

# Modellierung der turbulenten Schubspannung in Grenzschichten

W. Szablewski

*Die derzeit noch ungelöste Problematik – ein zentrales Problem der Turbulenzforschung – liegt in der definierten mathematischen turbulenten Schubspannung, die diese in Relation zu den Mittelwerten des Geschwindigkeitsfeldes setzt.*

*In der vorliegenden Mitteilung erhalten wir, ausgehend von der in der Trägheitsunterschicht geltenden bekannten Prandtl'schen Formulierung, eine Formel für die turbulente Schubspannung im Trägheitsbereich der Grenzschicht, die mit Messungen in inkompressiblen Grenzschichten in Übereinstimmung steht.*

## Modeling of the turbulent shear stress in boundary layers

*Modelling of the turbulent shear stress in turbulent boundary layers. We derive a formula for the turbulent shear stress in the inertial layer of the boundary layers. Agreement with measurements in incompressible and compressible adiabatic boundary layers.*

### 1. Trägheitsschicht

Es bezeichne  $x$  die vom Staupunkt der Strömung gemessene Bogenlänge der als glatt angenommenen Kontur des Körpers,  $y$  den senkrechten Abstand von der Wand;  $u$ ,  $v$  die entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten des Geschwindigkeitsfeldes,  $\rho$  die Dichte.

Die Symbole bezeichnen Mittelwerte der turbulenten Strömung.

Das dynamische Verhalten der Grenzschichtströmung in einer jeweiligen Schicht ist durch deren Reynoldssche

Zahl  $Re_y = \frac{uy}{\nu}$  ( $\nu = \mu/\rho$  kinematische Zähigkeit) bestimmt anzusehen. Bei großem  $Re_y$  werden die Trägheitskräfte maßgebend sein, bei kleinem  $Re_y$  die Reibungskräfte.

Wir können demnach in der Grenzschicht eine *Trägheitsschicht* abgrenzen gegen eine *Zähigkeitsschicht*, in welcher der Einfluß der Zähigkeit nicht mehr vernachlässigbar ist.

Für eine große Reynoldssche Zahl  $Re_\delta = \frac{U\delta}{\nu}$  ( $U$  konstante Anströmgeschwindigkeit,  $\delta$  Grenzschichtdicke) wird dabei die der Wand anliegende Zähigkeitsschicht, auch Unterschicht (sublayer) genannt, eine relativ dünne Schicht sein.

Innerhalb der Trägheitsschicht können wir weiter, wie die Forschung ergeben hat, eine *innere* Schicht, die dem Einfluß der Wand unterliegt, unterscheiden von einer *äußeren* Schicht, die keinen Einfluß der Wand mehr aufweist und den Charakter freier Turbulenz hat.

#### a) Trägheitsunterschicht

Bei hinreichend großem  $Re_\delta$  wird es nach den obigen Ausführungen in der Trägheitsschicht eine an die Zähigkeitsschicht grenzende Trägheitsunterschicht geben, für die

$$y \ll \delta. \quad (1)$$

Dimensionsanalytisch [1] ergibt sich in der Trägheitsunterschicht für den Geschwindigkeitsanstieg

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sqrt{\tau/\rho}}{l} \quad (2)$$

$\tau$  turbulente Schubspannung,  
 $l$  mittlere Länge.

Als determinierende Länge  $l$  steht in der Trägheitsunterschicht nur der Wandabstand  $y$  bzw. die Länge  $l = \kappa y$  zur Verfügung

$$(\kappa \text{ empirischer Koeffizient, nach Messungen } \kappa = 0,41 \text{ (vgl. 2, } \beta)). \quad (3)$$

$$\text{Damit hier } \tau/\rho = \kappa^2 y^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|. \quad (4)$$

#### b) Innere und äußere Trägheitsschicht

##### 1. Theorie

Gehen wir nun von der Trägheitsunterschicht weiter in die Trägheitsschicht hinein, so tritt als weitere determinierende Länge die Grenzschichtdicke  $\delta$  auf. (Unter der Voraussetzung relativ geringer Krümmung der Kontur können wir von einer Abhängigkeit der mittleren Länge  $l$  vom Krümmungsradius absehen).

Dimensionsanalytisch werden wir damit auf

$$l = \kappa y f(y/\delta) \quad (6)$$

$$\text{bzw. } l/\delta = \kappa \eta f(\eta), \quad \eta = y/\delta$$

mit der bei der Dimensionsanalysis unbestimmt bleibenden Funktion  $f(\eta)$  geführt.

Messungen hinsichtlich des Verlaufs von  $l$  in Grenzschichten haben angezeigt:

In der *inneren* Schicht, die dem Einfluß der Wand unterliegt, wächst die mittlere Länge  $l$  des turbulenten Austauschs monoton mit dem Abstand  $y$  von der Wand. An diese innere Schicht von der Breite  $m\delta$  mit  $m < 1$  ( $m$  rela-

tive Breite der inneren Schicht) schließt sich die *äußere* Schicht vom Charakter freier Turbulenz mit konstanter mittlerer Länge  $l$  an.

