TECHNISCHE MECHANIK 11 (1990) Heft 4
Manuskripteingang: 15. 02. 1990

Computeralgebra-Methoden in der Mechanik

P. Maisser

Am Beispiel der Dynamik-Simulation von MKS wird die Wechselwirkung der Anwendung von Computeralgebra-Methoden und gründlicher Problemanalyse mit dem Ergebnis tieferer Einsichten in die mathematische Struktur dieses Objektbereichs (analytische Dynamik) einerseits und hocheffizienter Software zur Dynamik-Simulation andererseits demonstriert.

Computer algebra methods in mechanics

The interrelation of applying computer algebra methods and a thorough problem analysis is demonstrated for dynamics simulations of MKS. The results, i. e. a better insight in the mathematical structure of this bulk of problems (analytical dynamics) on the one hand and highly efficient software for dynamics simulation on the other hand, are presented.

0. Einleitung

Die klassische analytische Mechanik hat in den zurückliegenden 25 Jahren eine unerwartete Renaissance erlebt. Hervorgerufen wurde diese erfreuliche Wiederbelebung 1. durch rasante Entwicklungen in einigen technischen disziplinen wie Raumfahrt- und Satellitentechnik, Robotertechnik, Maschinen- und Fahrzeugdynamik, aber auch der Biomechanik, 2. durch bedeutende Fortschritte in der numerischen Analysis, wie z. B. die numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (ODE) und Algebra-Differentialgleichungen (ADE) sowie 3. durch das Entstehen einer neuen Disziplin zwischen Mathematik und Computerwissenschaft – der *Computeralgebra*. Wesentliche Voraussetzungen für die in den Anwendungen erzielten Erfolge war und ist der Einsatz modernster Computertechnik und entsprechender Software, und zwar mathematischer Grundsoftware wie auch problemorientierter Software.

1. Was ist Computeralgebra?

Computeralgebra – auch Formel- oder Symbolmanipulation – kann als eine Teildisziplin der Informatik aufgefaßt werden. Sie beschäftigt sich mit der Ausarbeitung, Analyse, Realisierung und Anwendung *algebraischer* Algorithmen. Die Algorithmen werden in Programmsystemen, den Computeralgebrasystemen (CAS), realisiert. Dabei werden algebraische Objekte (algebraische Bezeichnungen, Formeln, Theoreme) als input-Informationen mittels algebraischer Transformationen wieder in algebraische Objekte als output-Informationen überführt.

2. Beziehungen der Computeralgebra zur Mathematik

Die Computeralgebra ist eng mit mathematischen Disziplinen, wie Algebra, Analysis und numerische Analysis verknüpft. Viele Begriffe und Ergebnisse van der Wärdens's universeller Algebra bilden die Grundlage einer strengen Theorie von Vereinfachungen, während in der Analysis mittels Computeralgebra-Methoden (CA-M.) symbolische Quadratur, symbolische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, die Berechnung elementarer transzendenter Funktionen sowie Funktionaltransformationen (z. B. Laplace-Transformation) möglich sind. Das wird durch eine *Algebraisierung* der jeweiligen Aufgabe erreicht. Die Beziehung der Computeralgebra zur numerischen Analysis ergibt sich u. a. aus dem Wunsch, die numerische Prozeduren charakterisierende Arithmetik einer endlichen Genauigkeit und die sich darauf gründende Approximationstheorie durch dieselbe Strenge und Genauigkeit wie bei algebraischen Algorithmen zu ersetzen [1].

3. Hauptanwendungsgebiete der Computeralgebra

Hauptanwendungsgebiete der Computeralgebra sind in der Mathematik: lineare Algebra (lineare Gleichungen), allgemeine Algebra, algebraische Zahlentheorie, Gruppentheorie, Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen (auch nichtlinearer), Integraltransformationen, Tensoralgebra und -analysis, algebraische Geometrie, allgemeine Differentialgeometrie (Maßtensor, Christoffel-Symbole, Krümmungstensor), in der Physik: allgemeine Relativitätstheorie, Kontinuumsmechanik (Tensoren in krummlinigen Koordinaten), Hochenergiephysik, Himmelsmechanik, Angewandte Mechanik (Dynamik von Mehrkörpersystemen, FEM, asymptotische Methoden u. v. a. m.).

