

Anwendung semianalytischer FEM-Lösungen in der Elastizitätstheorie

Georgi Kolarow, Michail Michajlov

Es wird eine Weiterentwicklung der Finiten-Prismen-Methode (FPM) dargelegt. Bei der FPM wird durch eine empirische Fourierreihenentwicklung die räumliche Aufgabe der Elastizitätstheorie für prismatische Körper auf eine Summe von quasi-ebenen Aufgaben zurückgeführt. In der vorliegenden Arbeit ist eine systematische Herangehensweise zur Erhaltung der Eigenfunktionen vorgestellt, und es sind alle möglichen Fälle betrachtet. Ein Vergleich mit der bisherigen Lösung zeigt die breiteren Anwendungsmöglichkeiten der FPM sowie ihre Grenzen. Die vorgestellten Ergebnisse mit der FPM weisen wesentliche Vorteile gegenüber der klassischen FEM auf.

1. Einleitung

Es existieren leistungsfähige moderne numerische Methoden zur Lösung von zwei- und dreidimensionalen elastischen Aufgaben in Gebieten mit beliebiger Konfiguration, wobei am häufigsten die Finite-Elemente-Methode (FEM) angewendet wird. Mit Vergrößerung der Dimension der Aufgabe erhöht sich auch die Zeit für die Datenvorbereitung sowie die Rechenzeit und der Speicherplatz, die für die Lösung der Aufgabe notwendig sind.

Es ist bekannt, daß räumliche Aufgaben der Elastizitätstheorie in eine Summe von quasi zweidimensionalen Aufgaben überführt werden können. Die erforderliche Transformation kann nur für Körper angewendet werden, die konstante Geometrie und Eigenschaften entlang einer Achse haben. Sie ist bekannt als Finite-Prismen-Methode (FPM) [1] bis [3], [5]. Eine ähnliche Lösung existiert auch für Platten und Schalen – die Finite-Streifen-Methode (finite strip method) – [2], [4] bis [6], [9]. Diese Methoden werden erfolgreich zur Lösung von bestimmten Typen von linearen und für einige geometrisch nichtlineare Aufgaben [7], [8] angewendet. Die Transformationen werden direkt in die Variationsformulierung einbezogen und stützen sich auf die Trennung der Variablen. Dies ist eine empirische Methode, wobei für den analytischen Teil der Lösung eine Funktion angenommen und später geprüft wird, ob sie die Randbedingungen an den beiden Enden des Körpers befriedigt. In der Potentialtheorie ist die Methode der Finiten Integraltransformation (MFIT) bekannt, welche für die Reduzierung der Dimension der Aufgaben bei Körpern mit endlichen Abmessungen angewendet wird [13]. Eine ähnliche Methode wird auch bei den Untersuchungen von Platten benutzt [10] bis [12].

Aus diesen Überlegungen folgen die Ziele dieser Arbeit. Zunächst wird die dreidimensionale Aufgabe der Elastizitätstheorie in eine quasi-zweidimensionale Aufgabe überführt. Diese soll durch die Anwendung einer systematischen Herangehensweise erfolgen, wie MFIT und nicht durch empirische Auswahl von bestimmten Funktionen. Auf diese Weise kann die reduzierte Aufgabe getrennt nach einer beliebigen Methode gelöst werden – analytisch oder numerisch, einschließlich mit der FEM. Weiterhin soll die unabhängige Durchführung der Transformation gestatten, alle Randbedingungen festzustellen, bei denen die Re-

duktion der Aufgabe möglich ist. Schließlich ist es im Unterschied zur Potentialtheorie notwendig, die MFIT zu erweitern, was durch die gemischten Ableitungen nach zwei Koordinaten in den Differentialgleichungen bedingt ist.

2. Problemstellung

Es werden die Verschiebungen und Spannungen in einem prismatischen Körper mit beliebigem Querschnitt gesucht (Bild 1). Dabei wird angenommen, daß der Körper den Gesetzen der linearen Elastizitätstheorie unterliegt, homogen und isotrop ist und die Kontinuitätsbedingungen erfüllt. Verwendet man für Hauptunbekannte die Verschiebungen, erfüllt die Gleichgewichtsbedingungen, beachtet die geometrischen Zusammenhänge zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen und setzt die Gültigkeit des Hookschen Gesetzes voraus, bekommt man ein System von drei Differentialgleichungen für die Bestimmung der Verschiebungen, die als Gleichungen von Lamè bekannt sind [14]:

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} &= R_x \\ B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + G \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} &= R_y \\ B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + B \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + G \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + A \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= R_z \end{aligned} \quad (2.1)$$

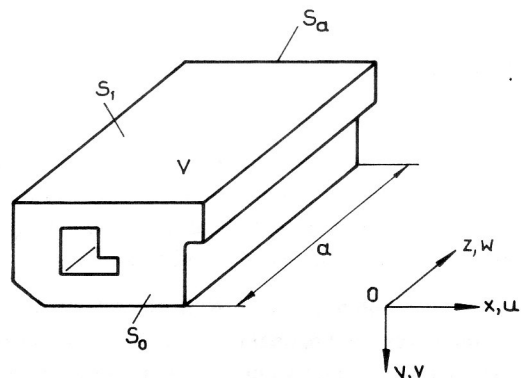


Bild 1
Prismatischer Körper

Es bedeuten u, v, w – die Verschiebungen R_x, R_y, R_z – bekannte Volumenkräfte in Richtung der Achsen x, y, z .

Zur Übersichtlichkeit sind einige Konstanten eingeführt, die das Materialverhalten charakterisieren:

E – Elastizitätsmodul,

ν – Poissonsche Zahl,

$$G = \frac{E}{2(1-\nu)},$$

$$A = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (2.2)$$

$$B_1 = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$$B = B_1 + G.$$

Allgemein können die Randbedingungen als solche der dritten Art aufgeschrieben werden, dessen physikalischer Inhalt eine Stützung mit elastischer Feder ist:

$$\begin{aligned} \alpha_x u + \gamma_x \left(A_1 l_x \frac{\partial u}{\partial x} + G l_y \frac{\partial u}{\partial y} + G l_z \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ \left. + B_1 l_x \frac{\partial v}{\partial y} + G l_y \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + B_1 l_x \frac{\partial w}{\partial z} + G l_z \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ = \alpha_x u + \gamma_x P_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_y v + \gamma_y \left(B_1 l_y \frac{\partial u}{\partial x} + G l_x \frac{\partial u}{\partial y} + G l_x \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\ \left. + A l_y \frac{\partial v}{\partial y} + G l_z \frac{\partial v}{\partial z} \right. \\ \left. + B_1 l_y \frac{\partial w}{\partial z} + G l_z \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ = \alpha_y v + \gamma_y P_y \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \alpha_z w + \gamma_z \left(B_1 l_z \frac{\partial u}{\partial x} + G l_x \frac{\partial u}{\partial z} + B_1 l_z \frac{\partial v}{\partial y} + G l_y \frac{\partial v}{\partial z} \right. \\ \left. + G l_x \frac{\partial w}{\partial x} + G l_y \frac{\partial w}{\partial y} + A l_z \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ = \alpha_z w + \gamma_z P_z \end{aligned}$$

Hierin sind α_i und γ_i ($i = x, y, z$) bekannte Konstanten,

$$l_x = \cos(n, x), \quad l_y = \cos(n, y), \quad l_z = \cos(n, z) \quad (2.4)$$

die Richtungskosinusse der Winkel zwischen der Normalen n zu der Oberfläche des Körpers und den Achsen P_x, P_y, P_z und u, v, w bekannte äußere Belastungen und Verschiebungen, die auf der Oberfläche verteilt sind.

Falls alle Konstanten γ_i gleich Null gesetzt werden, bekommt man Randbedingungen erster Art (geometrische Randbedingungen), und wenn alle Konstanten α_i gleich Null gesetzt werden, bekommt man Randbedingungen zweiter Art (Spannungs-Randbedingungen).

In dem Sonderfall des prismatischen Körpers sind die Richtungskosinusse auf der Seitenoberfläche S_1 :

$$l_x = \cos(n, x), \quad l_y = \cos(n, y), \quad l_z = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad (2.5)$$

und auf S_0 und S_a :

$$l_x = \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad l_y = \cos \frac{\pi}{2} = 0;$$

$$l_z = \begin{cases} \cos 0^\circ = +1, \in S_a \\ \cos 180^\circ = -1, \in S_0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Die Gleichungen (2.5) und (2.6) sind von wesentlicher Bedeutung für die Lösung des Problems.

