

Zur mechanischen Analyse von Faltenwerken mit FALT-FEM

H. Müller, A. Hoffmann

Allgemeine Faltenwerke mit ihren C1-Unstetigkeiten stellen beträchtliche Anforderungen an die mechanische Analyse. Grobe – aber plausible – Ingenieurapproximationen [1] können heute durch feinere FEM-Approximationen ergänzt werden. Seit Mitte der siebziger Jahre wurden an der TU Dresden auf der Basis hybrider finiter Schnittkräftelemente Lösungen entwickelt, die sowohl gute Schnittkraftgenauigkeit mit relativ wenig Knotenfreiheitsgraden erreichen als auch die kinematische Kompatibilität in den Kanten und Ecken einfach sichern. Die Lösungen für den linearen und nichtlinearen Bereich werden hier skizziert und an Beispielen demonstriert.

On the mechanical analysis of folded-plate structures with FALT-FEM

General folded-plate structures with their C1-discontinuities make considerable demands on the mechanical analysis. Nowadays, rough – but plausible – engineering approximations [1] may be supplemented by finer FEM-approximations. Since the mid-1970s, at the Dresden University of Technology on the basis of hybrid finite elements of internal forces there have been developed solutions by which a good accuracy of internal forces with relatively few degrees of freedom of joints is achieved as well as the kinematic compatibility in the edges and corners is secured in a simple way. The solutions for the linear and nonlinear ranges are outlined and demonstrated by examples.

Faltenwerke werden im konstruktiven Ingenieurbau breit eingesetzt. Einige Konstruktionsbeispiele sind in Bild 1 angegeben.

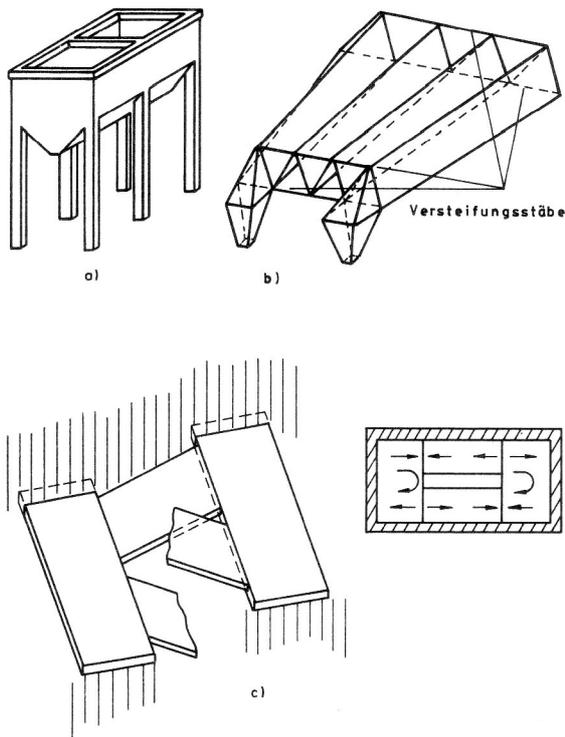


Bild 1

Beispiele für allgemeine Faltenwerke

- a) aufgeständerter Schüttgutbehälter
- b) nichtprismatisches Dachfaltwerk mit Versteifungsstäben in den Endbereichen und Verankerung (nur angedeutet)
- c) Treppenlauf; Ansicht, Schubkräfte in Lauf und Podest (Prinzip)

1. Zur linearen Statik (FALT-FEM 1)

1.1. Allgemeine Form des hybriden Energiefunktional [2]

Beim Minimalprinzip der Ergänzungsenergie müssen die im Funktional (3D-Form)

$$\Pi_c = \int_V w_c(\sigma) dV - \int_{O_v} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{v}} dO \quad (1)$$

$w_c(\sigma)$: ErgErgänzungsenergiegedichte

O_v : Randbereich mit vorgeschriebenen Verschiebungen $\bar{\mathbf{v}}$

\mathbf{p} : (Stütz-)Spannungskomponenten im Bereich O_v enthaltenen (unbekannten inneren) Spannungen σ und (unbekannten) „Stütz“ Spannungen \mathbf{p} die Gleichgewichtsbedingungen – im Inneren und am Rand – und das elastische Stoffgesetz mit zugehörigen Verzerrungen streng erfüllen. Bei Verzicht auf die strenge Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen am Rand erhält man aus (1) mittels der Lagrange-Faktor-Technik ein Funktional hybrider Form

$$\Pi_h = \int_V w_c(\sigma) dV - \int_{O_v} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{v}} dO - \int_{O_p} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{v} dO \quad (2)$$

Π_h enthält nun auch die (unbekannten) Randverschiebungen \mathbf{v} . Das Gleichgewicht am Rand wird nun nur noch im gewichteten integralen Mittel erfüllt, Gewichtsfunktionen sind die \mathbf{v} . Bei Unterteilung des Kontinuums in n finite Elemente nimmt (2) die Form an

$$\Pi_h = \sum_{e=1}^n \left\{ \int_V w_c(\sigma) dV - \int_{O_v^e} \mathbf{p}^T \bar{\mathbf{v}} dO + \int_{O_p^e} (\mathbf{p}^{r,e} - \bar{\mathbf{p}}^{r,e})^T \mathbf{v}^r dO \right\} \quad (3)$$

r, e : Rand des Elementes e

Beim Übergang vom 3D- zum 2D-Kirchhoff-Love-Kontinuum (Platte, Scheibe) sind nach Integration über die Elementdicke die \mathbf{v}^r die Verschiebungen – einschließlich der zu Kirchhoff gehörigen Rotationen – in den Elementrandlinien, \mathbf{p}^r die dementsprechenden Kräfte. Zur Berücksichti-

$$s = \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_s \\ \mathbf{P}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_s \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}_s \\ \bar{\mathbf{P}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\beta}_s \\ \bar{\beta}_p \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$= \mathbf{P} \beta + \bar{\mathbf{P}} \bar{\beta}$$

müssen die Ansatzfunktionen $\mathbf{P}_s \beta_s, \mathbf{P}_p \beta_p$ die homogenen Scheiben- bzw. Platten-Gleichgewichtsbedingungen streng erfüllen; $\bar{\mathbf{P}}_s \bar{\beta}_s, \bar{\mathbf{P}}_p \bar{\beta}_p$ sind Partikulärlösungen der inhomogenen Gleichungen. Nach Einsetzen der x, y -Koordinaten der Elementränder können mittels (14) die Elementrandschnittkräfte ebenfalls in Abhängigkeit von den Freiwerten β und den Lastanteilen $\bar{\beta}$ entwickelt werden.

$$p^{r,e} = \mathbf{R} \beta + \bar{\mathbf{P}} \bar{\beta} \quad (15)$$

Längs der Elementränder sind Randlasten $\bar{p}^{r,e}$ und in den Verbindungsknoten der Elemente Kräfte S_k zugelassen. Zusätzlich sind über die Vektoren $\mathbf{Q}, \bar{\mathbf{Q}}$ (21), (22) die zur Kirchhoff-Theorie gehörigen Eckkräfte zu berücksichtigen. Die Elementrandverschiebungen werden mittels Interpolationsfunktionen in \mathbf{L} in Abhängigkeit von den Verschiebungen q^e der Elementknoten diskretisiert. Vorgeschriebenen Knotenverschiebungen \bar{q} werden beim Aufstellen des Gleichungssystems für die entsprechenden q^e eingeführt.

$$v^e = \mathbf{L} q^e \quad (16)$$

Das Energiefunktional (5) geht damit in die diskretisierte Form über

$$\Pi_h = \sum_{e=1}^n \left[\frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta + \beta^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\beta} + \beta^T \mathbf{h} (\varphi_0 - \varphi_k) + X - \beta^T \mathbf{T} q^e + \mathbf{Q}_0^T q^e \right] \quad (17)$$

mit den Unbekannten β und q^e , den Abkürzungen

$$\mathbf{H} = \int_{A^e} \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P} dA^e \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \int_{A^e} \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{A} \bar{\mathbf{P}} dA^e \quad (19)$$

$$\mathbf{h} = \int_{A^e} \mathbf{P}^T dA^e \quad (20)$$

$$\mathbf{T} = \int_{O^e} \mathbf{R}^T \mathbf{L} dO + \frac{\partial}{\partial \beta} \mathbf{Q}^T \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \int_{O^e} \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{L} dO + \frac{\partial}{\partial \beta} \bar{\mathbf{Q}}^T \quad (22)$$

$$\mathbf{Q}_0 = -\bar{\beta}^T \bar{\mathbf{T}} + \int_{O^e} S_0^T \mathbf{L} dO + S_k^T \quad (23)$$

sowie

$$X = \text{Funktion von } \bar{\beta}, \varphi_0, \varphi_k \quad (24)$$

Die Schnittkraftfreiwerte β sind elementlokal und ohne Kopplung zwischen den Elementen. Dagegen sind die elementlokalen Knotenfreiheitsgrade q^e und die globalen Knotenfreiheitsgrade q miteinander gekoppelt.

$$q^e = \mathbf{I} g \longrightarrow \Pi_h = \sum_e \mathcal{L}^e(\beta, q^e(q)) = \sum_e \Pi_h^e \quad (25)$$

\mathbf{I} enthält die geometrischen Transformationsbeziehungen zwischen elementlokalem und globalem Koordinatensystem. In der Stationaritätsforderung

$$\delta \Pi_h = \sum_e \left(\delta \beta^T \frac{\partial \Pi_h^e}{\partial \beta} + \delta q^T \frac{\partial \Pi_h^e}{\partial q} \right) = \sum_e \left(\delta \beta^T \frac{\partial \Pi_h^e}{\partial \beta} + \delta q^{eT} \frac{\partial \Pi_h^e}{\partial q^e} \right) = 0 \quad (26)$$

dürfen alle β und q ; nicht aber die q^e unabhängig variiert werden, $\delta q^{eT} = \delta q^T \mathbf{I}^T$. Mittels

$$\frac{\partial \Pi_h^e}{\partial \beta} = \mathbf{H} \beta + \bar{\mathbf{H}} \bar{\beta} + \mathbf{h} (\varphi_0 - \varphi_k) - \mathbf{T} q^e = 0 \quad (27)$$

kann β in Abhängigkeit von q^e eliminiert und eingesetzt werden in den verbleibenden Teil von (26)

$$\delta \Pi_h = \sum_{e=1}^n \left\{ \delta q^{eT} [-\mathbf{T}^T \beta + \mathbf{Q}_0] \right\} = \sum_{e=1}^n \delta q^{eT} \mathbf{F}^e = 0 \quad (28)$$

Jeder Summand von (28) beschreibt die virtuelle Arbeit der Elementknotenkräfte \mathbf{F}^e des Elementes e bei der virtuellen Elementknotenverschiebungen δq^{eT} , die zur unabhängigen Variation von δq gehören.

$$\frac{\partial \Pi_h^e}{\partial q^e} = \mathbf{F}^e = \mathbf{k}^e q^e - \mathbf{R}^e - \mathbf{R}_k^e \quad (29)$$

mit der Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T} \quad (30)$$

und den Belastungsanteilen

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{H}} \bar{\beta} + \mathbf{Q}_0 + \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h} \varphi_0 \quad (31)$$

$$\mathbf{R}_k^e = -\mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h} \varphi_k \quad (32)$$

Aus (29) bis (32) erhält man unter Beachtung der Transformation zwischen elementlokalen und globalen Koordinaten das Gleichgewichtssystem für den Gesamtverschiebungsvektor q

$$\mathbf{K} q - \mathbf{R} - \mathbf{R}_k = 0 \quad (33)$$

1.4. Detaillierung der Ansatzfunktionen

Für die Schnittkräfte werden vollständige quadratische Ansätze verwendet

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & 0 \\ 0 & -y & 0 & -2xy & -\frac{1}{2}y^2 & 0 & 0 & 0 & -x & 0 & -\frac{1}{2}x^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\beta_s^T = [\beta_1^s \ \beta_2^s \ \dots \ \beta_{12}^s] \quad (35)$$

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -xy & 1 & x & y & x^2 & y^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\beta_p^T = [\beta_1^p \ \beta_2^p \ \dots \ \beta_{17}^p] \quad (37)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_s = \begin{bmatrix} -x & 0 \\ 0 & -y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{\beta}_s = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{P}}_p = \begin{bmatrix} -x^2 \\ -\frac{y^2}{3} \\ -\frac{xy}{2} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{p}}_p = [p_z] \quad (39)$$

Mit den Ansatzfunktionen $\bar{\mathbf{P}}_p, \bar{\mathbf{p}}_p$ der Partikulärlösung können konstante Flächenlasten erfaßt werden. Mit den 17 Freiwerten des Plattenansatzes werden nicht nur die Plattengleichgewichtsbedingungen streng erfüllt sondern auch die v_z -Differentialgleichung der einschichtigen Platte bei beliebigem E und ν .