Einige häufig verwendete allgemeine CAS sind: FORMAC, REDUCE, MACSYMA, SCRATCHPAD, MAPLE, SMP. Für Personalcomputer besonders geeignet sind muMath, spezielle REDUCE-Versionen u. a.

Darüber hinaus gibt es bereits eine Fülle von speziellen CAS, wie z. B. STENSOR, EXCALC, (CARTAN-Kalkül) usw., die aber meist nur auf sehr leistungsstarken Rechnern implementierbar sind.

Die wissenschaftliche Koordinierung und Förderung von Forschungen zur Computeralgebra und ihren Anwendungen erfolgt durch verschiedene nationale und internationale Interessengruppen, Zeitschriften und Kongresse: z. B.

SIGSAM: Special Interest Group on Symbolic and Algebraic Manipulation (USA);

NIGSAM: National Interest Group for Symbolic and Algebraic Manipulation, Stockholm. Zeitschrift: NIGSAM-News;

Journal of Symbolic Computation, Academic Press;

EUROSAM 1979: European Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation, Marseille;

EUROCAM 1982: European Conference on Computer Algebra (Symbolic and Algebraic Computation), Linz;

EUROCAL 1985: European Computer Algebra Conference, Marseille;

EUROCAL 1987: European Conference on Computer Algebra, Leipzig.

Während z. B. in den USA die Chemiker eine eigene CA-Interessengruppe gebildet haben, scheinen die Mechaniker (theoretische wie angewandte) noch relativ zögerlich bei der Anwendung von CA-Methoden zu sein, ausgenommen einige wenige Mehrkörperdynamiker und FEM-Spezialisten, s. z. B. [10].

Das 2. internationale Arbeitsseminar „Advances in Robot Kinematics" (Sept. '90, Linz) wird erstmalig eine spezielle Sektion „Symbolic Computation for Kinematics" führen. In der DDR waren es besonders die Physiker, namentlich die Hochenergiephysiker, die den Kontakt zu internationalen CA-Forschungszentren verdienstvollerweise hergestellt haben und nun auch – gemeinsam mit einigen wenigen Mathematikern – aktiv mitarbeiten.

Die Reserviertheit von Mathematikern und Mechanikern i. a. allerdings bleibt unverständlich und sollte mit Blick auf künftige Entwicklungen disziplinärer Forschung einerseits sowie der Rechentechnik andererseits schnell überwunden werden.

4. Was bringt die Computeralgebra dem Ingenieur

Das Zusammenspiel von

Software-Systemen zum numerischen Rechnen (z. B. NUMATH),
Computeralgebra-Systemen,
Software-Systemen zum grafischen Rechnen (z. B. Computergrafik und CAD-Systeme)
sowie Expertensystemen

bringt ein leistungsfähiges Instrumentarium hervor, das zu einer gravierenden Veränderung des Arbeitsplatzes künftiger Ingenieure und zu einer neuen Qualität ihrer Arbeit führen wird.

Nach Buchberger [2] wird die Computeralgebra zu einem wesentlichen Bestandteil des Gesamtgebietes „Scientific Computation" und „damit neue Dimensionen des computerunterstützten Problemlösens im technischen Bereich ermöglichen". Ein schönes Beispiel hierfür ist die *interaktive* symbolische Generierung von Bewegungsgleichungen für Mehrkörpersysteme, wie sie in [6] vorgestellt wird.

Erfahrungen im Rahmen von Forschungskooperationen mit Industriepartnern zeigen, daß es für viele praktische Bedürfnisse eines F/E-Ingenieurs *vorläufig* völlig ausreicht, wenn er von der Existenz von CAS weiß und informiert ist darüber, für welche Probleme seines Aufgabenbereiches diese sinnvoll und effektiv eingesetzt werden können, so daß er bestehende Problemlösungen selbständig nutzen kann. Für die eigene Nutzung von CAS sind gewisse Grundkenntnisse unerläßlich, die in der Informatikausbildung an Technischen Hochschulen und Universitäten gegebenenfalls fachspezifisch vertieft werden sollten.

5. Dynamik-Simulation von Mehrkörpersystemen

Rigorose Computersimulation des dynamischen Verhaltens von Mehrkörpersystemen (MKS) ist international ein noch immer dominierendes Ziel der Mechanikforschung auf den Gebieten Manipulator-/Robotertechnik, Luft- und Raumfahrttechnik, Maschinen- und Fahrzeugdynamik sowie Biomechanik.

