität des Vorgangs führen. Dies kann hier allerdings nicht im einzelnen ausgeführt werden. Vielmehr ist es der Kürze halber erforderlich, in einigen Punkten auf bekannte Resultate aus der Lösungstheorie hinzuweisen.

Zunächst ist, da die zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen in $\breve{H}$ eindeutig lösbar sind, die Familie $\{M_\tau, \tau \geqslant 0\}$ der Evolutionsoperation definiert. Außerdem wird jedem $v(0)$ für $\tau > 0$ ein $v(\tau) \in \breve{H}^1$ zugeordnet. Die absorbierende Menge, deren Existenz aus der Abschätzung (5) hervorgeht, ist somit für $\tau > 0$ eine Teilmenge von $\breve{H}^1 \subset \breve{H}$. Bei beschränktem G mit dem Rand $\partial G \in C^2$ ist $\|v(\tau)\|_{\breve{H}_1}$ beschränkt [1]. A_0 stellt daher eine beschränkte Teilmenge von $\breve{H}_1$ dar. Nach dem Satz von Rellich-Kondraschow ([35], S. 32) ist aber eine in $\breve{H}^1$ beschränkte Kugel in $\breve{H}$ kompakt. Damit erfüllen die zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen die Voraussetzungen (iii), (iv) des Satzes über die Ergodizität von Strömungen.

Sind die äußeren Kräfte f, die Zähigkeit ν und die Randbedingungen explizit zeitunabhängig, so ist der Momentanwert $v(\tau)$ invariant gegenüber einer Translation der zeitachse, d. h., die Strömung ist stationär.

Um die Stetigkeit von T_τ, $\tau \geqslant 0$ zu zeigen, muß die Differenz $u = v_1 - v_2$ zweier Momentanwerte betrachtet werden, die bei gleichen äußeren Kräften und gleichen Randbedingungen aus verschiedenen Anfangsbedingungen hervorgehen. u genügt der Aufgabe

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \nu \Delta u + v_1 \cdot \nabla v_1 - v_2 \cdot \nabla v_2 + \frac{1}{\varrho} \nabla (p_1 - p_2) = 0$$

$$\nabla \cdot u = 0, u \big|_{\partial G} = 0, u(0) = v_1(0) - v_2(0).$$

Eine Multiplikation mit $u \in \breve{H}^1$ und Integration über G liefert (dabei wurde noch v_1 durch v_2 und u ausgedrückt)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \|u\|^2_{\breve{H}} + \nu \|u\|^2_{\breve{H}_1} - \int_G (u \cdot \nabla v_2) \cdot u \, dx = 0. \quad (12)$$

Das Integral läßt sich für n = 2 gemäß

$$\left| \int_G (u \cdot \nabla v_2) u dx \right| \leqslant \sqrt{2} \, \|u\|_{\breve{H}} \, \|v_2\|_{\breve{H}_1} \quad (13)$$

abschätzen ([19], S. 234). Wird das zur weiteren Umformung von (12) benutzt, entsteht schließlich die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\tau} \|u\|_{\breve{H}}^2 \leqslant \frac{1}{\nu} \|u\|_{\breve{H}}^2 \, \|v_2\|_{\breve{H}_1}^2$$

mit der Lösung

$$\|u(\tau)\|_{\breve{H}}^2 \leqslant \|u(0)\|_{\breve{H}}^2 \, e^{\frac{1}{\nu} \int_0^T \|v_2(\vartheta)\|_{\breve{H}}^2 d\vartheta} \quad (14)$$

Nach der energetischen Ungleichung (4) ist das Integral endlich. Daher folgt aus der Beziehung (14), die ausführlicher geschrieben

$$\| T_\tau v_1(0) - T_\tau v_2(0) \|_{\dot{H}}^2 \leqslant e^{\frac{1}{\nu} \int_0^T \| v_2(\vartheta) \|_{\dot{H}}^2 d\vartheta} \| v_1(0) - v_2(0) \|^2$$

lautet, die Stetigkeit von T_τ, $\tau \geqslant 0$.

Ferner ist die Strömung $\{T_\tau,\ \tau \geqslant 0\}$ gleichmäßig beschränkt. Wie nämlich aus (5) folgt, existiert zu jedem $R > 0$ und für alle $\tau \in [0, \infty]$ ein solches $C(R)$, daß für $\| v(0) \|_H < R$ $\| T_\tau v(0) \| < C(R)$ ausfällt. Demnach besitzt $\{T_\tau,\ \tau \geqslant 0\}$ auch die Eigenschaften (i) und (ii). Da $\| v(\tau) \|_{\dot{H}_1}$ für $\tau > 0$ beschränkt ist, kann schließlich auch (v) als erfüllt gelten. Damit ist die von den zweidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen erzeugte Strömung asymptotisch ergodisch.