Die Elementrandschnittkräfte $p^{r,e}$ werden über die Schnittkraftansätze entwickelt. Für jeden Elementrand wird ein lokales Randkoordinatensystem definiert (Bild 3). Die Randschnittkraftdefinition bzgl. der Randkoordinaten ist Bild 4 zu entnehmen.

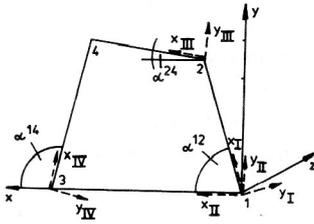


Bild 3
Allgemeines Viereck; Geometrie

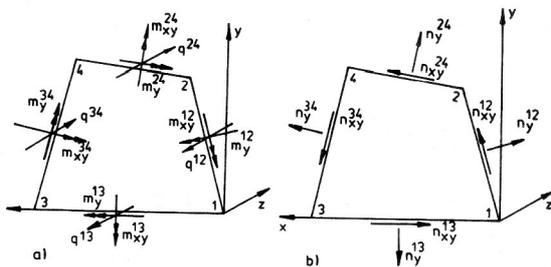


Bild 4
Allgemeines Viereck; Randschnittkräfte
a) Platte b) Scheibe

Die Torsionsmomente werden als Kirchhoffsche Ersatzquerkräfte zur Querkraft des Randes r addiert.

$$q^*, r = q_r + \frac{\partial m_{xy}^r}{\partial x^r} \quad (40)$$

Speziell für das allgemeine Viereckelement gilt

$$(\mathbf{p}_s^r)^T = [n_{xy}^{12} n_y^{12} - n_{xy}^{13} n_y^{13} - n_y^{13} n_{xy}^{24} n_y^{24} - n_{xy}^{34} n_y^{34}] \quad (41)$$

$$(\mathbf{p}_p^r)^T = [-q^{*12} - m_y^{12} - q^{*13} m_y^{13} q^{*24} - m_y^{24} q^{*34} m_y^{34}] \quad (42)$$

Nach Transformation der Schnittkraftansätze (14) in das jeweilige lokale Randkoordinatensystem r

$$\begin{bmatrix} n_x^r \\ n_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha^r & \cos^2 \alpha^r & -2 \sin \alpha^r \cos \alpha^r \\ -\sin \alpha^r \cos \alpha^r & \sin \alpha^r \cos \alpha^r & \cos^2 \alpha^r - \sin^2 \alpha^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\begin{bmatrix} m_y^r \\ m_{xy}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha^r & \cos^2 \alpha^r & -\sin \alpha^r \cos \alpha^r \\ \pm \sin \alpha^r \cos \alpha^r & \mp \sin \alpha^r \cos \alpha^r & \pm \sin^2 \alpha^r \mp \cos^2 \alpha^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$[q_r] = \begin{bmatrix} \pm \sin \alpha^r & \mp \cos \alpha^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} \quad (45)$$

(Die oberen Vorzeichen in (44), (45) gelten für die Ränder 12, 34, die unteren für die Ränder 13, 24)

und Einsetzen der jeweiligen Randgleichungen in den Ansätzen für \mathbf{P}_p und \mathbf{p}_p lassen sich die Inhalte \mathbf{R}_p und \mathbf{R}_s bestimmen. Durch Einsetzen der Eckkoordinaten in m_{xy}^r werden die Eckkräfte \mathbf{Q} (21) ermittelt.

Die gewählten Ansätze für die Randverschiebungen gewährleisten die Verschiebungs- und Verdrehungskompatibilität auch an den Faltwerkskanten. Im lokalen Randkoordinatensystem werden Verschiebungen senkrecht zum Rand mit Hilfe kubischer Ansätze (Hermitesche Interpolationspolynome) durch die Knotenverschiebungen approximiert. Verschiebungen in Randrichtung bzw. Randverdrehungen werden linear interpoliert.

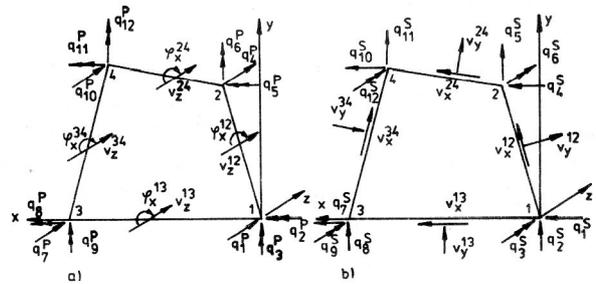


Bild 5
Allgemeines Viereck; Randverschiebungen
a) Platte
b) Scheibe

Speziell am Rand 12 des allgemeinen Viereckelementes (Bild 5) gilt für die Scheibenanteile:

$$v_x^{12} = (1 - \xi_{12}) (q_1^s \cos \alpha^{12} + q_2^s \sin \alpha^{12}) + \xi_{12} (q_4^s \cos \alpha^{12} + q_5^s \sin \alpha^{12}) \quad (46)$$

$$v_y^{12} = h_1(\xi_{12}) (-q_1^s \sin \alpha^{12} + q_2^s \cos \alpha^{12}) + h_2(\xi_{12}) q_3^s + h_3(\xi_{12}) (-q_4^s \sin \alpha^{12} + q_5^s \cos \alpha^{12}) + h_4(\xi_{12}) q_6^s$$

und für die Plattenanteile:

$$v_z^{12} = h_1(\xi_{12}) q_1^p + h_2(\xi_{12}) (q_2^p \sin \alpha^{12} - q_3^p \cos \alpha^{12}) + h_3(\xi_{12}) q_4^p + h_4(\xi_{12}) (q_5^p \sin \alpha^{12} - q_6^p \cos \alpha^{12}) \quad (47)$$

$$\varphi_x^{12} = (1 - \xi_{12}) (q_2^p \cos \alpha^{12} + q_3^p \sin \alpha^{12}) + \xi_{12} (q_5^p \cos \alpha^{12} + q_6^p \sin \alpha^{12})$$

mit den Hermite-Polynomen

$$h_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad h_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (48)$$

$$h_2(\xi) = l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3) \quad h_4(\xi) = l(-\xi^2 + \xi^3)$$

$$\xi = \frac{x}{l}$$

Damit kann die Abhängigkeit der Randverschiebungen v_s^r und v_p^r von den Knotenverschiebungen q_s^e und q_p^e über die Matrizen L_s und L_p angeschrieben werden.

Für das allgemeine Viereckelement gilt

$$(v_s^r)^T = [v_x^{12} v_y^{13} v_x^{13} v_y^{24} v_x^{24} v_y^{34} v_x^{34} v_y^{34}] \quad (49)$$

$$(v_p^r)^T = [v_z^{12} \varphi_x^{12} v_z^{13} \varphi_x^{13} v_z^{24} \varphi_x^{24} v_z^{34} \varphi_x^{34}] \quad (50)$$

$$(q_s^e)^T = [q_1^e \ q_2^e \ \dots \ q_i^e] \quad (51)$$

$$(q_p^e)^T = [q_1^e \ q_2^e \ \dots \ q_{12}^e] \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} v_s^r \\ v_p^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s \\ L_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_s^e \\ q_p^e \end{bmatrix} \quad (53)$$

Ausführlich sind die Matrizen L sowie R und \bar{R} für Dreiecke in [5] für Rechtecke in [4] und für allgemeine Vierecke in [6] beschrieben. Der Elementkatalog wird durch Verschiebungs- Stabelemente für Stäbe mit kompaktem Querschnitt ergänzt, exzentrische Anschlußbedingungen in den Faltwerkkannten sind beachtet. Entwicklung und Einbau hybrider Stabelemente sind in Bearbeitung.

1.5. Rechentechnische Umsetzung

In den 70er Jahren an der Anlage BESM 6 der TU Dresden (mittels ALGOL 60) installiert, steht FALT-FEM 1 nun – modular strukturiert und über FORTRAN 77 auf IBM-kompatible Mikrorechner (MS-DOS) umgesetzt – zur Verfügung. Derzeitige Leistungsbegrenzung: 2000 Elemente, 2000 Knoten, 20 Lastfälle, maximale Frontbreite von 600 Freiheitsgraden. Beispiele wurden in Verbindung mit weitergehenden mechanischen Effekten in die folgenden Abschnitte aufgenommen.

2. Zur linearen Kinetik (FALT-FEM 5) [7]

2.1. Funktionale, Ansatzfunktionen, Zeitdifferentialgleichung

Im kinetischen Fall gelingt es wegen der dynamischen Massenkräfte i. a. nicht mehr, die Gleichgewichtsbedingungen a priori streng zu erfüllen. Mit Lagrange-Faktoren sind diese daher dem Funktional (1) zuzufügen; außerdem ist durch Zeitintegration zwischen zwei offenen Zeitpunkten t_1 und t_2 das aus allen dazwischen liegenden differentialen Zeitintervallen resultierende Funktional zu bilden.

Im 3D-Kontinuum erhält man

$$\Pi_{gh} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_V [w_c(\sigma) + (\mathbf{G}\sigma + \bar{p}_v - \rho\ddot{v})^T \lambda] dV - \int_{O_v} \mathbf{p}^T \bar{v} dO - \int_{O_p} (\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})^T \mathbf{v} dO \right\} dt \quad (54)$$

\mathbf{G} : die Differentialoperatormatrix der differentialen Gleichgewichtsbedingungen

\bar{p}_v : Spaltenvektor gegebener Volumenlasten

Nach Elimination von λ über die entsprechenden Stationaritätsbedingungen und Übergang auf die FE-Form wird das dem modifizierten Reissnerschen Variationsprinzip entsprechende gemischt hybride Funktional

$$\Pi_{gh} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^n \left\{ \int_V [N_c(\sigma) + (\mathbf{G}\sigma + \bar{p}_v)^T \mathbf{v} + \frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{v}}^T \dot{\mathbf{v}}] dV - \int_{O_v^e} (\mathbf{p}^r)^T \bar{\mathbf{v}} dO - \int_{O_p^e} (\mathbf{p}^{r,e} - \bar{\mathbf{p}}^{r,e})^T \mathbf{v}^r dO \right\} dt \quad (55)$$

Mit den unbekannt Funktionen σ , \mathbf{v} im Elementinneren und $\mathbf{p}^{r,e}$, \mathbf{v}^r auf den Elementrändern. (55) wurde wie folgt weiter aufbereitet:

– Übergang vom 3D-Kontinuum zum 2D-Kirchhoff-Love-Kontinuum (mit der zugehörigen Integration über die Elementdicke)

– Schnittkraftansätze, die die statischen Gleichgewichtsbedingungen streng erfüllen (analog zur linearen Statik)

$$\mathbf{s} = \mathbf{P} \boldsymbol{\beta} + \bar{\mathbf{P}} \bar{\boldsymbol{\beta}} \quad (56)$$

↪ Wegfall des zweiten Termes in der ersten Zeile von (55)

– keine Verschiebungsvorschreibungen ↪ Wegfall des ersten Termes der zweiten Zeile von (55) – Einführung tatsächlich vorgeschriebener Knotenverschiebungen erst beim Aufstellen des Gleichungssystems der Knotenverschiebungen

– Interpolation der Verschiebungen \mathbf{v} im Element und \mathbf{v}^r auf den Elementrändern in Abhängigkeit vom Elementknotenverschiebungsvektor \mathbf{q} (an jedem Knoten 6 Freiheitsgrade)

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{q}, \quad \mathbf{v}^r = \mathbf{L} \mathbf{q} \quad (57)$$

Nach Einführung der Schnittkraft- und Verschiebungsansätze des 2D-Kontinuums lautet das Funktional

$$\Pi_{gh} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^n \left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^T \bar{\mathbf{H}} \bar{\boldsymbol{\beta}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^e{}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}}^e - \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{T} \mathbf{q}^e + \mathbf{Q}_0^T \mathbf{q}^e \right] dt = \Pi_{gh}(\boldsymbol{\beta}, \mathbf{q}^e, \dot{\mathbf{q}}^e) \quad (58)$$