Unter Computersimulation der Dynamik von MKS wird die *automatisierte* Gewinnung *qualitativer* und *quantitativer* Aussagen über das dynamische Verhalten von MKS verstanden. Qualitative Aussagen beziehen sich u. a. auf die Struktur von Modellgleichungen, den Einfluß von Systemparametern, die Stabilität der Bewegung, chaotisches Verhalten, die Existenz erster Integrale (Energieintegral, zyklische Integrale) bis hin zur NOETHER-Theorie sowie zu Periodizitätseigenschaften der Bewegung. Quantitative Aussagen beinhalten z. B. das zeitliche Verhalten von Lage-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskoordinaten, optimale Systemparameter, optimale Prozesse usw.

Im Mittelpunkt applikationsorientierter Forschung stehen derzeit Echtzeitanimation und Echtzeitsimulation von MKS. Wesentliche Beiträge hierzu sind auf der Grundlage zweckmäßiger Modellhierarchien, der Parallelisierung von Algorithmen sowie durch Verwendung von CA-Methoden zu erwarten.

Ein geeignetes mathematisches Modell zur Erzielung oben genannter Aussagen sind die Lagrangeschen Gleichungen. Ihre Kovarianz, d. h. ihre Forminvarianz bei kinematischen Punkttransformationen im R^n, ist ein wichtiger Aspekt für ihre computergestützte Generierung und damit Grundlage für eine computergestützte Generierung anderer – für eine bestimmte Aufgabe besonders zweckmäßig angepaßter Modellgleichungen (z. B. Boltzmann-Hamel-Gleichungen, Woronetz-Gleichungen u. a.).

Die Computergenerierung der Lagrangeschen Gleichungen kann *numerisch* erfolgen, d. h., die Modellgleichungen werden in einem bestimmten Zeitpunkt zur Ausführung eines Integrationsschrittes numerisch aufgebaut (NU-Generierung). Mittels CA-Methoden (Formelmanipulation) können die Lagrangeschen Gleichungen aber auch in analytischer Form als Ganzes, d. h., *symbolisch* generiert werden (CA-Generierung). Beide Vorgehensweisen besitzen spezifische Möglichkeiten, Grenzen und Anwendungsgebiete. Ihre sinnvolle Verknüpfung in der Software zur Dynamik-Simulation *(hybride Arbeitsweise)* führt zu einer hohen Effizienz, Genauigkeit und Sicherheit bezüglich der Generierung der Modellgleichungen und daraus abzuleitender Ergebnisse. Die CA-generierten Lagrangeschen Modellgleichungen können mittels CA-Methoden auf die Existenz erster Integrale untersucht werden und sind gleichzeitig Ausgangspunkt für die automatisierte Generierung der für Schwingungs- und Stabilitätsuntersuchungen wichtigen Störungsgleichungen (vgl. [6]) sowie der in der Theorie optimaler Prozesse benötigten adjungierten Gleichungen. Der in [5] vom Autor vorgestellte Algorithmus ermöglicht in einheitlicher Weise die CA- wie auch die NU-Generierung der Lagrangeschen Gleichungen, ist also für eine flexible hybride Arbeitsweise besonders geeignet. Diese Eigenschaft des Algorithmus resultiert aus einer konsequenten *Algebraisierung* des klassischen Lagrange-Formalismus, ein Ergebnis von Untersuchungen zur analytischen Dynamik von MKS. Die rein algebraische Struktur des Algorithmus erlaubt, relativ bescheidene Standard-CAS oder Eigenentwicklungen anzuwenden. Das von Schiehlen und Kreuzer (Universität Stuttgart) auf der Grundlage der Newton-/Euler-Gleichungen entwikkelte MKS-Simulationsprogramm Neweul [9] kann infolge des nicht ableitungsfreien (d. h. nicht algebraisierten) Algorithmus die Bewegungsgleichungen nur symbolisch generieren. Die Algebraisierung wird quasi dem (selbstentwikkelten) CAS übertragen.

Für die Anwendung von CAS zur Untersuchung komplizierter Sachverhalte sind zwei sich diametral gegenüberstehende Konzeptionen denkbar:

1. Investition eines Minimums an Problemwissen in den Algorithmus und Nutzung eines leistungsfähigen Standard-CAS bei großem Speicherplatzbedarf und i. a. nur geringer Ausschöpfung des vollen Leistungsangebotes,
2. Investition eines Maximums an Problemwissen in den Algorithmus und Nutzung eines optimal angepaßten CAS bei geringstem Speicherplatzbedarf und nahezu vollständiger Inanspruchnahme des angebotenen Leistungsumfangs.

