

Über die Berechnung der Meridianströmung von hydraulischen Turbomaschinen

Lakatos Károly

Zur Berechnung von Turbomaschinen ist es weit verbreitet, die dreidimensionale Strömung auf die Lösung zweier nachfolgender zweidimensionaler Strömungsaufgaben zurückzuführen. Man berechnet zuerst die rotationssymmetrischen Meridianstromlinien in der radialen Ebene zur Maschinendrehachse bei unendlicher Schaufelzahl. Dann erfolgt die Berechnung an den durch Drehung der Meridianstromlinien erzeugten Stromflächen bei endlicher Schaufelzahl. Die beiden Strömungsaufgaben sind natürlich nicht unabhängig voneinander, aber die Lösung wird auch von der geometrischen Beschaffenheit der Konstruktionselemente vor und nach der Beschauung beeinflusst. Ein korrekter Entwurf ist also nur iterativ durchführbar.

Eine Vielzahl der Berechnungen von Meridian- und Gitterströmung ist bekannt [1] bis [6]. Die Bestimmung der zur Lösung der sich ergebenden Differentialgleichungen notwendigen Randbedingungen ist in Kenntnis der Gesamtkonstruktion nur bedingt möglich. Sie können bei unseren heutigen Kenntnissen nur aufgrund gewisser Meßverfahren ermittelt werden. Im folgenden sollen anhand der Gleichungssysteme der Meridianströmung die erforderlichen Vorschriften für die Randbedingungen erörtert werden. Die Differentialgleichung zur Beschreibung der Meridianströmung ist linear von elliptischem Charakter.

Es strömt eine reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit durch ein halbaxiales Laufrad mit unendlicher Schaufelzahl. Am Eintrittspunkt in den untersuchten Bereich sind sämtliche Strömungsparameter stationär und rotationssymmetrisch. Es wird angenommen, daß im Laufrad und an den Schaufelkanten keine Wirbelablösung entsteht. In diesem Falle ist die Strömung im untersuchten Bereich rotationssymmetrisch und stationär. Die Gleichungen werden in einem orthogonalen krummlinigen Koordinatensystem mit den Koordinaten q_1, q_2, q_3 dargestellt (Bild 1).

Nach dem Obenerwähnten ist das erste Glied des Gleichungssystems zur Beschreibung der Strömung die stationäre Eulersche Bewegungsgleichung

$$\text{rot } \vec{c} \times \vec{c} = \vec{f} - \text{grad} \left(\frac{c^2}{2} - \frac{p}{\rho} \right) \quad (1)$$

sowie die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{c} = 0. \quad (2)$$

Die Feldkraft \vec{f} ist die Zwangskraft für die Schaufeln. Es ist zweckmäßig, die Differentialgleichungen aus dem Abso-

lutssystem in das rotierende Relativsystem zu übertragen. Für die Relativgeschwindigkeit \vec{w} gilt die Gleichung (3):

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (3)$$

Nach Transformation (3) der Grundgleichungen (1), (2) erhalten wir die Gleichungen (4) und (5):

$$\text{rot } \vec{c} \times \vec{w} = \vec{f} - \text{grad } E, \quad (4)$$

$$\text{div } \vec{w} = 0. \quad (5)$$

Die Energie E ist nach Gleichung (6) bestimmt:

$$E = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \frac{p}{\rho} - \omega r c_2. \quad (6)$$

Da eine schaufelkongruente Strömung untersucht wird, liegt der relative Geschwindigkeitsvektor \vec{w} tangential zur Schaufeloberfläche. Diese kinematische Bedingung kann durch den Normalenvektor \vec{n} der Schaufeloberfläche nach Bild 1 ausgedrückt werden:

$$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0. \quad (7)$$

Es wird die Strömung einer reibungsfreien Flüssigkeit betrachtet. Damit hat die Zwangskraft \vec{f} keine Komponente in der Tangentialebene der Schaufel, und es ergibt sich:

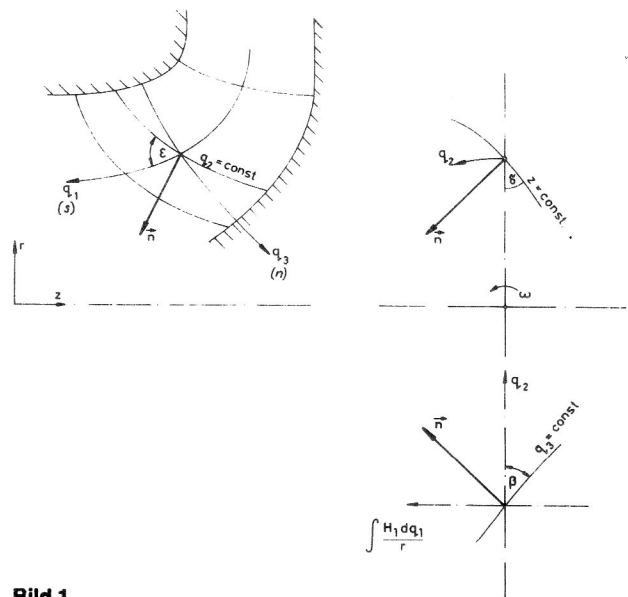


Bild 1

$$\vec{f} \cdot \vec{w} = 0. \quad (8)$$

Man multipliziere die Bewegungsgleichung (4) skalar mit dem relativen Geschwindigkeitsvektor \vec{w} . Nach Ordnen erhält man – unter Berücksichtigung von (8) – die für die Meridianströmung gültige Bernoullische Gleichung

$$\vec{w} \cdot \text{grad } E = 0,$$

wonach die im rotierenden relativen System wirkende Energie in Richtung der relativen Stromlinie konstant bleibt. Unter Berücksichtigung der Rotationssymmetrie können wir dasselbe in dem orthogonalen krummlinigen Koordinatensystem nach Bild 1 aufschreiben, und man erhält:

$$\frac{c_1}{H_1} \frac{\partial E}{\partial q_1} + \frac{c_3}{H_3} \frac{\partial E}{\partial q_3} = 0. \quad (9)$$

Danach wird die Bewegungsgleichung (4) mit dem Normalenvektor \vec{n} vektoriell und mit dem Einheitsvektor \vec{e}_2 skalar multipliziert. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (7), (8) und nach Durchführung der vorgeschriebenen Operationen erhalten wir die folgende Gleichung:

$$(c_2 - \omega r)(\vec{n} - \text{rot } \vec{c}) = (\vec{e}_2 - \text{rot } \vec{c}) = (\vec{e}_2 \times \vec{n}) \cdot \text{grad } E.$$

Die Rotationssymmetrie und der Zusammenhang der absoluten und der relativen Geschwindigkeit ermöglichen gewisse Reduktionen in der obigen Gleichung, so ergibt sich die Gleichung (10):

$$\begin{aligned} & \frac{c_1}{H_1 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_3} (c_1 H_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (c_3 H_3) \right\} \\ & = \frac{1}{H_3} \frac{\partial E}{\partial q_3} + \frac{c_1 \cot \beta}{H_2} \left\{ \frac{\cot \epsilon}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (c_2 H_2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (c_2 H_2) \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Auch die Kontinuitätsgleichung kann nach der Gleichung (11) ausführlich geschrieben werden. Schließlich erhält man eine kinematische Gleichung in der Form der Gleichung (12):

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} (c_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (c_3 H_1 H_2) \right\} = 0, \quad (11)$$

$$c_1 \cot \beta - c_2 + \omega r + c_3 \cot \beta \cot \epsilon = 0. \quad (12)$$

Die zu lösenden Gleichungen für die Meridianströmung sind also (9), (10), (11), (12). Zur Lösung wird folgendes angenommen:

1. Die Verteilung der absoluten Energie e_E ist im Eintrittsquerschnitt homogen; d. h., e_E ist gleich konstant:

$$e_E = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)_E + \frac{p_E}{\rho} = \text{konst.}$$