Gegenüber Π_h der Statik ist hinzugekommen der Term der kinetischen Energie mit den Knotengeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}^e$ – bei Vernachlässigung der (lokalen) Rotationsträgheiten –

$$\mathbf{m} = \int_A \mathbf{N}^T \Omega \mathbf{N} dA \quad (59)$$

Ω : Masse je Flächeneinheit

Die $\boldsymbol{\beta}$, $\bar{\boldsymbol{\beta}}$, \mathbf{q}^e , $\dot{\mathbf{q}}^e$ sind nun Funktionen der Zeit. Analog zur Statik können die $\boldsymbol{\beta}$ aus den Stationaritätsforderungen

$$\frac{\delta \Pi_{gh}}{\delta \boldsymbol{\beta}} = 0 \quad (60)$$

elementweise eliminiert werden. Π_{gh} geht damit über in

$$\Pi_{gh} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{e=1}^n \left[-\frac{1}{2} \mathbf{q}^e{}^T \mathbf{k} \mathbf{q}^e + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^e{}^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{q}}^e + \mathbf{Q}_0^T \mathbf{q}^e \right] dt \quad (61)$$

und nach Ausführung der Elementsummutation

$$\Pi_{gh} = \int_{t_1}^{t_2} \left[-\frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{k} \mathbf{q} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{Q}_0^T \mathbf{q} \right] dt \quad (62)$$

mit nun q als Gesamtknotenverschiebungsvektor, M als Gesamtmassenmatrix und \dot{Q}_0 als Gesamtlastvektor. Die zu den Stationaritätsbedingungen von Π_{gh} gemäß (62) gehörige Eulersche Differentialgleichung lautet

$$M \ddot{q} + kq = \dot{Q}_0 \quad (63)$$

Viskose Systemdämpfungskräfte $D \dot{q}$ können auf der linken Gleichungsseite unter Verwendung der Bequemlichkeits-hypothese

$$D = \alpha_1 M + \alpha_2 K \quad (64)$$

erfaßt werden.

In den unten folgenden Beispielen wurden für die Schnittkräfte und Elementrandverschiebungen die gleichen Ansätze

wie in der Statik (Abschnitt 1.4.) verwendet. Für das Rechteckelement wurden Ansätze für die Platten- und Scheibenverschiebungen wie folgt zugefügt:

$$\begin{aligned} v_z(\xi, \zeta, t) = & h_1(\xi) h_1(\zeta) q_1^P + h_2(\zeta) (1-\xi) q_2^P - h_2(\xi) (1-\zeta) q_3^P \\ & + h_1(\xi) h_3(\zeta) q_4^P + h_4(\zeta) (1-\xi) q_5^P - h_2(\xi) \zeta q_6^P \quad (65) \\ & + h_3(\xi) h_1(\zeta) q_7^P + h_2(\zeta) \xi q_8^P - h_4(\xi) (1-\zeta) q_9^P \\ & + h_3(\xi) h_3(\zeta) q_{10}^P + h_4(\zeta) \xi q_{11}^P - h_4(\xi) \zeta q_{12}^P = N_p q_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x(\xi, \zeta, t) = & h_1(\zeta) (1-\xi) q_1^S - h_2(\zeta) (1-\xi) q_2^S + h_3(\zeta) (1-\xi) q_3^S \\ & - h_4(\zeta) (1-\xi) q_4^S + h_1(\zeta) \xi q_5^S - h_2(\zeta) \xi q_6^S \quad (66) \\ & + h_3(\zeta) \xi q_{10}^S - h_4(\zeta) \xi q_{12}^S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_y(\xi, \zeta, t) = & h_1(\xi) (1-\zeta) q_2^S + h_2(\xi) (1-\zeta) q_3^S + h_1(\xi) \zeta q_4^S \\ & + h_2(\xi) \zeta q_5^S + h_3(\xi) (1-\zeta) q_6^S + h_4(\xi) (1-\zeta) q_7^S \quad (67) \\ & + h_3(\xi) \zeta q_{11}^S + h_4(\xi) \zeta q_{12}^S \end{aligned}$$

2.2. Eigenschwingungen

Mit dem Ansatz für die Knotenverschiebungen

$$q(t) = q \sin(\omega_j t + \varphi_j) \quad (68)$$

folgt aus (63) das lineare algebraische Eigenwertproblem

$$(K - \omega_j^2 M) q = 0 \quad (69)$$

Zur Lösung wurde u. a. die simultane Gradienten-Iteration des Programmsystems SIMGRA [8] eingesetzt. Für ein Modell-„Dachfaltwerk“ Bild 6 wurden in Bild 7 und Bild 8 die ersten beiden Eigenkreisfrequenzen und auch – etwas vereinfacht – Eigenformen für das unausgesteifte und für das in den „Endquerschnitten“ mit je einem Stab I160 ausgesteifte System gegenübergestellt. Netzverfeinerungen

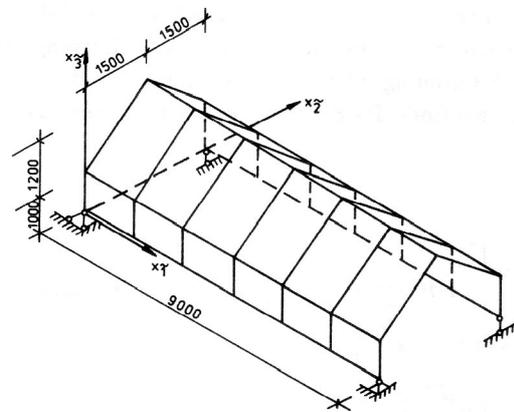


Bild 6
Dachfaltwerk; Geometrie, Lagerung, Vernetzung
 $E = 3.47 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\rho = 2.4 \text{ Mg/m}^3$,
 $\nu = 0.2$, $h = 0.1 \text{ m}$, Bk 35

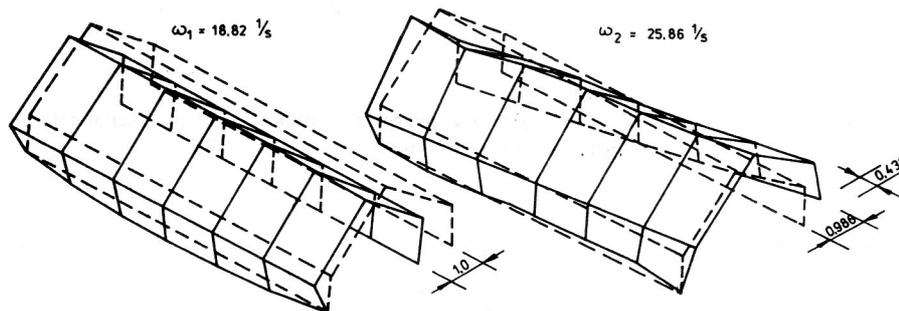


Bild 7
Dachfaltwerk; nicht ausgesteift,
die ersten beiden Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen

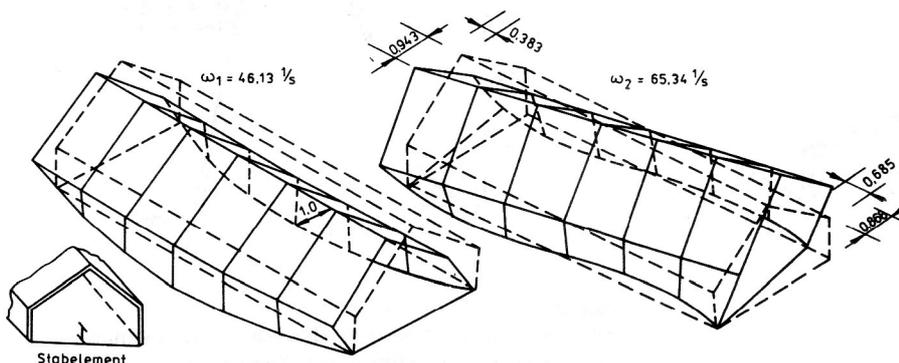


Bild 8
Dachfaltwerk; in den „Endquer-
schnitten“ ausgesteift, die ersten
beiden Eigenkreisfrequenzen
und Eigenformen

brachten keine wesentlichen Ergebnisveränderungen mehr. Auf den Eigenschwingungen aufbauend, enthält das Programm auch die Systemanalyse unter seismischer Einwirkung nach der linearen Antwortspektrenmethode mit SRSS-Überlagerung.

2.3. Instationäre Schwingungen – implizite Zeitschrittintegration

Mit $\dot{q} = u$ und (63) wird für einen Zeitschritt von t nach $t + \Delta t$

$$q(t + \Delta t) = q(t) + \int_t^{t+\Delta t} u(\tau) d\tau \quad (70)$$

$$M u(t + \Delta t) = u(t) - K \int_t^{t+\Delta t} q(\tau) d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \dot{Q}_0(\tau) d\tau \quad (71)$$

Bei Verwendung der Zeitinterpolationen von [9] – Hermitepolynome 3. Ordnung für $q(\tau)$ und Lagrange-Polynome 2. Ordnung für $\dot{Q}_0(\tau)$ – bekommt man die Knoten- \dot{q} am Ende des Zeitschrittes mit $x = \{q, \dot{q}\}$ aus

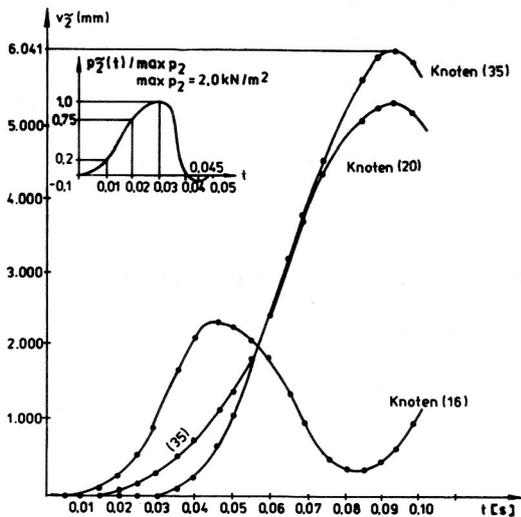


Bild 9
Dachfaltwerk; Zeitfunktion der Verschiebung v_2 in ausgewählten Knoten, Last-Zeit-Funktion

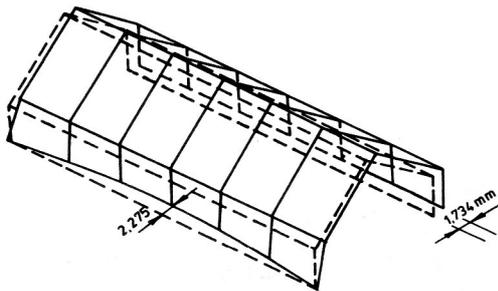


Bild 10
Dachfaltwerk; Schwingform zum Zeitpunkt $t = 0.055$ s

$$A x(t + \Delta t) = B x(t) + F \quad (72)$$

mit

A, B = Funktion von $M, K, \Delta t$

F = Funktion von $\dot{Q}_0(t), \dot{Q}_0(t + \frac{1}{2}\Delta t), \dot{Q}_0(t + \Delta t), \Delta t$

Der Abschneidefehler dieser unbedingt stabilen Zeitschrittintegration von [9] hat die günstige Größenordnung von Δt^2 . Das Dachfaltwerk von Bild 6 wurde bei gleicher Ver-netzung unter einer kurzzeitigen von „links“ wirkenden, gleichförmig verteilten Flächenlast untersucht. Die Lastzeitfunktion und die Verschiebungen einiger Knoten sind im Bild 9 aufgetragen. Erkennbar ist die spätere aber stär-

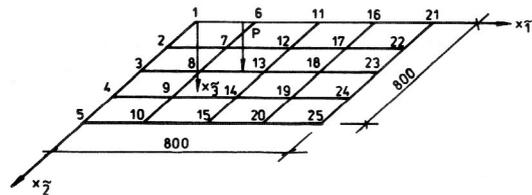


Bild 11

Allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte; Geometrie, Ver-netzung, $E = 6.9 \cdot 10^7$ kN/m², $\rho = 2.62$ Mg/m³, $h = 0.025$ m, $\nu = 0.33$, $P = 20$ kN

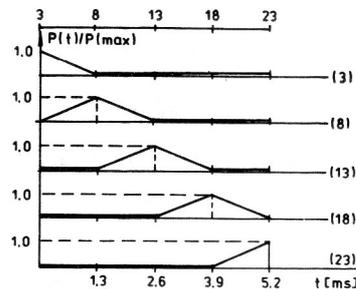


Bild 12

Allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte; Zeitabhängige Knotenbelastung für die Knoten 3, 8, 13, 18, 23

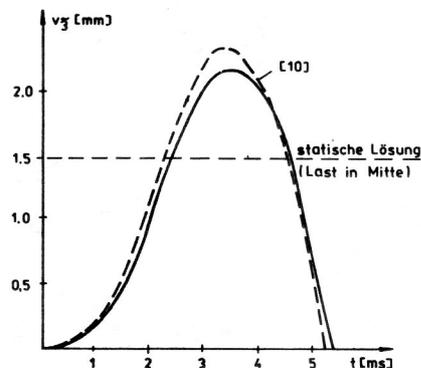


Bild 13

Allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte; Zeitfunktion der Verschiebung v_2 im Mittelpunkt (Knoten 13)

kere Reaktion der Knoten im lastabseitigen Falterwerksbereich gegenüber dem Lastanliegenden. In Bild 10 wurde die Schwingform zum Zeitpunkt $t = 0.055$ s vereinfacht dargestellt. Die vorgebbare Zeitabhängigkeit der Belastung kann auch zur Simulation der Ortsveränderlichkeit von Lasten genutzt werden. Zur Nachrechnung des Beispiels einer Platte mit schnell darüberlaufender Last in der Linie $x_2 = l/2$ aus [10] wurde hier die Lasteintragung vereinfachend durch entsprechend der Lastgeschwindigkeit von 157.3 m/s zeitlich linear veränderliche Knotenlasten der Knoten 3, 8, 13, 18, 23 simuliert, Bild 11 und Bild 12. Die mit der Zeitschrittweite $\Delta t = 0.34$ ms erhaltene Zeitfunktion der Mittenverschiebung ist in Bild 13 der in [10] angegebenen gegenübergestellt.