3. Finite Integraltransformation (FIT)

Es ist die Differentialgleichung (2.1) mit den Randbedingungen (2.3) zu lösen. Die Lösung wird durch Trennung der Variablen mit folgendem Ansatz gesucht:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} D_{xi}(x, y) \psi_{xi}(z), \\ v(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} D_{yi}(x, y) \psi_{yi}(z), \\ w(x, y, z) &= \sum_{i=1}^{\infty} D_{zi}(x, y) \psi_{zi}(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für alle bekannten Funktionen erfolgt eine Fourierreihenentwicklung über die Eigenfunktionen:

$$R_x(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \check{R}_{xi}(x, y) \psi_{xi}(z), \quad (3.2)$$

analog für R_y, R_z und auch für P_x, P_y, P_z und u, v, w .

Es werden nur solche Fälle betrachtet, bei denen es möglich ist, eine analytische Lösung für die ψ -Funktionen zu bekommen. Wenn diese bekannt ist, kann man die FIT ausführen. Das Endziel der FIT ist es, die Differentialgleichungen (2.1) und die Randbedingungen auf S_1 nach z zu integrieren, so daß die transformierten Gleichungen nur von x und y abhängig sind. Um das zu erreichen, sollen ψ_x, ψ_y, ψ_z eine Reihe von Bedingungen erfüllen.

Es wird eine Lösung für das i -te Glied gesucht und zur Übersichtlichkeit der Index i weggelassen.

Der Ansatz (3.1) wird in die Differentialgleichung (2.1) eingesetzt und durch ψ_x, ψ_y und ψ_z entsprechend geteilt. Die Verhältnisse zwischen den ψ -Funktionen in den so erhaltenen Gleichungen sollen konstant sein.

$$\begin{aligned} \frac{\psi_x''}{\psi_x} = \lambda_x; \quad \frac{\psi_y}{\psi_x} = \kappa_{xy}; \quad \frac{\psi_z'}{\psi_x} = \kappa_{xz}; \\ \frac{\psi_x}{\psi_y} = \kappa_{yx}; \quad \frac{\psi_y''}{\psi_y} = \lambda_y; \quad \frac{\psi_z'}{\psi_y} = \kappa_{yz}; \\ \frac{\psi_x'}{\psi_z} = \kappa_{zx}; \quad \frac{\psi_y'}{\psi_z} = \kappa_{zy}; \quad \frac{\psi_z''}{\psi_z} = \lambda_z. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Die Bedingungen (3.3) unterscheiden sich wesentlich von den üblichen dieser Art. In der Regel enthalten solche Bedingungen nur Terme in der Hauptdiagonalen (mit der zweiten Ableitung), die als Spektralaufgabe bezeichnet werden. In dem vorliegenden Fall erscheinen auch Zusatzbedingungen, die die ersten Ableitungen und die Funktionen selbst verbinden. Allein die Spektralaufgabe hat die bekannte Lösung: $c_1 \sin(\mu z) + c_2 \cos(\mu z)$. Von den Randbedingungen der Spektralaufgabe bei $z = 0$ und $z = a$ (die allgemein dritter Art sind) und von den Zusatzbedingungen kann man die zulässigen Kombinationen von Lösungen für ψ_x , ψ_y und ψ_z erhalten. Man setzt die Lösung der Spektralaufgabe in ihre Randbedingungen und in die Zusatzbedingungen ein, woraus sich nach einigen Umformungen Zusammenhänge zwischen α_i und γ_i ($i = x, y, z$) ergeben. Diese Zusammenhänge sehen wie folgt aus (Index "o" für $z = 0$):

$$\begin{aligned} \alpha_{x0} \gamma_{y0} &= \alpha_{y0} \gamma_{x0} \\ \alpha_{x0} \alpha_{z0} &= -\mu^2 \gamma_{x0} \gamma_{z0} \\ \alpha_{y0} \alpha_{z0} &= -\mu^2 \gamma_{y0} \gamma_{z0} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aus (3.4) folgt, daß die Randbedingungen der Spektralaufgabe nicht dritter Art sein können, sondern nur erster oder zweiter Art. Hieraus erhält man folgende Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \alpha_{x0} \neq 0; \quad \gamma_{x0} = 0 \Rightarrow \psi_x(0) = 0 \\ & \alpha_{y0} \neq 0; \quad \gamma_{y0} = 0 \Rightarrow \psi_y(0) = 0 \\ & \alpha_{z0} = 0; \quad \gamma_{z0} \neq 0 \Rightarrow \psi_z'(0) = 0 \\ & \text{Diagram: } \begin{array}{c} \circ \\ \hline \delta \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \alpha_{x0} = 0; \quad \gamma_{x0} \neq 0 \Rightarrow \psi_x'(0) = 0 \\ & \alpha_{y0} = 0; \quad \gamma_{y0} \neq 0 \Rightarrow \psi_y'(0) = 0 \\ & \alpha_{z0} \neq 0; \quad \gamma_{z0} = 0 \Rightarrow \psi_z(0) = 0 \\ & \text{Diagram: } \begin{array}{c} \hline \delta \end{array} \end{aligned}$$