Eine allgemeingültige Empfehlung, die eine oder andere Konzeption bei der Bearbeitung einer konkreten Aufgabe zu realisieren, kann schwerlich gegeben werden, zumal Problemwissen u. U. erst auf der Grundlage der ersten Konzeption gewonnen werden kann!

Liegt aber hinreichend viel Problemwissen vor und ist hocheffiziente Software zu erstellen, so ist die zweite Konzeption zu bevorzugen. (Beispiel: Cruise missile).
Im folgenden wird am Beispiel der Mehrkörperdynamik die oben erwähnte 2. Konzeption demonstriert.

5.1. Phänomenologie von Mehrkörpersystemen

Unter einem MKS wird verstanden eine in den dreidimensionalen euklidischen Anschauungsraum E^3 eingebettete Menge endlich vieler starrer Körper, die untereinander und mit einem nicht zum System zählenden Fundament physikalisch und/oder geometrisch gekoppelt sind. Als Körper werden bezeichnet starre träge Körper, Punktmassen und starre trägheitslose Körper zur Realisierung gewisser geometrischer Kopplungen. Kopplung bedeutet dabei Einflußnahme auf den Bewegungszustand des MKS. Physikalische Kopplung wird durch eingeprägte Kräfte/Momente beschrieben, d. h. durch ein bekanntes Kraftgesetz physikalisch gegebener Kräfte (z. B. Feder-, Dämpferkräfte, Schwerkraft). Zwangsbedingungen beschreiben geometrische Kopplungen (z. B. ideale Gelenke, Stellmotoren). Alle Koppelelemente werden als trägheitslos betrachtet.

5.2. Der Lagrange-Formalismus für holonome Starrkörpersysteme

Die Bewegung eines holonom-skleronomen MKS mit dem Freiheitsgrad n wird beschrieben durch die Bewegung seines repräsentierenden Punktes $q = (q^1, \dots q^n)$ im n-dimensionalen Konfigurationenraum R^n; $q^a (a = 1, \dots, n)$ sind die generalisierten Koordinaten des MKS. Dieser R^n erfährt durch die kinetische Energie T des holonom-skleronomen MKS eine Maßbestimmung; der R^n wird metrisiert durch die positiv definite (und folglich reguläre) Koeffizientenmatrix g_{ab} der in den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot q^a$ quadratischen Form $T = \frac{1}{2} g_{ab} \dot q^a \dot q^b$. $g_{ab} = \dot\partial_a \dot\partial_b T$ heißt deshalb auch Metrik (2fach kovarianter Maßtensor) des R^n (verallgemeinerte Massenmatrix in der ingenieurtechnischen Literatur). Der so metrisierte R^n ist ein Riemannscher Raum V^n. Den eingeprägten Kräften/Momenten werden in wohldefinierter Weise generalisierte Kräfte Q_a (n-dimensionale kovariante Vektoren) zugeordnet. Die Kinetik von MKS wird durch das Prinzip der virtuellen Arbeit in Lagrangescher Fassung fundiert. Die Bewegungsgleichungen von MKS sind demzufolge die Lagrangeschen Gleichungen, und die Dynamik eines MKS kann als Punktdynamik im Riemannschen Raum V^n interpretiert werden. Folglich können Begriffe und Aussagen der Riemannschen Geometrie zur Beschreibung und Untersuchung des dynamischen Verhaltens von MKS verwendet werden (Geometrisierung der Dynamik).