3. Zur physikalisch nichtlinearen Statik und zur Erfassung viskosen Stoffverhaltens

3.1. Inkrementale Form des Variationsprinzips

Betrachtet man zunächst eine differentiale Belastungsänderung, so kann (5) mit Ersetzung aller Wirkungsgrößen durch ihre differentiale Änderungen angewendet werden.

Das Tragwerk geht von einem Grundzustand G in einen differential nahen Nachbarzustand N über. Das Funktional $\Pi_{h,N}$ des Nachbarzustandes wird aus dem des Grundzustandes entwickelt [11]

$$\Pi_{h,N} = \Pi_{h,G} + d\Pi_h + \frac{1}{2!} d^2\Pi_h \quad (73)$$

Im Grundzustand waren alle zur Stationarität von Π_h gehörigen Bedingungen befriedigt, d. h. $d\Pi_h = 0$.

Die Anwendung der Stationaritätsbedingung auf N ergibt

$$\delta\Pi_{h,N} = 0 = \delta\left(\frac{1}{2} d^2\Pi_h\right) \quad (74)$$

bzw.

$$\delta\Pi_{h,N} = 0 = \delta\left\{ \sum_{e=1}^n \left[\sum_{m=1}^s \left\{ \int_{V^{e,m}} \frac{1}{2} (d\sigma_{ij}^m)^T d\varepsilon_{ij}^m dV + \int_{V^{e,m}} (d\sigma_{ij}^m)^T d\varepsilon_{ij}^m dV \right\} - \int_{O_{r,e}} (d\mathbf{p}^{r,e} - d\bar{\mathbf{p}}^{r,e})^T d\mathbf{v}^r dO - \int_{O_{r,e}} (d\mathbf{p}^{r,e})^T d\bar{\mathbf{v}}^r dO \right] \right\} \quad (75)$$

Mit den differentialen Änderungen $d\beta$ bzw. $d\mathbf{q}^e$ der Elementschnittkraftfreiwerte bzw. -knotenverschiebungen erhält man nun analog zu (26)

$$\delta\Pi_{h,N} = \sum_{e=1}^n \left\{ \delta(d\beta)^T [\mathbf{H}d\beta + \bar{\mathbf{H}}d\beta + \mathbf{h}(d\varphi_0 - d\varphi_K) - Td\mathbf{q}^e] \right\} + \sum_{e=1}^n \left\{ \delta(d\mathbf{q}^e)^T [-T d\beta + d\mathbf{Q}_0 - \sum_{i=1}^b (\mathbf{Z}_{ij}^i)^T dS_{ij}^i] \right\} = 0 \quad (76)$$

Der letzte Term erfaßt diskrete elementweise gerade Bewehrungsstäbe. Deren differentiale Längenänderungen

$d\mathbf{v}_{ij}^i$ zwischen deren Durchstoßpunkten i, j durch die Elementrandflächen sind beschrieben durch

$$d\mathbf{v}_{ij}^i = \mathbf{Z}_{ij}^i \cdot d\mathbf{q}^e \quad (77)$$

Die dS_{ij}^i sind die differentialen Stabkraftänderungen der diskreten Bewehrungsstäbe, analog zu (4) in einen linearelastischen und einen Korrekturanteil zerlegt.

$$dS_{ij}^i = d\bar{S}_{ij}^i - dS_{ij,K}^i \quad (78)$$

Das zu (33) analoge Gleichungssystem – nun für $d\mathbf{q}$ – lautet

$$\mathbf{K}_T d\mathbf{q} - d\mathbf{R} - d\mathbf{R}_K = \mathbf{0} \quad (79)$$

Durch (79) werden die Knotengleichgewichtsbedingungen und das Stoffgesetz für differentiale Belastungsänderungen exakt erfüllt. Beim Übergang zu inkrementalen (endlichen) Laststufen wird eine modifizierte Newton-Raphson-Iteration eingeschaltet. Man erhält für inkrementale Laststufen

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{q} - \Delta\mathbf{R} - \Delta\mathbf{R}_K = \mathbf{0} \quad (80)$$

\mathbf{K}_T : tangentielle Steifigkeitsmatrix am Inkrementanfang
 \mathbf{K}_T , $\Delta\mathbf{R}$, $\Delta\mathbf{R}_K$ ergeben sich nach Transformation und Zusammenfassung aller Elementbeiträge

$$\mathbf{k}_T^e = \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{T} + \sum_{i=1}^b (\mathbf{Z}_{ij}^i)^T \mathbf{k}_T^i \mathbf{Z}_{ij}^i \quad (81)$$

$$\Delta\mathbf{R}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \bar{\mathbf{H}} \Delta\bar{\beta} + \Delta\mathbf{Q}_0 + \mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h} \Delta\varphi_0 \quad (82)$$

infolge gleichförmiger Flächenlast, veränderlicher Randlast, Knotenlast, Anfangsverzerrungen (z. B. Temperatur) und

$$\Delta\mathbf{R}_K^e = -\mathbf{T}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{h} \Delta\varphi_K + \sum_{i=1}^b (\mathbf{Z}_{ij}^i)^T \Delta S_{ij,K}^i \quad (83)$$

Korrekturspannungen der Schichten oder Bewehrungsstäbe aus nichtlinearem Stoffgesetz oder Reißbildung jeweils am Ende eines Iterationsschrittes.

3.2. Stoffgesetze unter Kurzzeitbelastung und Beobachtungspunkte

Die Elementschichtung wird benutzt, um über die Werte in den Schichtschwerpunkten den Spannungs- und Verzerrungszustand zu beurteilen und die physikalischen Nichtlinearitäten zu erfassen, d. h. Stoffaussagen werden über die jeweilige Elementschicht verschmiert. Aus der Vielzahl der Beschreibungsmöglichkeiten für wirklichkeitsnahe Stoffgesetze wurden zunächst einige einfache umgesetzt.

Für Beton berücksichtigt das zweiaxiale nichtlinear-elastische Stoffgesetz nach [12] spannungsabhängige Anisotropie. Es gilt bis zum Erreichen der Bruchgrenzkurve. Im Druck-Druck-Bereich verliert der Beton seine Tragfähigkeit vollständig durch Druckbruch. Im Druck-Zug- und Zug-Zug-Bereich entstehen Risse, die senkrecht zur größte-

ren Hauptzugspannung angesetzt sind. Im homogenen, anisotropen Rißkontinuum einer Schicht sind Restriktionen des Spannungszustandes – senkrecht zum Riß keine Zugspannungen, Druckspannungen nur übertragbar, wenn Riß wieder geschlossen, abgeminderte Schubspannungen parallel zum Riß in Abhängigkeit von Reibung und Rißverzahnung – zu beachten. Bis zu zwei verschiedene Rißrichtungen sind in einer Schicht möglich, wobei der zweite Riß jedoch erst dann entsteht, wenn der Differenzwinkel zum ersten Riß größer als 30 grd beträgt. Für einaxiale Bewehrung – verschmierte Bewehrungsschicht, diskrete Bewehrungsstäbe – mit einaxialem Spannungszustand und Stahlschichten mit ebenem Spannungszustand sind linearelastisch-idealplastische Stoffgesetze umgesetzt.

Statt der heute üblichen Erfassung der Noch-Mitwirkung des Betons im Verbundbereich nach Erreichen der Betonzugfestigkeit durch geänderte Stoffgesetze von Stahl und/oder Beton ist dies in der alten Programmversion (1982) nur grob durch ideelle Vergrößerung der Querschnittsfläche der Bewehrung möglich.

3.3. Viskoses Stoffverhalten

Überschreiten die langfristig wirkenden Druckspannungen ca. 40 % der Betondruckfestigkeit nicht, so kann das viskose Betonverhalten mit einem zeitabhängigen Stoffgesetz beschrieben werden, welches die Langzeitspannungen linear enthält; ein additiver Aufbau der Dehnungsanteile aus Kriechen, Schwinden, Belastung ist möglich. Unabhängig davon können Kurzzeitlasten zu jedem Beobachtungszeitpunkt t eingetragen und hochgefahren werden.

Die Kriechverzerrungen werden linear proportional zu den linearelastischen Anteilen der Langzeitverzerrungen angesetzt. Letztere folgen über die 28-Tage-Nachgiebigkeiten – für den einaxialen Fall, vgl. [13], für den mehraxialen Fall, vgl. [14]. Die differentialen Kriechverzerrungen zum Beobachtungszeitpunkt t infolge differentialer Spannungsänderungen z. Z. $\tau < t$, die langfristig bis t wirken, sind (im isotropen Fall)

$$d\varepsilon_K = \varphi(t, \tau) \mathbf{D}^{-1} d\sigma(\tau) = \varphi(t, \tau) d\varepsilon_{el}(\tau) \quad (84)$$

\mathbf{D}^{-1} : Materialnachgiebigkeitsmatrix

d.h. auch im mehraxialen Fall kann mit der einaxialen Kriechfunktion $\varphi(t, \tau)$ gearbeitet werden. Die Integralform des Stoffgesetzes für den zweiaxialen Spannungszustand bei beliebiger Spannungsgeschichte

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{el}(t) - \int_{\tau = \tau_0}^t \varepsilon_{el}(\tau) \frac{\delta \varphi(t, \tau)}{\delta \tau} d\tau + \varepsilon_s(t) + \varepsilon_p(t) \quad (85)$$

enthält neben der linearelastischen Verzerrung und der Kriechverzerrung additiv Schwindverzerrungen und wenn vorhanden physikalisch nichtlineare Verzerrungsanteile. Unterteilt man die Kriechzeit t so in n Kriechintervalle, daß innerhalb eines Kriechintervalls der linearelastische Anteil $\varepsilon_{el}(\tau)$ zeitlich konstant gesetzt werden darf, erhält man für den Gesamtverzerrungszuwachs $\Delta\varepsilon$, im Kriechintervall (von t_{n-1} bis t_n)