Es erweist sich als zweckmäßig, die relative Energie E mit der absoluten Energie e_E aufzuschreiben, siehe Gleichung (13):

$$E_E = e_E - (\omega r c_2)_E. \quad (13)$$

2. Die Koordinaten q_1, q_2 sind so angenommen, daß die beiden äußeren Stromflächen des Meridiankanals Koordinatenflächen sind. Nach der Bernoullischen Gleichung (9) bleibt die relative Energie E längs der relativen Stromlinien – und folglich an den entsprechenden Rotationsflächen, die durch die Koordinatenflächen q_1, q_2 gut angenähert sind – konstant. Das heißt, E an einer Koordinatenfläche q_1, q_2 ist gleich dem im Eintrittsquerschnitt gültigen Wert E_E . Daraus folgt, daß die Ableitung der Energie E in der Koordinatenrichtung q_3 mit den Eintrittswerten nach der Gleichung (14) ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_3} \frac{\partial E}{\partial q_3} &= \left(\frac{1}{H_3} \frac{\partial E}{\partial q_3} \right)_E \frac{(H_3 dq_3)_E}{H_3 dq_3} = \\ &= \omega \left[\frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (r c_2) \right] \frac{r c_1}{r_E c_{1E}}, \end{aligned} \quad (14)$$

weil nämlich zwischen zwei benachbarten Koordinatenflächen wegen der Kontinuitätsbedingung bei guter Annäherung gilt:

$$c_{1E} r_E (H_3 dq_3)_E = c_1 r H_3 dq_3.$$

Es sei hier erwähnt, daß die Aufstellung des Koordinatensystems q_1, q_3 , in dem die äußeren Stromflächen gleichfalls Koordinatenflächen sind, keine einfache Aufgabe ist. Es gibt eine Möglichkeit, mit Hilfe der bekannten Bovetschen Kurven ein der erwähnten Voraussetzung entsprechendes Koordinatensystem zu konstruieren. Die Koordinatenlinien in der Meridianebene werden einerseits durch die Bovetschen Kurven, andererseits durch ihre orthogonalen Trajektorien gebildet. Da die Bovetschen Kurven auch analytisch ausgegeben werden können, bedeutet es keine Schwierigkeit, die zugehörigen Trajektorien numerisch zu bestimmen. In Bild 2 sind einige Beispiele für verschiedene spezifische Drehzahlen n_s dargestellt.

Im folgenden kann also das orthogonale Koordinatennetz q_1, q_3 mit seinen Gitterpunkten als bekannt betrachtet werden. Führt man die Stokessche Stromfunktion Ψ ein:

$$c_1 H_2 H_3 = \frac{\partial \Psi}{\partial q_3},$$

$$c_3 H_1 H_2 = \frac{\partial \Psi}{\partial q_1},$$

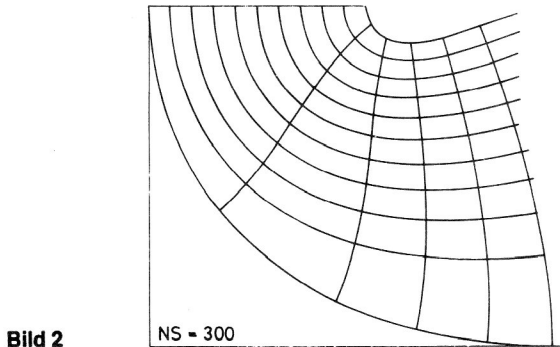
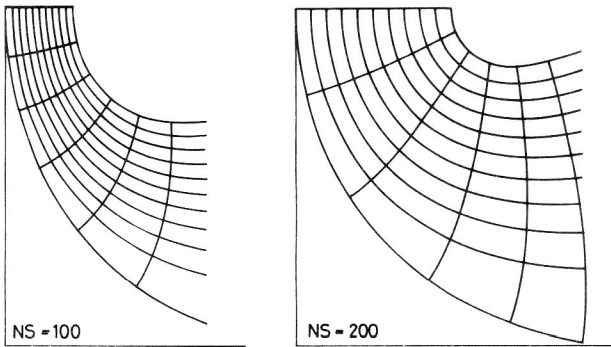