Fall 1) entspricht einer einfachen Stütze und Fall 2) – einer Stütze, die als Q-Mechanismus bekannt ist. Allgemein kann man sagen, daß die Randbedingung für ψ_x und ψ_y gleich und die Randbedingung für ψ_z – konjugiert ist. Analoge Aussagen kann man auch für die Randbedingung auf S_a bekommen.

Für die Randbedingung auf S_1 wird analog zu der Bearbeitung der Beziehungen (2.3) und (2.5) die Gleichung (3.1) durch ψ_x , ψ_y , ψ_z geteilt. Die Verhältnisse zwischen den ψ -Funktionen in den so umgeformten Randbedingungen sollen konstant sein, aber diese Verhältnisse sind identisch mit den Zusatzbedingungen zur Trennung der Variablen in den Differentialgleichungen. Demzufolge genügt es, alle Bedingungen (3.3) zu erfüllen, was die Trennung der Variablen sowohl in der Differentialgleichung als auch in den Randbedingungen auf S_1 gestattet.

Insgesamt sind folgende 4 Kombinationen möglich:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{array}{c} \circ \quad \quad \quad \circ \\ \hline \delta \quad \quad \quad \delta \end{array} \\ & z = 0 \quad z = a \\ & \psi_x = 0 \quad \psi_x = 0 \quad \psi_x = \sin \left[\frac{k\pi}{a} z \right] \end{aligned}$$

$$\psi_y = 0 \quad \psi_y = 0 \quad \psi_y = \sin \left[\frac{k\pi}{a} z \right] \quad (3.5a)$$

$$\psi_z' = 0 \quad \psi_z' = 0 \quad \psi_z = \cos \left[\frac{k\pi}{a} z \right]$$

$$2) \quad \begin{array}{c} \hline \delta \end{array}$$

$$\begin{aligned} z = 0 \quad z = a \\ \psi_x' = 0 \quad \psi_x = 0 \quad \psi_x = \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_y' = 0 \quad \psi_y = 0 \quad \psi_y = \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right] \\ (3.5b) \end{aligned}$$

$$\psi_z = 0 \quad \psi_z' = 0 \quad \psi_z = \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right]$$

$$3) \quad \begin{array}{c} \hline \delta \quad \quad \quad \delta \end{array}$$

$$\begin{aligned} z = 0 \quad z = a \\ \psi_x' = 0 \quad \psi_x' = 0 \quad \psi_x = \cos \left[\frac{(k+\pi)}{a} z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_y' = 0 \quad \psi_y' = 0 \quad \psi_y = \cos \left[\frac{(k+\pi)}{2a} z \right] \\ (3.5c) \end{aligned}$$

$$\psi_z = 0 \quad \psi_z = 0 \quad \psi_z = \sin \left[\frac{(k+\pi)}{a} z \right]$$

$$4) \quad \begin{array}{c} \circ \\ \hline \delta \end{array} \quad \begin{array}{c} \hline \delta \end{array}$$

$$\begin{aligned} z = 0 \quad z = a \\ \psi_x = 0 \quad \psi_x' = 0 \quad \psi_x = \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_y = 0 \quad \psi_y' = 0 \quad \psi_y = \sin \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right] \\ (3.5d) \end{aligned}$$

$$\psi_z' = 0 \quad \psi_z = 0 \quad \psi_z = \cos \left[\frac{(2k+1)\pi}{2a} z \right]$$

Für alle Kombinationen $k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots$

Aus (3.5) kann man leicht die κ -Koeffizienten ermitteln:

$$\begin{aligned} \kappa_{xy} &= \pm 1 \\ \kappa_{yz} &= \pm \mu, \quad \text{wobei } \mu = \frac{k\pi}{a} \quad \text{für 1) und 3)} \end{aligned}$$

$$\kappa_{zx} = \pm \mu \quad \text{oder } \mu = \frac{(2k+1)\pi}{2a} \quad \text{für 2) und 4).}$$