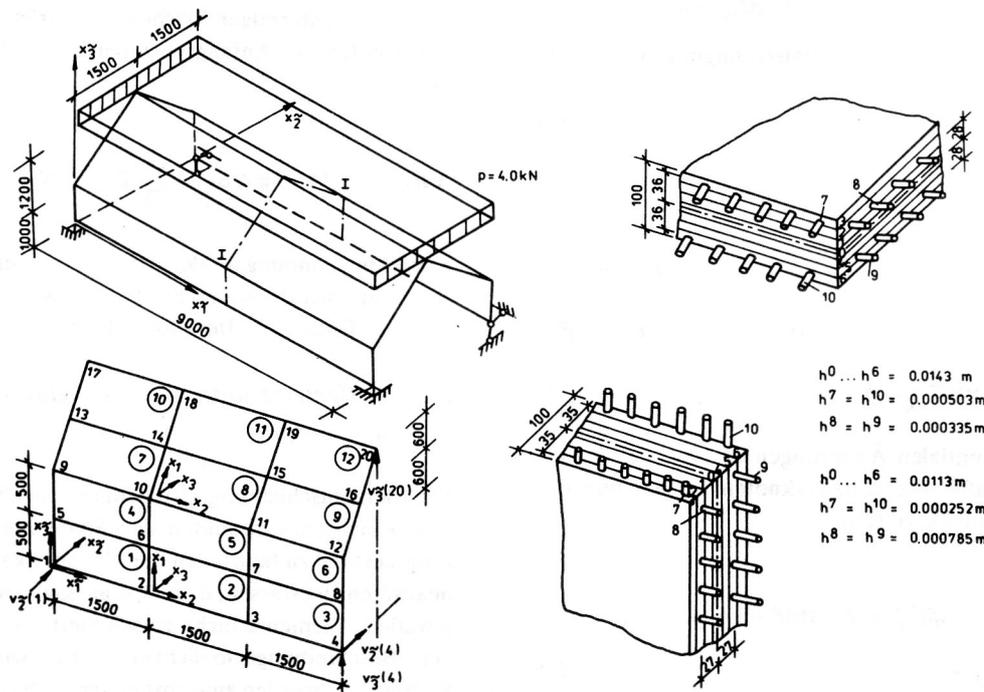


Bild 14
 Stahlbetondachfaltwerk; System, Belastung, Vernetzung, Schichtung, Beton Bk 35: $R_d = 2.55 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$, $E_b = 3.47 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu_b = 0.2$, Kriechen und Schwinden nach TGL 33 403, normalerhärtet (18°C), $k_1 = 1$, $k_2 = 1.4$, $k_3 = 0.55$, Stahl StA I: $R_s = 2.4 \cdot 10^5 \text{ kN/m}^2$, $E_s = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$

$$\Delta \varepsilon_n = \Delta \varepsilon_{el,n} + \Delta \varepsilon_{p,n} + \Delta \varepsilon_{k+s,n} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{k+s,n} &= \varepsilon_{el}(t_{n-1}) \varphi(t_n, \tau_{n-1}) \\ &+ \sum_{i=1}^n \varepsilon_{el}(\tau_{i-1}) \left(\varphi(t_n, \tau_{i-1}) - \varphi(t_n, \tau_i) \right) - \left(\varphi(t_{n-1}, \tau_{i-1}) \right. \\ &\left. - \varphi(t_{n-1}, \tau_i) \right) \\ &+ \varepsilon_s(t_n) - \varepsilon_s(t_{n-1}) \end{aligned} \quad (87)$$

Gegenwärtig sind Schwinddehnungen und Kriechfunktion nach TGL 33403 implementiert. Die inkrementalen Kriech- und Schwindverzerrungen $\Delta \varepsilon_{k+s,n}$ werden als Anfangsverzerrungen $\Delta \varepsilon_0$ erfaßt, s. (9), (27). Unabhängig vom verwendeten Kurzzeitstoffgesetz bleibt gemäß (84) – in den kriechfähigen Schichten – $(\mathbf{D}^m)^{-1}$ zur Ermittlung der Kriechverzerrungszinkremente bzw. der dafür benötigten ε_{el} konstant für alle Kriechintervalle; bei nichtlinearem Kurzzeitverhalten heißt das

$$\mathbf{D}^m = \mathbf{D}_T^m (\sigma = 0) \quad (88)$$

Bei nichtlinearem Kurzzeitverhalten sind die schichtenweise ermittelten Kriechverzerrungen nichtlinear über die Elementhöhe verteilt. In Anpassung an die Kirchhoff-Hypothese wird – in Abhängigkeit von den nach (87) ermittelten Kriechverzerrungen zweier geeignet ausgewählter Schichten des Elementes – eine (zeitlich veränderliche) Kriechdehnebene vereinbart.

Für nichtkriechende Schichten – Bewehrungsschichten – sind bei der Ermittlung der Schichtenspannungen wegen des starren Verbundes über (4) eingetragene zusätzliche Anfangsspannungen

$$\Delta \sigma_k^* = \mathbf{D}_T^m \Delta \varepsilon_0^m \quad (89)$$

anzusetzen, die diese Schichten bis zu der durch $\Delta \varepsilon_{k+s}$ bestimmten Kriechdehnebene mit verzerren.

Man ermittelt schließlich ein zu (79) analoges Gleichungssystem zur Ermittlung von $d\mathbf{q}$ für die einzelnen Zeitschritte. Im nichtlinearen Fall ist wegen der im Zeitinkrement bei-

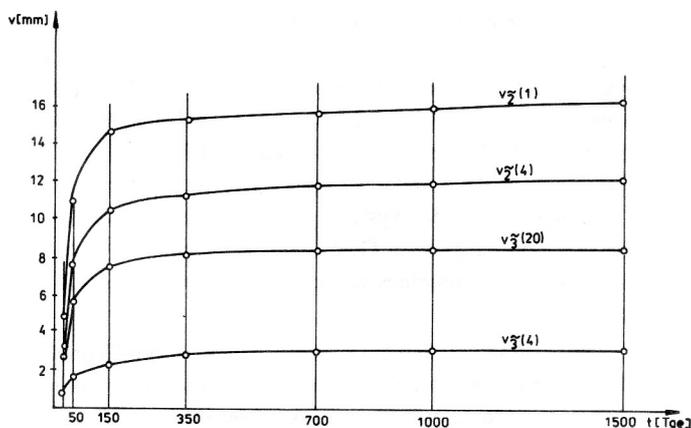


Bild 15
Stahlbetondachfaltwerk; Zeitabhängigkeit ausgewählter Verschiebungskomponenten, $p = 4.0 \text{ kN/m}^2$, lineare Lastabtragung

Tabelle 1
Stahlbetondachfaltwerk; Zeitliche Veränderung ausgewählter Spannungskomponenten σ_{x_i}

Spannungen im Schwerpunkt		[N/mm ²] (p = 4,0 kN/m ²)					
Zeitpunkt t [Tage]	Kurzzeitverhalten 28	50	150	350	700	1000	1500
Betonschicht 3							
Element 10	-3,032	-2,556	-2,242	-2,206	-2,174	-2,146	-2,117
Betonschicht 6							
Element 10	3,113	3,058	3,056	3,053	3,049	3,045	3,040
Stahlschicht 7							
Element 10	-14,79	-56,97	-81,97	-86,83	-89,64	-91,04	-92,43
Stahlschicht 10							
Element 10	15,27	11,79	9,591	9,450	10,17	10,95	11,81
Betonschicht 3							
Element 12	-2,109	-1,835	-1,655	-1,613	-1,584	-1,576	-1,558
Betonschicht 6							
Element 12	2,060	2,249	2,346	2,349	2,291	2,232	2,156
Stahlschicht 7							
Element 12	-10,29	-47,74	-70,69	-75,53	-78,14	-79,50	-80,85
Stahlschicht 10							
Element 12	9,993	0,9178	-3,735	-3,947	-3,488	-2,718	-1,951

behaltenen Steifigkeitsmatrix eine Gleichgewichtssiteration notwendig, im linearen Fall entfällt die Iteration innerhalb der Zeitinkremente.

Das Dachfaltwerk (Bild 14) wird unter der Voraussetzung linearer Lastabtragung bezüglich Kriechen und Schwinden untersucht. Als Dauerbelastung wirkt die Flächenlast $p = 4.0 \text{ kN/m}$.

Wie man aus den zu verschiedenen Beobachtungszeitpunkten in Bild 15 aufgetragenen Veränderungen ausgewählter Verschiebungskomponenten erkennt, handelt es sich um einen sogenannten primären Kriecheffekt. Die großen Schnittkraftumlagerungen (Tabelle 1) resultieren besonders aus dem Schwindeinfluß; in Wirklichkeit werden infolge des Betonreißen (physikalisch nichtlineares Verhalten) die ausgewiesenen hohen Betonzugspannungen und zugehörigen hohen Bewehrungsspannungen abgebaut.

4. Zur geometrisch nichtlinearen Statik (FALT-FEM 3)

4.1. Gewähltes Vorgehen

Inkrementelle Formen gemischt-hybrider Variationsprinzipie zur Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten werden sowohl für den Gültigkeitsbereich sehr kleiner Verzerrungen und kleiner bis mäßig großer Rotationen [15], [16] als auch für große Verzerrungen und Rotationen [17] entwickelt – allerdings nicht spezifisch aufbereitet für Faltwerke.

Für FALT-FEM wurde – in Anlehnung an [18] bis [20] – zunächst ein stärker anschauungsorientiertes Näherungsvorgehen gewählt [21].

Der Belastungs- und Verschiebungsprozeß wird analog zum physikalisch nichtlinearen Bereich in aufeinanderfolgenden Inkrementen abgearbeitet. Nach Abarbeitung eines Inkrementes liegen der gesamte Verschiebungs- und Spannungszustand aller bis dahin abgearbeiteten Belastungsinrkemente vor, die bis dahin akkumulierten Verschiebungen und auch die Rotationen können global groß sein jedoch mit elementlokaler Einschränkung; (Theorie III./II. bzw. III./I. Ordnung); die Verzerrungen müssen klein gegen Eins sein.

Folgende Systemzustände werden unterschieden:

- der Ausgangszustand A des unbelasteten Systems
- der bekannte Grundzustand G, der sich nach Abarbeitung einer Anzahl von Inkrementen – mit dann bekannten (u. U. großen) Verschiebungen und Verdrehungen – eingestellt hat und
- der unbekannte Nachbarzustand N, der bei dem neuen Lastinkrement mit kleinen Zusatzverschiebungen und -verdrehungen auf den bekannten Grundzustand folgt.

Zur Beschreibung der Systemzustände werden kartesische Koordinatensysteme verwendet, die mitgehend oder raumfest, knoten- oder elementorientiert sind. Verschiebungs- und verdrehungsabhängige Transformationsbeziehungen gestatten den Beschreibungsübergang für die Kräfte und Verschiebungen bei Änderung der Koordinatensysteme. Bezieht man die Elementwirkungsgrößen auf die Koordinatensysteme des Grundzustandes, dann kann man sich bei ausreichend kleinen Elementen und bei Elementansatzfunktionen, die Starrkörperverschiebungen und -verdrehungen verzerrungsfrei und damit spannungsfrei verarbeiten, innerhalb der Elementbeschreibung auf die Erfassung der einfachsten geometrisch nichtlinearen Effekte beschränken. Die Elementknotenverschiebungen q_G^e – beschrieben in den Elementkoordinatensystemen – jedoch hängen bei global großen Verschiebungen und Verdrehungen über die Transformation zwischen den Koordinatensystemen des Ausgangs- und des Grundzustandes stets geometrisch nichtlinear von den Systemverschiebungen ab.

Als Bezugssystem für die Systemgleichungen wird das raumfeste Koordinatensystem des Ausgangszustandes gewählt. Die nichtlinearen Systemgleichungen werden mittels des modifizierten Newton-Raphson-Verfahrens gelöst. Jeder (freie) Knoten hat sechs Freiheitsgrade. Während die drei Translationen Vektoreigenschaften aufweisen, die Reihenfolge der Einzeltranslationen ist beliebig, gilt dies für die Rotationen nicht. Die Rotationen werden wertmäßig und richtungsmäßig zu einer Drehung um eine Achse a im Bezugssystem des Ausgangszustandes zusammengefaßt (Bild 16).