Ausgehend von der kinetischen Energie T eines holonom-skleronomen MKS lauten die Lagrangeschen Gleichungen 2. Art

$$(\dot\partial_a T)^{\cdot} - \partial_a T = Q_a \tag{1}$$

in expliziter Form

$$g_{ab}(q)\,\ddot q^b + \Gamma_{abc}(q)\,\dot q^b \dot q^c = Q_a. \tag{2}$$

Dabei sind

$$g_{ab} = \sum_{k=1}^{k} (\underset{k}{m}\ \partial_a \underset{k}{X}^{(i)}\ \partial_b \underset{k}{X}^{(i)} + \underset{k}{\vartheta}^{ij}\ \partial_a \underset{k}{E}_i^{(i)}\ \partial_b \underset{k}{E}_j^{(i)} = g_{ba} \tag{3}$$

die Koordinaten des symmetrischen Maßtensors in V^n,

$$\begin{aligned}\Gamma_{abc} &= \frac{1}{2}(\partial_b g_{ac} + \partial_c g_{ab} - \partial_a g_{bc}) = \\ &= \sum_{k=1}^{k} (\underset{k}{m}\ \partial_a \underset{k}{X}^{(i)}\ \partial_b\ \partial_c \underset{k}{X}^{(i)} + \underset{k}{\vartheta}^{rs}\ \partial_a \underset{k}{E}_r^{(i)}\ \partial_b \partial_c \underset{k}{E}_s^{(i)} \\ &= \Gamma_{acb}\end{aligned} \tag{4}$$

die in den letzten beiden Indizes symmetrischen Christoffel-Symbole 1. Art und

$$Q_a = \sum_{k=1}^{k} (\underset{k}{K}^{(i)}\ \partial_a \underset{k}{X}^{(i)} + \frac{1}{2} \underset{k}{M}^r \varepsilon_r^{ij}\ \partial_a \underset{k}{E}_i^{(i)} \underset{k}{E}_j^{(i)}) \tag{5}$$

die generalisierten Kräfte,

$\underset{k}{X}^{(l)}$: Koordinaten des Massenmittelpunktes des Körpers k,

$\underset{k}{E}_i^{(l)}$: absolute Drehmatrix des Körpers k,

$\underset{k}{m}$: Masse des Körpers k,

$\underset{k}{\vartheta}^{rs}$: Binet'scher Trägheitstensor des Körpers k,

$\underset{k}{K}^{(l)}$: resultierende eingeprägte Kraft am Körper k,

$\underset{k}{M}^{r}$: resultierendes Moment aller am Körper k angreifenden eingeprägten Kräfte einschließlich aller Reduktionsmomente bezüglich des Massenmittelpunktes,

K: Anzahl der (starren) Körper des MKS.

(Geklammerte Indizes verweisen auf die Inertialbasis, nichtgeklammerte Indizes auf körperfeste Basen.)

Mit den Formeln (3), (4), (5) ist gemäß 1. Konzeption die Grundlage für die Anwendung eines CAS zur *symbolischen* Generierung der Modellgleichungen (2) gegeben. Die Praxis zeigt allerdings sehr schnell die Ineffizienz dieser Vorgehensweise. Deshalb wird im folgenden – mit Blick auf die 2. Konzeption – weiteres Problemwissen bereitgestellt.

5.3. Starrkörpersysteme mit kinematischer Baumstruktur

Konsequente Berücksichtigung der speziellen Topologie und Kinematik bestimmter Klassen von Starrkörpersystemen führt bei Verwendung einer geeigneten Notation zur Aufdeckung wichtiger *analytischer* und *algebraischer* Eigenschaften der den Lagrange-Formalismus beschreibenden Funktionen. Daraus resultieren bemerkenswerte algorithmische Vereinfachungen gegenüber dem Lagrange-Formalismus für allgemeine MKS, und die Effizienz entsprechender Software [4], [8] zur Dynamik-Simulation erhöht sich dadurch wesentlich.

Die speziellen Voraussetzungen sind bezüglich der

Topologie: Baumstruktur (offene kinematische Ketten) (A)

Kinematik: alle Gelenke sind (zylindrische) Schub- oder Drehgelenke mit dem Freiheitsgrad eins und repräsentieren skleronome geometrische Bindungen (B)

Notation: generalisierte Koordinaten werden mittels DENAVIT/HARTENBERG-Notation algorithmisch eingeführt. (C)

Voraussetzung (A) garantiert den *rekursiven* Aufbau kinematischer Grundfunktionen, mit denen Metrik, Christoffel-Symbole und generalisierte Kräfte generiert werden. Sie erweist sich auch für die Untersuchung von CMS (Constrained Mechanical System) nicht als gravierende Einschränkung, denn durch Aufschneiden geschlossener kinematischer Ketten entstehen immer MKS mit Baumstruktur.