Es ist ersichtlich, daß man für dieses Problem annehmen kann:

$$\begin{aligned}\psi_x &= \psi \\ \psi_y &= \psi\end{aligned}\quad (3.6)$$

$$\psi_z = \left| \frac{\psi'}{\mu} \right| = \psi^*$$

Die Reihe der Eigenfunktionen ψ_i , $i = 1, 2, 3 \dots$ ist ein System von orthogonalen Funktionen, d. h., deren Skalarprodukt ist

$$\langle \psi_i, \psi_j \rangle = \int_{z=0}^a \psi_i(z) \psi_j(z) dz = 0 \text{ für } i \neq j \quad (3.7)$$

Daraus kann man wie folgt die Normierungsglieder bekommen:

$$N_i^2 = \langle \psi_i, \psi_i \rangle = \frac{a}{2} \quad (3.8)$$

Nach einer Multiplikation von (3.1) mit ψ_i , ψ_i und ψ_i^* , Integration nach z und Berücksichtigung der Orthogonalitätsbedingung für das System der Eigenfunktionen erhält man für die Koeffizienten D :

$$D_{xi}(x, y) = \frac{1}{N_i^2} \int_{z=0}^a \psi_i(z) u(x, y, z) dz \quad (3.9)$$

Analog ergeben sich die Ausdrücke (3.9) für die anderen Funktionen.

Das Paar der Grundformeln, die charakteristisch für jede FIT sind, wird in diesem Fall wie folgt aussehen:

– gerade Formel der FIT

$$\bar{u}_i(x, y) = \int_{z=0}^a \psi_i(z) u(x, y, z) dz = \langle \psi_i, u \rangle, \quad (3.10)$$

$$\bar{v}_i(x, y) = \int_{z=0}^a \psi_i(z) v(x, y, z) dz = \langle \psi_i, v \rangle,$$

$$\bar{w}_i(x, y) = \int_{z=0}^a \psi_i^*(z) w(x, y, z) dz = \langle \psi_i^*, w \rangle,$$

– Rückformel der FIT

$$u(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} \bar{u}_i(x, y) \psi_i(z), \quad (3.11)$$

$$v(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} \bar{v}_i(x, y) \psi_i(z),$$

$$w(x, y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{N_i^2} \bar{w}_i(x, y) \psi_i^*(z).$$

Hierin ist ψ eine bekannte Eigenfunktion, die bei der Lösung der Spektralaufgabe bestimmt wird (s. o.) und $\bar{u}_i(x, y)$, $\bar{v}_i(x, y)$, $\bar{w}_i(x, y)$ sind Funktionen, die nach der Durchführung der FIT ermittelt werden.

Im nächsten Schritt ist die Ausgangsdifferentialgleichung (2.1) so umzuformen, daß alle Funktionen nur von x und y abhängen.

Es wird (3.10) von links mit ψ , ψ , ψ^* multipliziert und nach z integriert. Die Spektralaufgabe und die Zusatzbedingungen (3.3) werden mit u , v , w von links multipliziert und nach z integriert. Hiernach erfolgt eine Multiplikation der Differentialgleichungen mit den entsprechenden Konstanten und eine Anwendung der geraden Formel der FIT (3.10). Zu den so umgeformten Differentialgleichungen werden die Spektralaufgabe und die Zusatzaufgabe und die Zusatzbedingungen addiert. Bei der Integration nach z werden die Terme einfach gelöst, die keine Ableitung nach z enthalten. Die anderen Terme, die Ableitungen nach z besitzen, werden partiell integriert. Nach diesen Umformungen für die Differentialgleichung bekommt man:

$$A \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \kappa_{yx} B \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x \partial y} + \lambda G \bar{u} - \kappa_{zx} B \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = g_x \quad (3.12)$$

$$\kappa_{xy} B \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + A \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \lambda G \bar{v} - \kappa_{zy} B \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} = g_y$$

$$- \kappa_{xz} B \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \kappa_{yz} B \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + G \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \lambda A \bar{w} = g_z$$

mit

$$g_x = G \left[\psi' u - \psi \frac{\partial u}{\partial z} \right]_{z=0}^a - B \frac{\partial w}{\partial x} \psi \Big|_{z=0}^a + \int_{z=0}^a \psi R_x dz$$

$$g_y = G \left[\psi' v - \psi \frac{\partial v}{\partial z} \right]_{z=0}^a - B \frac{\partial w}{\partial y} \psi \Big|_{z=0}^a + \int_{z=0}^a \psi R_y dz \quad (3.13)$$

$$g_z = A \left[\psi^* w - \psi^* \frac{\partial w}{\partial z} \right]_{z=0}^a - B \frac{\partial u}{\partial x} \psi^* \Big|_{z=0}^a - B \frac{\partial v}{\partial y} \psi^* \Big|_{z=0}^a + \int_{z=0}^a \psi^* R_z dz$$