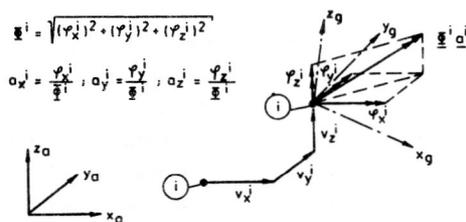


Bild 16
Translation und Rotation des Knotens i

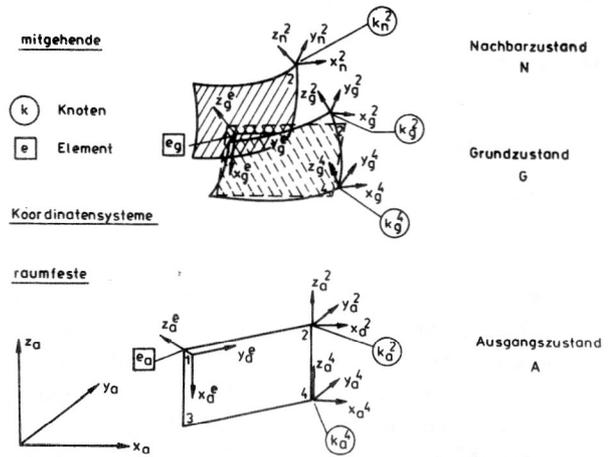


Bild 17
Systemzustände und Koordinatensysteme

Bild 17 veranschaulicht die gewählten Systemzustände und Koordinatensysteme. Im Ausgangszustand stimmen globales Bezugssystem und die Knotenkoordinatensysteme überein, das Elementkoordinatensystem ist abhängig von der Reihenfolge der Zuordnung der Knoten zum Element. In der bekannten Grundzustandslage ist das Element deformiert, die Knotenkoordinatensysteme sind mitgegangen. In Abhängigkeit von den Verschiebungskomponenten der Elementknoten wird eine mittlere Lage des mitgehenden Elementkoordinatensystems bestimmt. Die Ansätze für die Verschiebungen im Element und auf den Elementrändern sowie für die Schnittkräfte gehen näherungsweise von den x,y -Koordinaten des Elementgrundzustandes in dieser mittleren Lage aus. Die Transformationsbeziehungen des Ausgangszustandes entsprechen den in FALTFEM 1 und 2 zwischen globalen und lokalen Größen verwendeten, sie bleiben einmal ermittelt konstant. Demgegenüber sind die Transformationsbeziehungen zwischen Grund- und Ausgangszustand stets zu aktualisieren [22]. Imperfektionen, als Auslenkungen und Verdrehungen der Systemknoten gegenüber ihrer Ausgangsgeometrie beschrieben, werden durch eine spezielle Anfangsbelegung der Transformationsbeziehungen berücksichtigt.

4.2. Systemgleichungen für Theorie III./III. Ordnung

Nach Abarbeitung eines Inkrementes werden zunächst auf Elementebene verallgemeinerte Elementknotenkräfte (Gleichgewichtslasten) und die tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix ermittelt und nach einer Zusammenfassung aller Elementanteile die Systemgleichungen zur Beschreibung des Übergangs vom Grundzustand zum Nachbarzustand unter Wirkung eines weiteren Lastinkrementes aufgestellt.

Im Grundzustand stehen die vom Ausgangs- in den Grundzustand transformierten (T_{AG}) äußeren Lasten (R) mit den vom mitgehenden element- in das knotenorientierte Koordinatensystem transformierten (T_{el}) eingprägten inneren Elementkräften F_G^e im Gleichgewicht

$$T_{AG} R - T_{el} F_G^e = 0 \quad (90)$$

Der Verschiebungszustand im Elementinneren läßt sich über Ansätze \mathbf{N} in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen bezogen auf das mitgehende Elementkoordinatensystem des Grundzustandes angeben

$$v_G(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{q}_G^\varepsilon \quad (91)$$

Für den Verzerrungszustand und den Spannungszustand des Elementes erhält man

$$\varepsilon_G = \left(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right) \mathbf{q}_G^\varepsilon = \varepsilon_{Gl} + \varepsilon_{Gq} \quad (92)$$

$$\sigma_G = \mathbf{D} \varepsilon_G = \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_l + \frac{1}{2} \mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right) \mathbf{q}_G^\varepsilon = \sigma_{Gl} + \sigma_{Gq} \quad (93)$$

Die Elementverzerrungen enthalten lineare und quadratische Anteile bezüglich der Knotenverschiebungen \mathbf{q}_G^ε (\mathbf{B}_l und \mathbf{B}_q werden durch partielle Differentiation aus \mathbf{N} gewonnen). Mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen

$$\delta(\mathbf{q}_G^\varepsilon)^T \mathbf{F}_G^\varepsilon = \int_V (\delta \varepsilon_G)^T \sigma_G dV \quad (94)$$

und

$$\delta \varepsilon_G = \left(\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right) \delta \mathbf{q}_G^\varepsilon \quad (95)$$

ergibt sich für die Gleichgewichtslasten

$$\mathbf{F}_G^\varepsilon = \int_V \left(\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right)^T \sigma_G dV \quad (96)$$

Beim Übergang vom Grundzustand zum Nachbarzustand unter differentialer Laständerung $d\mathbf{R}$ bestimmt man den Zuwachs der Gleichgewichtslasten als Funktion der differentialen Verschiebungsänderung mittels der tangentialen Elementsteifigkeitsmatrix

$$\frac{d\mathbf{F}_G^\varepsilon}{d\mathbf{q}_G^\varepsilon} = \int_V \frac{d}{d\mathbf{q}_G^\varepsilon} \left(\int_V \left(\mathbf{B}_l + \mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right)^T \sigma_G dV \right) \quad (97)$$

Die tangentiale Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{k}_T^ε enthält neben dem materiellen – hier zunächst linearelastischen – Anteil die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}_G^\varepsilon = \int_V \frac{d}{d\mathbf{q}_G^\varepsilon} \left(\mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right)^T \sigma_G dV \quad (98)$$

sowie linear und quadratisch von den Elementknotenverschiebungen \mathbf{q}_G^ε abhängige Anteile. Die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix erfaßt den Theorie II. Ordnung-Effekt der bereits im Grundzustand vorhandenen Schnittkräfte σ_G bei den aktuellen Verschiebungen. Die von den Elementknotenverschiebungen abhängigen Anteile werden nicht in die Elementsteifigkeitsmatrix aufgenommen, statt dessen wird eine beim Übergang von $d\mathbf{R}$ zu $\Delta\mathbf{R}$ im Inkrement ohnehin notwendige Gleichgewichtssiteration an den Knoten mit Beachtung des aktuellen Verschiebungszuwachses durchgeführt. Die Systemgleichungen ergeben sich nach Transformation der Kräfte und Verschiebungen in den Ausgangszustand und Zusammenfassung aller Elementbeiträge. Man erhält die nun näherungsweise [23] über mitgehende Koordinatensysteme und entsprechende Transformationen iterativ zu lösenden linearisierten Systemgleichungen für Theorie III./II. Ordnung. Darüber

hinaus wird – dem gewählten Konzept entsprechend – für die materielle Steifigkeitsmatrix die hybride Form von FALT-FEM 1 verwendet.

$$\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R} - \mathbf{T}_{GA} \mathbf{F}_G - \underbrace{\mathbf{T}_{GA} \mathbf{T}_{el} (\mathbf{K}_m^\varepsilon + \mathbf{K}_G^\varepsilon) \mathbf{T}_{le} \mathbf{T}_{AG}}_{\mathbf{K}_T} \Delta\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

Behält man während der Iteration im Inkrement den Grundzustand bei, bleiben alle Transformationsbeziehungen im Inkrement konstant, sie sind nur beim Übergang zum nächsten Inkrement zu aktualisieren. Die Inkremente der Knotengleichgewichtskräfte für den ν -ten Iterationsschritt des r -ten Inkrementes $\Delta\mathbf{F}_{G,r}^\nu$ sind wie folgt zu ermitteln

$$\mathbf{F}_{G,r}^\nu = \mathbf{T}_{AG} \left(\sum_{i=1}^{r-1} \mathbf{T}_{GA,i} \Delta\mathbf{F}_{G,i} \right) + \Delta\mathbf{F}_{G,r}^\nu = \mathbf{F}_{G,r-1} + \Delta\mathbf{F}_{G,r}^\nu \quad (100)$$

$$\Delta\mathbf{F}_{G,r}^\nu = \mathbf{T}_{el} \left(\mathbf{K}_m^\varepsilon + \mathbf{K}_G^\varepsilon(q_{r,r}^{\nu-1}) \right) \mathbf{T}_{le} \mathbf{T}_{AG} \Delta\mathbf{q}_{r,r}^{\nu-1} \quad (101)$$

$$\Delta\mathbf{q}_{r,r}^{\nu-1} = \sum_{i=1}^{\nu-1} \Delta\Delta\mathbf{q}_{r,r}^i \quad (102)$$

Die Berücksichtigung von \mathbf{K}_G^ε ist erforderlich, wenn man Gleichgewichtsverzweigungen erkennen will. Sind letztere ausschließbar, dann erhält man trotz Verzicht auf \mathbf{K}_G^ε eine – elementlokal weiter abgeschwächte – Theorie III./II. Ordnung, wenn man in jedem Iterationsschritt die tatsächliche Drehung der Elementknotenkräfte gegenüber den Elementkoordinaten berücksichtigt. Unterdrückt man auch das, so erhält man

$$\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R} - \mathbf{T}_{GA} \mathbf{F}_G - \mathbf{T}_{GA} \mathbf{T}_{el} (\mathbf{K}_m^\varepsilon) \mathbf{T}_{le} \mathbf{T}_{AG} \Delta\Delta\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (103)$$

Allerdings muß dann eine besonders feine Elementteilung gewählt werden.

4.3. Die geometrische Elementsteifigkeitsmatrix

In der geometrischen Elementsteifigkeitsmatrix (98)

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_G^\varepsilon &= \int_V \frac{d}{d\mathbf{q}_G^\varepsilon} \left(\mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right)^T \sigma_G dV \\ &= \int_A \frac{d}{d\mathbf{q}_G^\varepsilon} \left(\mathbf{B}_q(q_G^\varepsilon) \right)^T \int_Z \sigma_G dz dA \end{aligned} \quad (104)$$

wird z. Z. näherungsweise nur der Scheibenspannungsanteil berücksichtigt. Mit

$$z \int \sigma_G dz = \mathbf{n} = \mathbf{P}_s \boldsymbol{\beta}_s + \bar{\mathbf{P}}_s \bar{\boldsymbol{\beta}}_s \quad (105)$$

und

$$v_G = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{q}_G^\varepsilon = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1^T(x, y) & 0 \\ \mathbf{N}_2^T(x, y) & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_3^T(x, y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_G^\varepsilon \\ q_G^\varepsilon \end{bmatrix} \quad (106)$$

folgt

$$\mathbf{k}_\sigma^e = \int_A \left[\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \quad \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 n_x & \mathbf{I}_3 n_{xy} \\ \mathbf{I}_3 n_{xy} & \mathbf{I}_3 n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{bmatrix} dA ;$$

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \quad (107)$$

über den Ansatz \mathbf{N}_j^e in Abhängigkeit von Plattenverschiebungs- und -verdrehungskrementen z. B. (50) können Plattenbeuleffekte und über die Ansätze \mathbf{N}_j^e und \mathbf{N}_j^e in Abhängigkeit von Scheibenverschiebungs- und -verdrehungskrementen z. B. (49) geometrisch nichtlineare Effekte in der Ebene der finiten Elemente erfaßt werden. Platten- und Scheibenanteil sind auch nach Integration von (107) entkoppelt.

$$\mathbf{k}_\sigma^e = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_\sigma^s & 0 \\ 0 & \mathbf{k}_\sigma^p \end{bmatrix} \quad (108)$$

Die Ansätze für die Plattenverschiebungen $v_{z,G}$ und für die Scheibenverschiebungen $v_{x,G}$, $v_{y,G}$ entsprechen beim Rechteckelement denen von (65), (66), (67), hier allerdings bezogen auf den Grundzustand des Elementkoordinatensystems.

4.4. Linearisierte Stabilitätsuntersuchung

Beim linearisierten Verzweigungsproblem eines perfekten Tragwerkes wird das System zunächst unter der Belastung \mathbf{R} nach Theorie I. Ordnung untersucht. Bei einparametrischer Laststeigerung auf

$$\mathbf{R}_{ki} = \lambda \mathbf{R} \quad (109)$$

sind dann mehrere Gleichgewichtslagen möglich, die nichtverzweigte mit Knotenverschiebungen \mathbf{q} vom Ausgangszustand zum (kritischen) Grundzustand und die verzweigte Nachbarzustandsgleichgewichtslage(n). Im unverzweigten (kritischen) Grundzustand lautet das Knotengleichgewicht nach Theorie I. Ordnung

$$\lambda \mathbf{R} - \mathbf{K}_m \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (110)$$

in der verzweigten Gleichgewichtslage des Nachbarzustandes lautet das (linearisierte) Gleichgewicht bei Theorie II. Ordnung unter dem gleichen Lastvektor \mathbf{R}

$$\lambda \mathbf{R} - \mathbf{K}_m \mathbf{q} - (\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (111)$$

Aus (111)–(110) folgen die Gleichungen zur Bestimmung der Zusatzverschiebungen $\Delta \mathbf{q}$ in die verzweigte Lage (gegenüber \mathbf{q})

$$(\mathbf{K}_m + \mathbf{K}_\sigma) \Delta \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (112)$$

Nichttriviale Lösungen folgen aus dem zugehörigen allgemeinen algebraischen Eigenwertproblem

$$\det(\mathbf{K}_m + \lambda \mathbf{K}_\sigma) = 0 \quad (113)$$

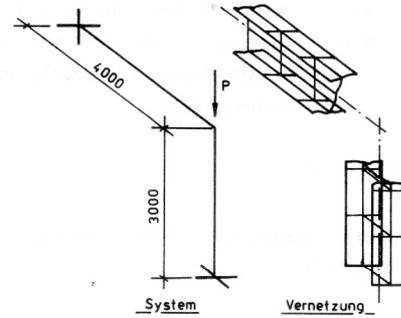


Bild 18

Halbrahmen; System, Vernetzung, Riegel I30, Stiel I36 nach TGL 0–1025

Zur Lösung wurde – wie für die Eigenschwingungen – die simultane Gradienteniteration (SIMGRA) eingesetzt.