Voraussetzung (B) fordert die äquivalente Ersetzung allgemeiner Gelenke (z. B. Kugel-, Kardangelenke) durch eine dem Gelenkfreiheitsgrad entsprechende Anzahl zylindrischer Dreh- und Schubgelenke. Das ist im physikalischen Modell des MKS stets möglich.

Die Bildung sämtlicher partiellen Ableitungen zur Berechnung der Metrik, Christoffel-Symbole und generalisierten Kräfte im traditionellen Kalkül gemäß (3), (4), (5) ist grundsätzlich auf *algebraische* Operationen (exakt!) reduzierbar; die Kinematik wird *„algebraisiert"*.

Die Verwendung von *Relativkoordinaten* nach (C) als generalisierte Koordinaten schließlich beeinflußt wesentlich *analytische* und *algebraische* Eigenschaften der kinematischen Grundfunktionen und folglich auch der Metrik, Christoffel-Symbole und generalisierten Kräfte. Geometrische, kinematische und – erforderlichenfalls – auch die dynamischen Zwangsbedingungen bei CMS lassen sich – wie Metrik, Christoffel-Symbole und generalisierte Kräfte – rein *algebraisch* mittels kinematischer Grundfunktionen konstruieren. Dabei sind die Q_a (gen. Kräfte) Linearformen, die g_{ab} (Metrik) quadratische Formen und die Γ_{abc} (Christoffel-Symbole) kubische Formen in den kinematischen Grundfunktionen, die ihrerseits *algebraisch rekursiv* ermittelt werden.

Darstellung des algebraisierten Lagrange-Formalismus

Dynamik von Mehrkörpersystemen

$L(k)$	– MKS-Topologie (Zusammenhangsfeld)
s_k	– Verteilung von Dreh- und Schubgelenken
$q = (q^a) = (q^1, \ldots, q^n)$	– repräsentierender Punkt des MKS im n-dimensionalen Konfigurationenraum R^n, n: Freiheitsgrad der MKS
$q^a := s_a \overset{\tau}{a} + (1 - s_a) \overset{\varphi}{a}$	– generalisierte Koordinaten des MKS mit kinematischer Baumstruktur
$\frac{\tau}{a}, \frac{\varphi}{a}$	– komplementäre Gelenkvariable (Verschiebung, Winkel) gemäß Denavit/Hartenberg-Notation
$T = \frac{1}{2} g_{ab}(q)\, \dot{q}^a \dot{q}^b$	– kinetische Energie eines skleronomen MKS
$(\dot{\partial}_a T)^{\cdot} - \partial_a T = Q_a$	– Lagrangesche Bewegungsgleichungen
$g_{ab}(q)\, \ddot{q}^b + \Gamma_{abc}(q)\, \dot{q}^b \dot{q}^c = Q_a$	– explizite Form der Lagrangeschen Gleichungen

$$g_{ab} := \sum_{k=b}^{k} [\underset{k}{m}\, \underset{k}{u}_{ia}\, \underset{k}{u}_{ib} + (1 - s_a)(1 - s_b)\, \underset{k}{\Theta}^{ij}\, \underset{k}{\Omega}_{ia}\, \underset{k}{\Omega}_{jb}], \quad a \leqslant b$$

$$\Gamma_{abc} := (1 - s_b) \sum_{k=c}^{k} \varepsilon_i{}^{qr} [\underset{k}{m}\, \delta^{ij}\, \underset{k}{u}_{ja}\, \underset{k}{\Omega}_{qb}\, \underset{k}{u}_{rc} +$$

$$+ (1 - s_a)(1 - s_c)\, \underset{k}{\vartheta}^{ij}\, \underset{k}{\Omega}_{ra}\, \underset{k}{\Omega}_{jb}\, \underset{k}{\Omega}_{qc}]$$

$(a < b \leqslant c \quad \text{oder} \quad b \leqslant a < c)$

$$Q_a := \sum_{k=a}^{k} [\underset{k}{K}^i \underset{k}{u}_{ia} + (1 - s_a) \underset{k}{M}^i \underset{k}{\Omega}_{ia}]$$

$$g_{ab} = g_{ba}, \ \Gamma_{abc} = \Gamma_{acb}, \ \Gamma_{abc} = -\Gamma_{cba} \quad \text{für} \quad b \leqslant a, c$$

– –

$$\underset{k}{u}_{ia} \equiv \underset{k}{U}_{ia} + s_a \delta_{3i} \delta_{ka} + (1 - s_a) \varepsilon_{si}{}^{j} \underset{L(k)}{\Omega}{}_{ja} \underset{k}{h}^s$$