Die Randbedingungen der Ausgangsaufgabe auf S_0 und S_a sind ähnlich denen der Spektralaufgabe (erste und zweite Art):

$$1) \quad u = U(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a) \\ v = V(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a)$$

$$\sigma_z = B_1 \frac{\partial u}{\partial x} + B_1 \frac{\partial v}{\partial y} + A \frac{\partial w}{\partial z} \\ = P_z(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a)$$

$$2) \quad \tau_{zx} = G \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] = P_x(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a)$$

$$\tau_{zy} = G \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] = P_y(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a)$$

$$w = W(x, y, z = 0 \text{ oder } z = a)$$

Da ψ und ψ^* bei $z = 0$ und $z = a$ nur gleich 0 oder 1 sein können, gehen diese Randbedingungen direkt in die Funktionen $g_i (i = x, y, z)$ über. Auf diese Weise sind g_x, g_y, g_z (3.13) bekannte Funktionen, die die Randbedingungen der Ausgangsaufgabe auf S_0 und S_a erfüllen und der letzte Term Skalarprodukt von zwei bekannten Funktionen ist. Somit kann die Differentialgleichung (3.12) hinsichtlich $\bar{u}(x, y), \bar{v}(x, y), \bar{w}(x, y)$ gelöst werden.

Aber davor ist es notwendig, auf analoge Weise die Randbedingungen auf S_1 umzuformen. Nach den Ausführungen erhält man:

$$\begin{aligned} \alpha_x \bar{u} + \gamma_x \left(A l_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + G l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \kappa_{yx} B_1 l_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \kappa_{yx} G l_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \kappa_{zx} B_1 l_x \bar{w} \right) &= h_x \\ \alpha_y \bar{v} + \gamma_y \left(\kappa_{xy} B_1 l_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \kappa_{xy} G l_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + G l_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + A l_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \kappa_{zy} B_1 l_y \bar{w} \right) &= h_y \quad (3.14) \\ \alpha_z \bar{w} + \gamma_z \left(-\kappa_{xz} G l_x \bar{u} - \kappa_{yz} G l_y \bar{v} + G l_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + G l_x \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) &= h_z \end{aligned}$$

und mit $l_x = l_y = 0$ auf S_0 und S_a :

$$\begin{aligned} h_x &= a_x \langle \psi, U \rangle + \gamma_x \langle \psi, P_x \rangle \\ h_y &= a_y \langle \psi, V \rangle + \gamma_y \langle \psi, P_y \rangle \quad (3.15) \\ h_z &= a_z \langle \psi^*, W \rangle + \gamma_z \langle \psi^*, P_z \rangle. \end{aligned}$$

Nach diesen Ausführungen ist die quasi ebene Aufgabe (3.12) zu lösen. Hierbei werden die Gleichungen (3.14), (3.13) und (3.15) verwendet.

Dieses kann nach einer beliebigen Methode – analytisch oder numerisch, nach dem Differenzenverfahren, nach der FEM oder nach einem anderen Verfahren – erfolgen.

Nach dem vorgestellten Verfahren wurde ein EDV-Programm entwickelt. Bei der praktischen Ausarbeitung des Programms wurde die FEM zur Lösung der reduzierten Aufgabe ausgewählt, die eine volle Freiheit über die Auswahl der Querschnittsform zulässt.

Somit kann die Lösung der Ausgangsaufgabe in folgenden Schritten dargestellt werden:

- 1) Eingabe der Geometrie des Körpers, der Randbedingungen und Materialkennwerte.
- 2) Lösung der reduzierten Aufgabe hinsichtlich $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, n-mal.
- 3) Erhalten der gesuchten Funktionen mit Hilfe der Rückformel der FIT (3.11).