Beide Endquerschnitte des als Faltnetz vernetzten Halbrahmens (Bild 18) [24] sind voll eingespannt und unverrückbar gelagert. In der Rahmenecke wurden zur Vereinfachung die Profile lediglich grob vernetzt.

Die Ergebnisse (Tabelle 2) der Faltnetzlösung I erhält man bei alleiniger Berücksichtigung von Plattenbeuleerscheinungen in \mathbf{K}_σ , während für die Faltnetzlösung II die geometrisch nichtlinearen Scheibeneffekte in den Ebenen der fi-

Tabelle 2

Halbrahmen; Verzweigungslasten P_{ki} (grafische Darstellung s. Bild 20)

Verzweigungslast P_{ki} in kN			
Stegdickenverhältnis $\frac{d_s}{d_{sa}}$	geometrische Steifigkeitsmatrix mit Anteilen von		
	Platte	Platte und Scheibe	Stabtragwerk
	Faltnetzlösung I	Faltnetzlösung II	
1.0	1320	623 EF 1	602
0.67	777	587	599
0.58	-	542	-
0.5	416 EF 2	416 EF 2	598
	---	---	---

EF Eigenform (s. Bild 19)

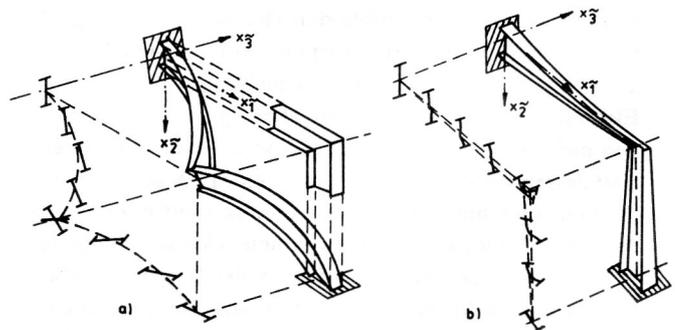


Bild 19

Halbrahmen; Eigenformen

- a) Eigenform 1
- b) Eigenform 2

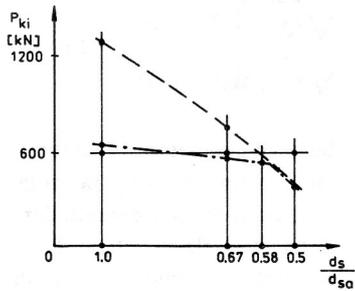


Bild 20

Halbrahmen; Abhängigkeit der Verzweigungslast von der Stegdickenänderung

niten Flächenelemente mitgenommen werden. Darüber hinaus wurde ein in FALT-FEM eingebettetes Stabmodell untersucht, dessen Ergebnisse denen einer Vergleichsrechnung mit STATRA 8 ($P_{ki} = 609 \text{ kN}$) gut entsprechen. Die als Lösung II ermittelte Verzweigungslast entspricht der Vergleichslösung recht gut; die erhaltenen Eigenformen sind identisch (Bild 19). Verringert man die Stegdicken der

Profile, so bleiben die Kipplösungen mit der Voraussetzung formtreuer Querschnitte (STATRA 8, Stabmodell FALT-FEM) davon nahezu unbeeinflusst, während für die Gesamtstabilität die lokalen Beulerscheinungen an Gewicht gewinnen (Bild 20).

Ermittelt werden Beulwerte für zwei statische Systeme eines I-Profils nach [25] mit breitem Obergurt unter mittig auf dem Obergurt angreifender Linienlast (Bild 21). Jedes System wird mit zwei Modellierungsvarianten untersucht:

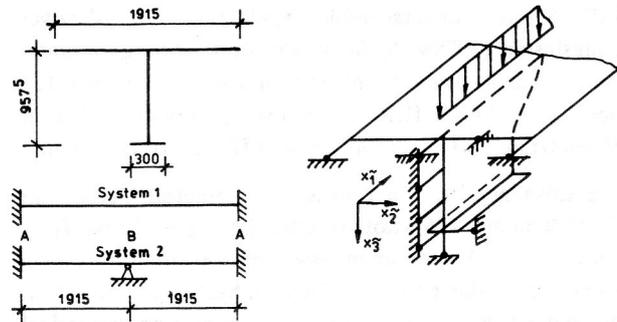


Bild 21

I-Träger mit breitem Obergurt; System, Belastung, $E = 2.1 \cdot 10^8 \text{ kN/m}^2$, $t_o = 16.5 \text{ mm}$, $t_s = 16.5 \text{ mm}$, $t_u = 32.5 \text{ mm}$

Variante 1: Obergurt und Steg werden durch Falwerkelemente, Untergurt wird durch Stabelemente modelliert.

Variante 2: Obergurt, Steg und Untergurt werden durch Falwerkelemente modelliert.

Die Lagerung der Endquerschnitte ist in Bild 21 dargestellt. Am Lager B wird lediglich der Steg am unteren

Tabelle 3

I-Träger mit breitem Obergurt; Verzweigungslasten P_{ki}

Verzweigungslast P_{ki} in kN		
Modellierung	FALT - FEM System 1	System 2
Variante 1	26 90 EF 1	20 33 EF 2
Variante 2	26 88	20 45

EF Eigenform (s. Bild 22)

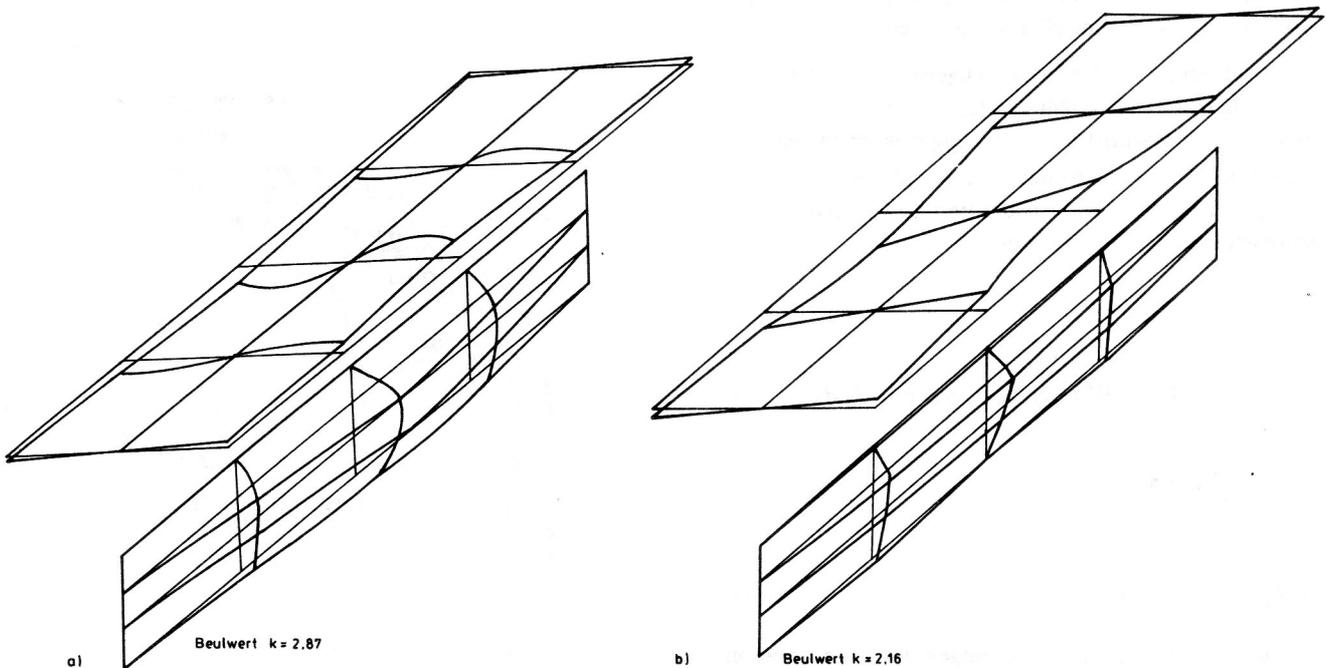


Bild 22

I-Träger mit breitem Obergurt; Eigenformen

- a) System 1
- b) System 2

FEM-Knoten unverschieblich gehalten. Die Verzweigungslasten (BESM 6) für beide Modellierungsvarianten sind in Tabelle 3 angegeben und stimmen gut mit den in [25] über eine FOURIER-Reihenlösung erzielten überein. Vernetzung und Eigenformen sind Bild 22 zu entnehmen.

Die Lösungen bei einer wesentlich feineren Vernetzung (132 Elemente, 156 Knoten) unter Einsatz der 32-bit-Technik führen zu keinen nennenswerten Veränderungen der Verzweigungslasten nach Tabelle 3. System 2 – im Mittenbereich Beulgefährdung oben – ist relativ unempfindlich gegenüber Veränderungen der Untergurtsteifigkeit, während bei System 1 – im Mittenbereich Beulgefährdung unten – gerade damit Tragreserven erschlossen werden können.

5. Gemeinsame Erfassung geometrischer und physikalischer Nichtlinearitäten (FALT-FEM 4)

5.1. Linearisierte Systemgleichungen

Sind sowohl geometrische als auch physikalische Nichtlinearitäten abzuarbeiten, dann kann man die Elementknotenkraftinkremente ΔF_G^e – bezogen auf das Elementkoordinatensystem im Grundzustand – in der Form schreiben

$$\Delta F_G^e = (\mathbf{k}_m^e + \mathbf{k}_\sigma^e)_G \Delta q_G^e - \Delta R_G^e \quad (114)$$

Die vielen Möglichkeiten der Iterationsführung im Inkrement unterscheiden sich durch unterschiedliche Erfassung der im Rahmen der Iteration auftretenden Veränderungen in den Anteilen der rechten Seite von (114). Behält man entsprechend der modifizierten Newton-Raphson-Iteration im Inkrement die tangentielle Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_T vom Inkrementanfang bei, dann enthält ΔR_G^e die inkrementalen Veränderungen sowohl der physikalischen als auch der geometrischen Nichtlinearitäten.

Bei der Bildung der Knotengleichgewichtskräfte $F_{G,r}^v$ – im Knotenkoordinatensystem des Grundzustandes – für den v -ten Iterationsschritt wird ΔR_G^v aufgespalten in den physikalisch nichtlinearen Anteil $\Delta R_{K,G}^v$ und den geometrisch nichtlinearen, der über die in der Iteration mitgehende geometrische Steifigkeitsmatrix erfaßt wird.

$$F_{G,r}^v = F_{G,r}^{v-1} + \Delta F_{G,r}^v \quad (115)$$

$$\Delta F_{G,r}^v = \mathbf{T}_{el} (\mathbf{K}_m^e + \mathbf{K}_\sigma^e(q_r^{v-1})) \mathbf{T}_{le} \mathbf{T}_{AG} \Delta q_r^{v-1} - \Delta R_{K,G}^v \quad (116)$$

$$\Delta q_r^{v-1} = \sum_{i=1}^{v-1} \Delta \Delta q_r^i \quad (117)$$

$$\Delta R_{K,G}^v = \sum_{i=1}^{v-1} \Delta \Delta R_{K,G}^i \quad (118)$$

Die linearisierten Systemgleichungen des v -ten Iterationsschrittes für Theorie III./II. Ordnung sind dann formal mit (99) identisch.