Algebraisch rekursiver Aufbau der kinematischen Grundfunktionen $\underset{k}{U}_{ia}$, $\underset{k}{\Omega}_{ia}$:

$$\underset{k}{U}_{ia} := \begin{cases} [s_a \underset{k}{\hat{E}}_i{}^j + (1 - s_a) \cdot \underset{k}{d} \cdot \varepsilon_{1\mu}{}^j \underset{k}{\hat{E}}_i{}^\mu] \underset{k}{A}_j{}^3, & a = L(k) \\ \underset{k}{E}_i{}^j [\underset{L(k)}{U}{}_{ja} + (1 - s_a) \cdot \varepsilon_{sj}{}^3 \underset{k}{Z}^s \underset{L(k)}{\Omega}{}_{\varrho a}], & a \in P_{L^2(k)} \end{cases}$$

$$\underset{k}{\Omega}_{ia} := (1 - s_a) \cdot \begin{cases} \delta_i^3 & , \quad a = k \\ \underset{k}{E}_i{}^j \underset{L(k)}{\Omega}{}_{sa}, & a \in P_{L(k)} \end{cases}$$

$$\underset{k}{\hat{E}}_i{}^j(\underset{k}{\varphi}) = \delta_i^3 \delta_3^j + (\delta_i^j - \delta_i^3 \delta_3^j) \cos \underset{k}{\varphi} + \varepsilon_{3i}{}^j \sin \underset{k}{\varphi}$$

– ebene Drehmatrix

$$\underset{k}{A} = \underset{k}{A}(\underset{k}{\vartheta}, \underset{k}{\psi}) = \text{const.}$$

– Drehmatrix, welche die relative Lage der Gelenkachsen ζ_k und $\zeta_{L(k)}$ beschreibt,

$$E := \hat{E}A,$$

$\underset{k}{d}$: Abstand der Gelenkachsen ζ_k und $\zeta_{L(k)}$

$$\underset{k}{Z}^s = (\underset{L(k)}{\tau} + \underset{k}{\sigma}) \delta_3^s + \underset{k}{d} \cdot \underset{k}{A}_1{}^s$$

– Koordinaten des Verbindungsvektors $\overrightarrow{O_{L(k)} \ O_k}$ der Fußpunkte des gemeinsamen Lotes der Gelenkachsen $\zeta_{L(k)}$ und ζ_k,

$$\underset{k}{h}^s = \underset{k}{\tau} \cdot \delta_3^s + \underset{k}{\xi}^s$$

– relativer Ortsvektor des Massenmittelpunktes S_k bzgl. O_k,

$P_k = \{i/i \in N, \ i \leqslant i \leqslant k, \ i = L^p(k), \ p = 0, 1, \ldots, \varrho(k); \ L^{\varrho+1}(k) = 0\}$

$$\underset{k}{V}^i = \underset{k}{V}_i = \underset{k}{u}_{ia} \dot{q}^a, \ \underset{k}{\omega}^i = \underset{k}{\omega}_i = \underset{k}{\Omega}_{ia} \dot{q}^i$$

– anholonome Geschwindigkeitskoordinaten des Körpers k

$$\underset{k}{\dot{\mathfrak{R}}}_s = \underset{k}{\dot{X}}^{(i)} \mathfrak{n}_{(i)} = \underset{k}{V}^{(i)} \underset{k}{\mathfrak{E}}_i, \quad \underset{k}{\vec{\omega}} = \underset{k}{\omega}^{(i)} \underset{k}{\mathfrak{E}}_i,$$

$\mathfrak{n}_{(i)}$: o. n. Inertialdreibein, $\underset{k}{\mathfrak{E}}_i$: o. n. körperfestes Dreibein

Ein praxisrelevanter Vorzug des hier vorgestellten MKS-Algorithmus ist die Fähigkeit zur *Substrukturtechnik* und Parallelisierung. Bei *symbolischer* Arbeitsweise (CA-Methoden) können die kinematischen Grundfunktionen $\underset{k}{U}_{ia}$, $\underset{k}{\Omega}_{ia}$ für Teilstrukturen, die einem gegebenen MKS hinzugefügt werden sollen (ohne seine kinematische Baumstruktur zu verletzen) im voraus und unabhängig von diesem berechnet und in einer Bibliothek als Formeln abgelegt werden.