4. Anwendung der erhaltenen Lösung

Die Lösung dieses Problems gibt Möglichkeiten zur günstigen Untersuchung von örtlichen Spannungen in prismatischen Konstruktionen infolge von konzentrierten Lasten. Als Beispiel sind die örtlichen Spannungen in den Vertikal-

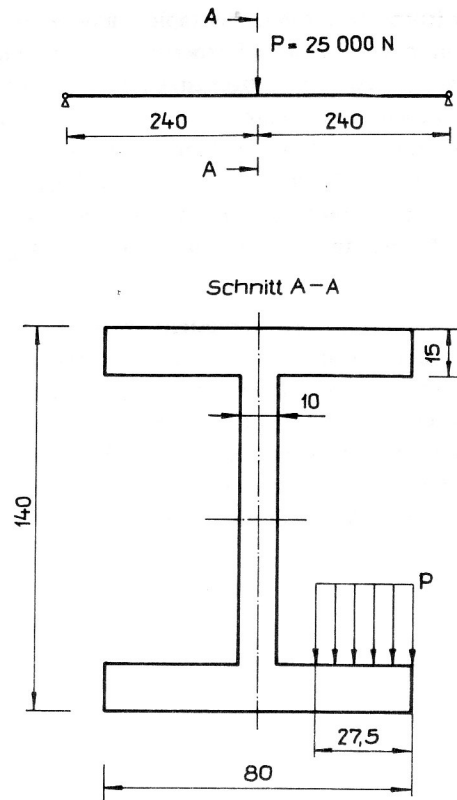


Bild 2
Versuchsaufstellung

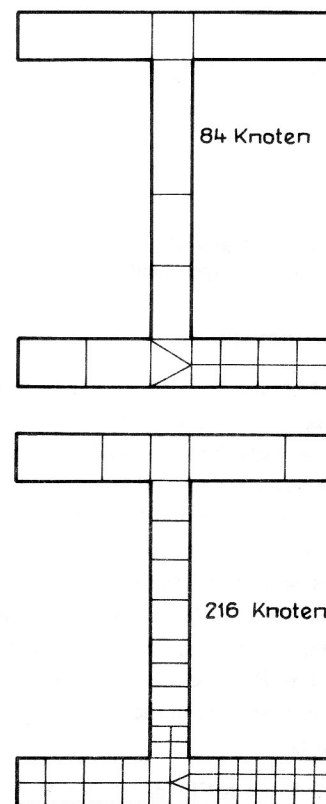


Bild 3
FEM-Netze

stielen der Hubgerüste von Gabelstaplern untersucht worden. Es wurde numerisch und experimentell ein Teil des Profils eines 2,5-Tonnen-Hubgerüsts mit einer Aufstellung entsprechend Bild 2 untersucht. Mit Hilfe von Dehnungsmeßstreifen wurden die Spannungen am unteren Rand eines Doppel-T-Trägers im Schnitt A-A gemessen. Die numerischen Untersuchungen wurden mit zwei verschiedenen Netzen durchgeführt, die im Bild 3 angegeben sind.

Im Bild 4 ist die Spannung σ_z dargestellt, die mit den beiden Netzen erhalten wurde, und die experimentellen Ergebnisse, die mit „+“ gekennzeichnet sind. Es ist eindeutig, daß die Kurven den gleichen Charakter aufweisen, wobei die Unterschiede mit der numerischen Differentiation bei der Berechnung der Spannungen aus den Verschiebungen und den Ungenauigkeiten des Experiments erklärt werden können.

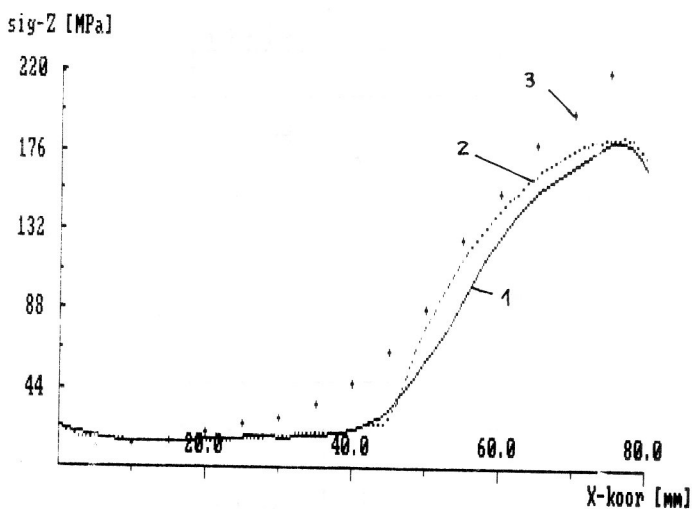


Bild 4
Vergleich der Spannung Sigma-Z,
1-84 Kn.; 2-216 Kn.; 3 - Experiment

5. Zusammenfassung

Die räumliche Aufgabe über das elastische Verhalten eines prismatischen Körpers wurde reduziert zu einer Summe von quasi ebenen Aufgaben, wobei dieses unabhängig von dem weiteren Lösungsweg erfolgte. In den bekannten Lösungen (FPM) wurden auf den Endflächen viel zu strenge Randbedingungen gefordert. In der vorliegenden Arbeit wurde der Kreis der möglichen Lösungen wesentlich erweitert, und es wurden alle Randbedingungen ermittelt, die bei dieser Lösungsmethode zulässig sind. Es wurde nachgewiesen, daß andere Randbedingungen auf den Endflächen nicht möglich sind, weil dann die Trennung der Variablen undurchführbar ist.