Ein Versuch, dieses Resultat auf den dreidimensionalen Fall zu verallgemeinern, stößt auf Schwierigkeiten. Sie sind weniger darin zu suchen, daß es wegen der hier nicht nachgewiesenen eindeutigen Lösbarkeit im Großen nicht möglich ist, Evolutionsoperatoren in der üblichen Weise einzuführen. (Dieser Defekt könnte ja auf dem vorn skizzierten Wege mit Hilfe des Auswahlsatzes behoben werden.) Vielmehr besteht das Problem im Nachweis der Stetigkeit von T_τ. Die dafür erforderliche Abschätzung (13) gilt nur für $n = 2$ und steht zur Behandlung der dreidimensionalen Navier-Stokesschen Gleichungen nicht zur Verfügung.

LITERATUR

[1] Ладыженская, О. А.: О динамической системе порождаемои уравнениями Навье-Стокса Зап. науч. сем. ЛОМИ 27 (1972), 91 – 114.

[2] Бабин, А. В., Бижик, М. И.: Аттрактори еволюционных уравнений з частными производными и оценки их размерности. УМН 38 (1983), 133 – 187.

[3] Ладыженская, О. А.: Минимальные глобальные В-аттракторы полигрупп и начально-краевых задач для нелинейных уравнении з счастными производними. Док. АН СССР 294 (1987), 33 – 37.

[4] Ладыженская, О. А.: О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений навье-стокса и других уравнений с частными производными. УМН 42 6 (1987), 25 – 30.

[5] Constantin, P.; Foias, C.; Temam, R.: Attractors representing turbulent flows. Mem. Amer. Math. Soc. 314 (1985), 3 – 67.

[6] Temam, R.: Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Fluid Mechanics. Proc. Symp. Pure Math. 45 (1986), 431 – 445.

[7] Eckmann, J. P., Ruelle, D.: Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys. 57,3 (1985), 617 – 656.

[8] Förste, J.: Über die Dimension eines Attraktors der verallgemeinerten Navier-Stokesschen Gleichungen. IMech der AdW der DDR, P Mech 10/1983.

[9] Hopf, E.: Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rational. Mech. Anal. 1 (1952), 87 – 123.

[10] Foias, C.: Statistical study of Navier-Stokes equations I, II. Rend. Sem. Math. Univ. Padova 48 (1973), 219 – 348; 49 (1973), 9 – 123.

[11] Förste, J.: Zur statistischen theorie der magnetohydrodynamischen Turbulenz. ZAMM 67 (1987), 337 – 340.

[12] Förste, J.: Zur statistischen Beschreibung turbulenter Strömungen in Mehrphasenmedien. ZAMM 65 (1985), 341 – 345.

[13] Biehounek, J.: Über asymptotische Eigenschaften von Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen. IMech der AdW der DDR, Report 10/1987.

[14] Biehounek, J.: Über dissipative Strömungen und statistische Lösungen von Anfangs-Randwertproblemen. ZAMM 69 (1989).

[15] Kempe, V.: Theorie stochastischer Systeme. Berlin 1974.

[16] Heinrich, W., Hennig, K.: Zufallsschwingungen mechanischer Systeme. Berlin 1977.

[17] Soong, T. T.: Random Differential Equations in Science and Engineering. New York, London 1973.

[18] Ладыженская, О. А.: Математические вопроси динамики вязкиы несжимаемых жидкостей. Москва 1980.

[19] Темам, Р.: Уравнения Навье-Стокса, Москва 1981.

[20] Leonov, G. A., Reitmann, V.: Attraktoreingrenzungen für nichtlineare Systeme. Leipzig 1987.

[21] Biehounek, J.: unveröffentlichtes Manuskript.

[22] Lorenz, E. N.: Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci, 20 (1963), 130 – 141.

[23] Anishchenko, V. S.: Dynamical Chaos – Basic Concepts. Leipzig 1987.

[24] Visik, M. I., Fursikov, A. V.: Mathematische Probleme der statischen Hydromechanik. Leipzig 1986.

[25] Biehounek, J.: In: Umlaufkolloquium über Probleme der Turbulenz. IMech der AdW der DDR, Preprint 9 (1986).

[26] Castaing, Ch., Valadier, M.: Convex Analysis and Measurable Multifunctions. Berlin, Heidelberg, New York 1977.

[27] Вершик, А. М., Ладыженская, О. А.: Об эволюции мер, определяемой уравнениями навье-стокса и о расрешимости задачи коши для статистической уравнения ыопфа. Док. АН СССР, 1976, 1, 26 – 29.

[28] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen. Akademie-Verlag Berlin 1974.

[29] Reynolds, O.: On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion. Phil. Trans. R. Soc. 186 (1895), 123 – 164.

[30] Schmalfuß, B.: Invariant attracting sets of nonlinear stochastic differential equations. In: Langer, H., Nollau, V. (ed.): Markov processes and control theory. Akademie-Verlag 1989.

Anschrift des Verfassers:
Dr. rer. nat. J. Biehounek
Technische Hochschule Köthen
Sektion M/N/I