Nach dem Ankopplungsprozeß werden dann Metrik, Christoffel-Symbole und generalisierte Kräfte des neuen MKS in gewohnter Weise (symbolisch oder auch numerisch) generiert.

Ein wichtiger Aspekt der Möglichkeit, z. B. erste Integrale der Bewegungsgleichungen (Energie-, Impuls-, Drehimpulserhaltungssatz) *symbolisch* zu generieren, besteht darin, entweder mit deren Hilfe eine Ordnungsreduktion des Modellgleichungssystems zu erreichen oder die numerischen Integrationsergebnisse in folgendem Sinn zu testen: die Erfüllung erster Integrale längs der Trajektorie eines MKS ist eine *notwendige* Bedingung für die innere Widerspruchsfreiheit des mathematischen Modells (d. h. der computergenerierten Lagrangeschen Gleichungen), bei dissipativen skleronomen MKS ist die mechanische Gesamtenergie H = T + U streng monoton fallend. Ist eine notwendige Bedingung verletzt, so sind die numerischen Integrationsergebnisse sicher falsch!

Bei der Anwendung von CA-Methoden in der Dynamik von MKS spielen Vereinfachungsoperationen, besonders Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen, eine große Rolle. Es ist deshalb wichtig, Funktionen nach solchen Darstellungsformeln zu generieren, bei denen Orthogonalitäts-, Orthonormiertheitsrelationen und andere Vereinfachungsoperationen soweit wie möglich ohne CAS-Hilfe a priori berücksichtigt sind (Problemwissen!). Diese für die CA-Generierung effektiven Darstellungsformeln können durchaus voluminöser als solche für die NU-Generierung sein. Eine ausführlichere Untersuchung dieser Fragen erfolgt in [5].

In bezug auf konkrete Beispiele zur Anwendung von CAS in der Mehrkörperdynamik sei auf die Originalarbeiten [3] bis [8] verwiesen.

LITERATUR

[1] Buchberger, B.; Collins, G. E.; Loos, R.: Computer Algebra, Symbolic and Algebraic Computation. Springer-Verlag, Wien – New York, 1983.

[2] Buchberger, B., u. a.: Rechnerorientierte Verfahren. In: Mathematische Methoden in der Technik. B. G. Teubner Stuttgart, 1986.

[3] Clauss, R.; Keil, A.; Maisser, P.; Wolf, C.-D.: Dynamik-Simulation ausgewählter Klassen von Starrkörpersystemen mit Anwendungen in der Manipulator-/Robotertechnik. Algorithmen – Programme – Ergebnisse. AdW der DDR, Institut für Mechanik, Chemnitz, Report R-Mech-02/86.

[4] Hendel, K.: Anwenderinformation zum Programmsystem DMKS-86. Störungsgleichungen und kleine Schwingungen von Mehrkörpersystemen. AdW der DDR, Institut für Mechanik, Chemnitz, 1989, Report No. 20.

[5] Maisser, P.: Analytische Dynamik von Mehrkörpersystemen. ZAMM 68(1988)10, 463 – 481.

[6] Maisser, P.; Hendel, K.: Symbolic Computations in Multi-Rigid-Body Systems 1st Conference on Mechanics, Prague, 29. 06. – 03. 07. 1987, Proceedings, Volume 6, 198 – 201.

[7] Schächter, D. B.; Levinson, D. A.: Interactive Computerized Symbolic Dynamics for the Dynamicist; The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 36, No. 4 October–December 1988, pp. 365 – 388.

[8] Wolf, C.-D.; Keil, A.; Maisser, P.: Anwenderinformation zum Programmsystem DMKS-86. Dynamik-Simulation von Mehrkörpersystemen. AdW der DDR, Institut für Mechanik, Chemnitz 1988, Report No. 13.

[9] Neweul '85: Ein Programmsystem zur Berechnung symbolischer Bewegungsgleichungen von Mehrkörpersystemen. Institut B für Mechanik – Universität Stuttgart. 1985.

[10] Beltzer, A. I.: Variational and Finite Element Method. A Symbolic Computation Approach. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong 1990

Anschrift des Autors:
Prof. Dr. sc. nat. P. Maisser
Akademie der Wissenschaften der DDR
Institut für Mechanik
PSF 408
Chemnitz
9010