Bild 2

wird die Kontinuitätsgleichung automatisch erfüllt, und die Bewegungsgleichung ergibt sich in Form der Gleichung (15). Damit erhält man die gesuchte Differentialgleichung, die zur Berechnung der Meridianströmung geeignet ist:

$$\begin{aligned}
 & (1 + \cot^2 \beta \cot^2 \epsilon) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s^2} - 2 \cot^2 \beta \cot \epsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial s \partial n} \\
 & + (1 + \cot^2 \beta) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial n^2} + \left\{ \frac{\cot^2 \beta \cot \epsilon}{R_s} + \frac{1}{R_n} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \right. \\
 & \left. - \cot \beta \left[\cot \epsilon \frac{\partial}{\partial s} (\cot \beta \cot \epsilon) - \frac{\partial}{\partial n} (\cot \beta \cot \epsilon) \right] \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \\
 & + \left\{ \frac{\cot^2 \beta \cot \epsilon}{R_n} + \frac{1}{R_s} - \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right. \\
 & \left. - \cot \beta \left[\cot \epsilon \frac{\partial}{\partial s} (\cot \beta) - \frac{\partial}{\partial n} (\cot \beta) \right] \right\} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \\
 & = 2 \omega r \cot \beta \left[\cot \epsilon \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{\partial r}{\partial n} \right] - r^2 \omega \left[\frac{1}{rc_1} \frac{\partial}{\partial n} (rc_2) \right].
 \end{aligned} \quad (15)$$

R_s und R_n sind die Krümmungsradien der Koordinatenlinien q_1 beziehungsweise q_2 .

Die lineare Differentialgleichung (15) ist von elliptischem Charakter, da die aus den Koeffizienten der Glieder zweiter Ordnung gebildete Diskriminante in jedem Fall negativ ist:

$$\cot^2 \beta \cot^2 \epsilon - (1 + \cot^2 \beta \cot^2 \epsilon)(1 + \cot^2 \beta) < 0.$$

Zur Lösung der Gleichung (15) muß man also auch die Verteilung der Stromfunktion Ψ am Rande des untersuchten Bereiches kennen. An den Wänden gibt es keine Durchströmung, wodurch dort $\Psi = \text{konstant}$ ist. In den Ein- und Austrittsquerschnitten können die Geschwindigkeitsprofile zum Beispiel aufgrund von Messungen abgeschätzt werden.

Hauptsymbole

q_3	Kurvenschar in der Meridianebene, senkrecht zu den q_1 -Koordinatenlinien
q_2	Winkelcoordinate in Umfangsrichtung
q_3	Kurvenschar in der Meridianebene, senkrecht zu den q_1 -Koordinatenlinien
ρ	Dichte
p	Druck
\vec{f}	Feldkraft
\vec{c}	absoluter Geschwindigkeitsvektor
\vec{w}	relativer Geschwindigkeitsvektor
ω	Winkelgeschwindigkeit
\vec{r}	Ortsvektor vom Ursprung zum Aufpunkt
E	auf die Masseneinheit bezogene Energie im rotierenden System
\vec{n}	Normalenvektor der Schaufeloberfläche
H_1, H_2, H_3	Lamésche Koeffizienten
Ψ	Stromfunktion
β, ϵ	Schaufelwinkel

LITERATUR

- [1] Lorenz, M.: Theorie und Berechnung der Vollturbinen und Kreiselpumpen. VDI Zeitschrift B. 49. Nr. 11, 14. Okt. 1905.
- [2] Bauersfeld, W.: Zuschrift an die Redaktion. VDI Zeitschrift B. 49. Nr. 49. 9. Dec. 1905.
- [3] Nyíri, A.: Computation of the Meridional Flow Pattern of Hydraulic Machines. Acta Techn. Hung. 45/1-2 Budapest 1964.
- [4] Neal, A. N.: Through-Flow Analysis of Pumps and Fans NEL Report No. 669. Aug. 1980.
- [5] Baranyi, L.: Az áramlástechnikai gépekben kialakuló meridiánáramlás potenciálmélei megoldása Doktori értekezés, Miskolc 1980.
- [6] Lakatos, K.: Meridiánáramlás számítása Doktori értekezés, Miskolc 1983.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Lakatos Károly
 TU Miskolc
 Lehrstuhl für Strömungs- und wärmetechnische Maschinen
 3315 Miskolc-Egyetemváros
 Ungarn