Als Abbruchkriterium für die Iteration wird der Vergleich der Euklidischen Norm der Wirkungsgrößen vom v -ten und vom ersten Iterationsschritt verwendet.

$$\frac{\|\Delta \Delta \dot{\mathbf{W}}\|}{\|\Delta \Delta \dot{\mathbf{W}}\|} = \frac{\sqrt{(\Delta \Delta \dot{\mathbf{W}})^T \Delta \Delta \dot{\mathbf{W}}}}{\sqrt{(\Delta \Delta \dot{\mathbf{W}})^T \Delta \Delta \dot{\mathbf{W}}}} \leq \varepsilon \quad (119)$$

Dabei werden bei rein geometrisch nichtlinearem Verhalten Verschiebungsinkremente $\Delta \Delta q$, bei rein physikalisch nichtlinearem Verhalten die Inkremente der Korrekturlasten $\Delta \Delta R_k$ genutzt. Bei gleichzeitiger Berücksichtigung beider Nichtlinearitäten erfolgt der Iterationsabbruch, wenn entweder $\Delta \Delta q$ oder $\Delta \Delta R_k$ die Bedingung (119) erfüllen, Restkräfte werden in das folgende Inkrement übernommen. Zur Erfassung des viskosen Stoffverhaltens treten an die Stelle der Lastinkremente die Zeitschritte.

Da die Newton-Raphson-Verfahren im Traglastbereich – bei horizontaler Tangente der Last-Verschiebungs-Funktion nicht konvergieren, drückt sich hier Systemversagen durch Divergenz der Iteration im kritischen Lastinkrement aus.

5.2. Beispiele

Untersucht wird das System nach Bild 14 (BESM 6). Bild 23 zeigt die Last-Verschiebungs-Abhängigkeit. Die Rißentwicklung beginnt im Element 10. Bis zum Entstehen der ersten Risse haben die geometrischen Nichtlinearitäten praktisch keinen Einfluß auf die Lösung. Erst mit dem Steifigkeitsverlust infolge der ersten Risse unterscheidet sich die allein physikalisch nichtlineare Lösung deutlich von der geometrisch und physikalisch nichtlinearen. Auch das Reißen weiterer Elemente – Elemente 2 und 3 – tritt nun bei Erfassen beider Nichtlinearitäten, bei wesentlich kleineren Lasten ein, als es die allein physikalisch nichtlineare Lösung anzeigt. Analoges gilt für die Systemversagenslast des Tragwerkes.

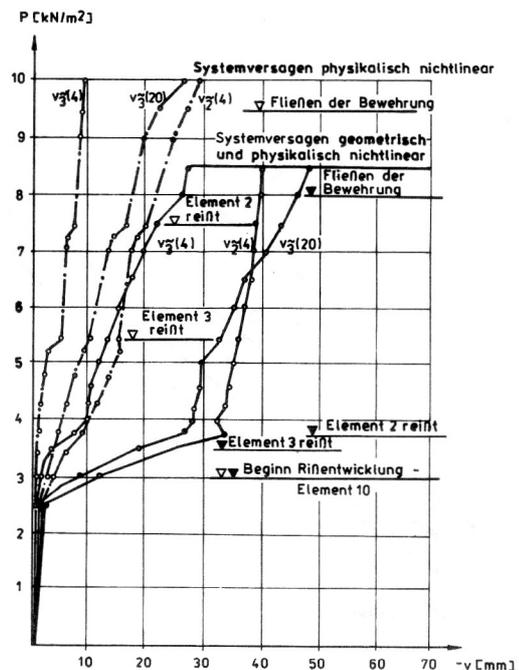


Bild 23 Stahlbetondachfaltwerk; geometrisch und/oder physikalisch nichtlinear, Last-Verschiebungs-Abhängigkeiten

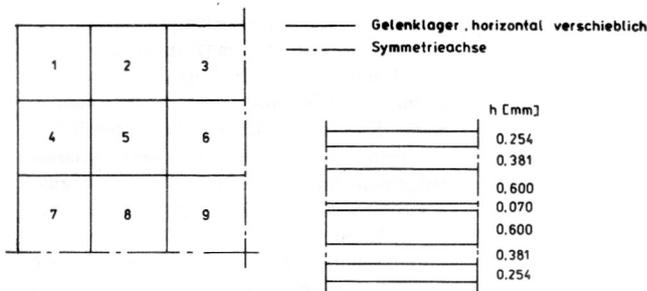


Bild 24

Allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte; homogener Werkstoff, System, Vernetzung, Schichtung, $E = 6.9 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $\sigma_F = 6.21 \cdot 10^4 \text{ kN/m}^2$, $p = k \cdot 3.7247 \text{ kN/m}^2$, $t = 2.54 \text{ mm}$

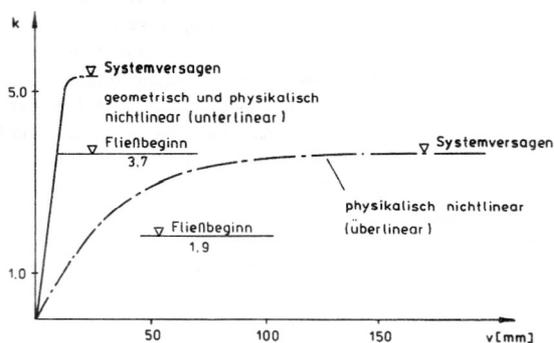


Bild 25

Allseitig gelenkig gelagerte quadratische Platte; geometrisch und/oder physikalisch nichtlinear, Last-Verschiebungs-Abhängigkeiten

Für die aus rechentechnischen Gründen (BESM 6) grob vernetzte allseitig gelenkig gelagerte Quadratplatte aus homogenem Werkstoff (Ausnutzung doppelter Symmetrie, Bild 24) wurden Last-Verschiebungs-Kurven inkrementell-iterativ berechnet (Bild 25). Sowohl für physikalisch als auch für geometrisch und physikalisch nichtlineares Vorgehen ist die elastische Grenzlaster zur Kennzeichnung der Tragreserve zwischen Punktversagen und Systemversagen eingetragen.

Beim Systemversagen sind in den Elementen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sechs Schichten plastiziert (Durchplastizierung), in den Elementen 3 und 7 vier. Während bei alleiniger Berücksichtigung der physikalischen Nichtlinearität überlineares Verhalten angezeigt wird, erhält man bei Miterfassung der geometrischen Nichtlinearitäten infolge des dadurch berücksichtigten entlastenden Membranspannungszustandes – zugehörig zur Ausbildung eines Druckringes längs der Ränder – zunehmende Versteifung der Platte und damit unterlineares Verhalten – ganz im Gegensatz beispielsweise zum Beispiel des Dachfaltwerkes, vgl. Bild 23.

Die beiden Beispiele von Bild 23 und Bild 25 verdeutlichen die starke Systemabhängigkeit der physikalisch und geometrisch nichtlinearen Effekte auf die Tragreserven zwischen Punktversagen und Systemversagen.

LITERATUR

- [1] Born, J.: *Faltwerke*. Stuttgart: Verlag Wittwer 1954.
- [2] Pian, T. H.; Tong, P.: *Basis of finite element methods for solid continua*. Int. J. Num. Methods in Engineering Vol. 1 (1969) 3–38.
- [3] Müller, H.; Möller, B.: Ein finites hybrides mehrschichtiges Faltwerkelement. *Wiss. Z. Techn. Univers. Dresden* 5 (1979) 1241–1248.
- [4] Müller, H.; Möller, B.: *Lineare und physikalisch nichtlineare Statik von Faltwerken – Bausteine 1 und 2 des Programmsystems FALT-FEM – Grundlagen und Beispiele*. Heft 155 Bauforschung-Baupraxis, Berlin 1985.
- [5] Teichmann, P.: Ein hybrides Dreieck-Faltwerkelement für das Programmsystem FALT-FEM – Aufbau und Anwendung. *IFL-Mitteilungen, Dresden*, 3 (1982) 89–92.
- [6] Baumgärtel, W.: *Erweiterungen zur Statik von Faltwerken im Rahmen von FALT-FEM 1 und 2 und Aufbau einer PC-Version*. Diss., TU Dresden, 1990.
- [7] Abo Diab, S.: *Entwicklung und Einsatz gemischt-hybrider finiter Elemente für Aufgaben der linearen Kinetik von Faltwerken – Ein Beitrag zu FALT-FEM 5*. Diss., TU Dresden, 1989.
- [8] Meyer, A.; Döhler, B.; Skurt, L.: *Simultane Algorithmen für großdimensionierte Eigenwertprobleme und ihre Anwendung auf das Schwingungsproblem*. *Wiss. Schriftenreihe Techn. Hochsch. K.-M.-Stadt* 24 (1982) Heft 8.
- [9] Gellert, M.: A new algorithm for integration of dynamics systems. *Computers & Structures* 9 (1978) 4, 401–408.
- [10] Weaver, W.; Johnston, P.: *Structural dynamics by finite elements*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall 1987, S. 382.
- [11] Möller, B.: *Anwendung eines erweiterten Variationsprinzips für stab- und faltwerkartige Konstruktionen aus Stahlbeton*. Diss. B., TU Dresden, 1984.
- [12] Link, J.: *Eine Formulierung des zweiaxialen Verformungs- und Bruchverhaltens von Beton und deren Anwendung auf die wirklichkeitsnahe Berechnung von Stahlbetonplatten*. *Dt. Aussch. f. Stahlbeton Berlin, München, Düsseldorf: Ernst & Sohn* 1976 Heft 270.
- [13] Warner, R.: *Tragfähigkeit und Sicherheit von Stahlbetonstützen unter ein- und zweiachsiger exzentrischer Kurzzeit- und Dauerbelastung*. *Dt. Aussch. f. Stahlbeton Berlin, München, Düsseldorf: Ernst & Sohn* 1974 Heft 256.
- [14] Schaper, G.: *Berechnung des zeitabhängigen Verhaltens von Stahlbetonplatten unter Last- und Zwangsbeanspruchung im ungerissenen und gerissenen Zustand*. *Dt. Aussch. f. Stahlbeton Berlin, München, Düsseldorf: Ernst & Sohn* 1982 Heft 338.
- [15] Boland, P. L.; Pian, T. H.: Large deflection analysis of thin elastic structures by the assumed stress hybrid finite element method. *Computers & Structures* 7 (1977) 1, 1–12.
- [16] Zhengxing, Liu; Rong, Ye: Large deflection analysis of thin elastic shells by a hybrid stress method. *Computers & Structures* 30 (1988) 4, 995–998.
- [17] Atluri, S. N.; Gallagher, R. H.; Zienkiewicz, O. G. (eds.): *Hybrid and Mixed Finite Element Method*. S. 51–69, New York: Wiley 1983.
- [18] Ebel, H.: *Beitrag zur Stabilitätsberechnung ebener Flächentragwerke mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente*. Diss., TH Darmstadt, 1967.
- [19] Böhm, T.: *Kritische Beullast ausgesteifter Platten mit elastischem und elastoplastischem Verhalten auf Grundlage einer Finiten-Element-Methode*. Diss., TU Dresden 1977.

- [20] Schmidt, B.: Ein finites Element Verfahren zur Berechnung vorverformter ausgesteifter Rechteckplatten unter Berücksichtigung von geometrischen und Materialnichtlinearitäten. Diss., TU Berlin, 1975.
- [21] Hoffmann, A.: Statik von Faltenwerken bei näherungsweise Erfassung geometrischer Nichtlinearitäten im Rahmen von FALT-FEM unter besonderer Berücksichtigung von Stahlbetonkonstruktionen. Diss., TU Dresden, 1988.
- [22] Wassilew, T.: Nichtlineare Statik räumlicher Stabtragwerke – Beiträge zu den Programmsystemen STATRA (Baustein 8) und STATRA-FEM. Diss., TU Dresden, 1983.
- [23] Anderheggen, E.: Geometrisch und physikalisch nichtlineare Probleme. Mitteilung 76–8, IKIB Ruhr-Univ. Bochum, 1976.
- [24] Müller, H.; Jäger, W.; Wassilew, T.; Graf, W.: Statik räumlicher Stabtragwerke nach Elastizitätstheorie I. und II. Ordnung (Grundlagen, Beispiele, Richtlinien zur Programmanwendung). Heft 95 1982, Heft 130 1983, Bauforschung – Baupraxis, Berlin.
- [25] Protte, W.: Zur kombinierten Gurt-Stegblech-Beulung querbelasteter I-Träger mit einem breiten Gurt. Stahlbau 52 (1983) 5, 151–153.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. H. Müller
 Dr.-Ing. A. Hoffmann
 Technische Universität Dresden
 Lehrstuhl Baumechanik/Statik
 Mommsenstr. 13
 Dresden
 O – 8027