Gleichzeitig wurde die MFIT durch den Fall erweitert, bei dem Ableitungen gleichzeitig nach zwei Koordinaten in einem Differentialgleichungssystem vorhanden sind. Die Mehrzahl der bekannten Lösungen nach der MFIT [13] bezieht sich auf eine Differentialgleichung ohne obige Probleme. Sogar einige allgemeinere Lösungen enthalten keine solchen Aufgaben. Dieses Problem wurde mit der

Benutzung von Zusatzbedingungen gelöst, die zusammen mit den Randbedingungen der Spektralaufgabe es ermöglichen, den Kreis der zulässigen Lösungen abzutrennen, die nur ein Teil aller Lösungen der Spektralaufgabe sind. Die so dargestellte Herangehensweise hat zwei wesentliche Vorteile gegenüber der klassischen FEM, die zur Zeit die am meisten verbreitete Methode zur Lösung von solchen Aufgaben ist. Die Zeit für die Datenvorbereitung ist wesentlich kürzer, weil nur ein ebenes Netz generiert wird, und es wird wesentlich weniger Speicherplatz und Rechenzeit benötigt.

Die entwickelte Herangehensweise gestattet die Lösung eines bestimmten Typs von Aufgaben, der die Besonderheiten der Geometrie und des Materials ausnutzt und mit Hilfe der MFIT die analytische und die numerische Lösung bei einer effektiven Nutzung der Computertechnik verbindet.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O.C.: Finite Element Method. 3rd edn, McGraw-Hill, London 1977.
- [2] Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis. Pergamon Press, 1976.
- [3] Wong, C.C.K., Vardy, A.E.: Finite Prism Analysis of Plates and Shells. IJNME, 1985, S. 529-541.
- [4] Golley, B.W., Petrolito, J.: Method for Analysing Tanks and Continous Plates. Computers and Structures 6(1984), S. 1141-1151.
- [5] Yang, H.Y., Chong, K.P.: Finite Strip Method with X-Spline Functions, Computers and Structures 1(1984), S. 217-232.
- [6] Cheung, Y.K., Fan, S.C.: Static Analysis of Right Box Girder Bridges by Spline Finite Strip Method. Proc. Instn. Civ. Engrs., Part 2, 1983, June, S. 311-323.
- [7] Benito, R., Sridharan, S.: Interactive Buckling Analysis with Finite Strips. IJNME, 1985, S. 145-161.
- [8] Lenguel, P., Cusens, A.R.: A Finite Strip Method for the Geometrically Nonlinear Analysis of Plate Structures. IJNME, 1983, S. 331-340.
- [9] Fan, S.C., Cheung, Y.K.: Analysis of Shallow Shells By Spline Finite Strip Method. Eng. Structur., Oct. 1983, S. 255-263.
- [10] Tezel, A.: Solution of linear Coupled Thermoelasticity Problems by the Method of Finite Transforms. Letters in Applied and Eng. Sci., S. 247-263, Pergamon Press, Inc., 1974.
- [11] Tezel, A.: Solution of Thin Plate Problems by the Method of Eigentransforms. Bogazici Universitesi, Mech. Eng., Vol.2, S. 239-259, 1974.
- [12] Tezel, A.: Forced Motions of Plates Including Shear Deformations and rotary Inertia: A General Method of Solution. Bogazici Universitesi, Mech. Eng., Vol. 3, S. 173-185, 1975.
- [13] Sneddon, I.N.: Fourier transforms. McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
- [14] Timoshenko, S., Goodier, J.N.: Theory of Elasticity. 2nd edn., McGraw-Hill, 1951.
- [15] Kolarow, G., Weese, W.: Die Prismenmethode - eine quasi-dreidimensionale Finite-Elemente-Methode. Z. Technische Mechanik 8(1987), H. 1, S. 61-63.

Anschrift der Verfasser:

Georgi Kolarow
Michail Michajlov
Hochschule für Maschinenbau und
Elektrotechnik „W.I. Lenin“
Sofia
Bulgarien