Damit stellen sich hinsichtlich des Verlaufs von  $f(\eta)$  die Forderungen

$$\begin{aligned} 1) & f(\eta) \rightarrow 1 \quad \text{für } \eta \rightarrow 0, \\ 2) & \frac{d(l/\delta)}{d\eta} = 0 \quad \text{für } \eta = m. \end{aligned} \quad (7)$$

Wesentlich ist die Feststellung, daß die relative Breite  $m$  der inneren Trägheitsschicht je nach der Konfiguration (Strömungen in Leitungen; kompressible Grenzschichten für verschiedene Machzahlen  $M$ ) andere Werte besitzt (vgl. Bild 2).

In der Trägheitsunterschicht haben wir (3)

$$l = xy \quad \text{bzw.} \quad \frac{dl}{l} = \frac{dy}{y}$$

Ansatz (6) für die innere Schicht  $0 < \eta \leq m$  führt auf

$$\frac{dl}{l} = \frac{dy}{y} \left( 1 + \eta \frac{df(\eta)/d\eta}{f(\eta)} \right) \equiv \frac{dy}{y} \varphi(\eta). \quad (8)$$

Erfüllung der Forderung 2) erfordert

$$\varphi(\eta; m) = 0 \quad \text{für } \eta = m \quad (0 < m < 1).$$

Entwickeln wir in eine Taylorreihe

$$\varphi(\eta; m) = 1 + a\eta + b\eta^2 + \dots,$$

so ergibt die Forderung 2) bei Beschränkung auf das lineare Glied *eindeutig*

$$\varphi(\eta; m) = 1 - \frac{\eta}{m} \quad \text{bzw.} \quad \left. \frac{d\varphi(\eta; m)/d\eta}{\varphi(\eta; m)} \right|_{\eta=m} = -\frac{1}{m} \quad (9)$$

Eingedenk der Forderung 1) erhalten wir dann

$$f(\eta; m) = e^{-\eta/m}$$

und die Formel

$$l/\delta = \begin{cases} x\eta e^{-\eta/m} & \text{für } 0 < \eta \leq m \\ xm e^{-1} & \text{für } m \leq \eta = 1. \end{cases} \quad (10)$$

Die für die innere Trägheitsschicht ( $0 < \eta \leq m$ ) erhaltene Formel stellt das *Analogon* zu der von van Driest [2] angegebenen Formel

$$l = xy \left( 1 - e^{-\frac{v_* y}{\nu} \frac{1}{a}} \right), \quad v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$$

für die Zähigkeitsschicht dar (vgl. (14), (16)).

(Formel (10) wurde vom Verf. bereits in [3] erhalten.)

Das Maximum des relativen Längenmaßes  $l/\delta$  des turbulenten Austausches und die relative Breite  $m$  der inneren Schicht sind demnach durch die *Relation*

$$(l/\delta)_{\max} = \frac{x}{e} m \quad (11)$$

verbunden.

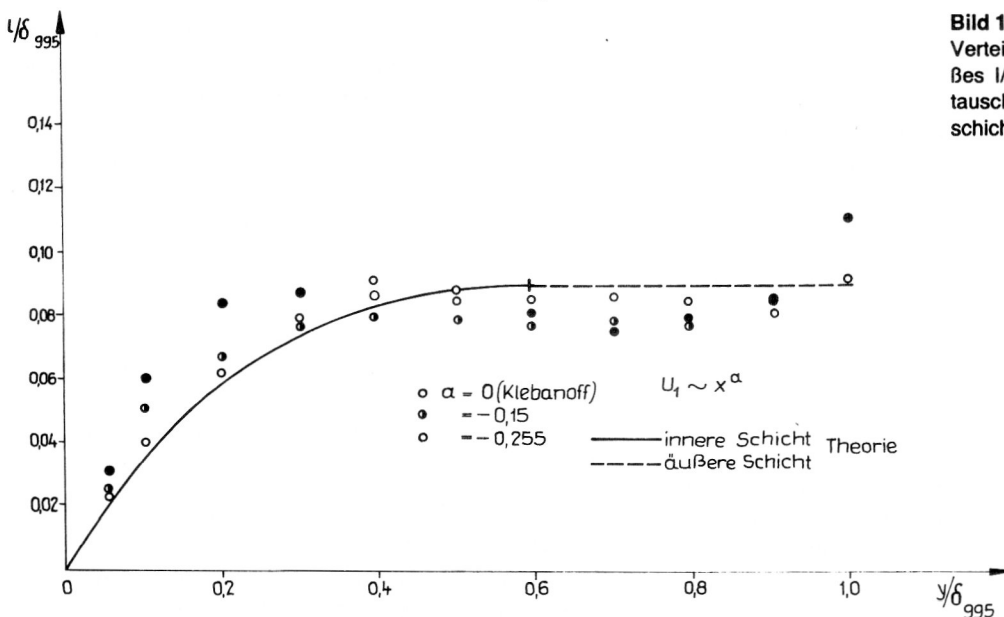
Die hergeleitete Relation (11) steht in *Übereinstimmung* mit *Messungen* *adiabatischer kompressibler Grenzschichten* (vgl. 2,  $\beta$ ).

Die auf Formel (10) beruhende weitere Darstellung wird befriedigende *Übereinstimmung* mit *Messungen* zeigen.

## 2. Vergleich mit dem Experiment

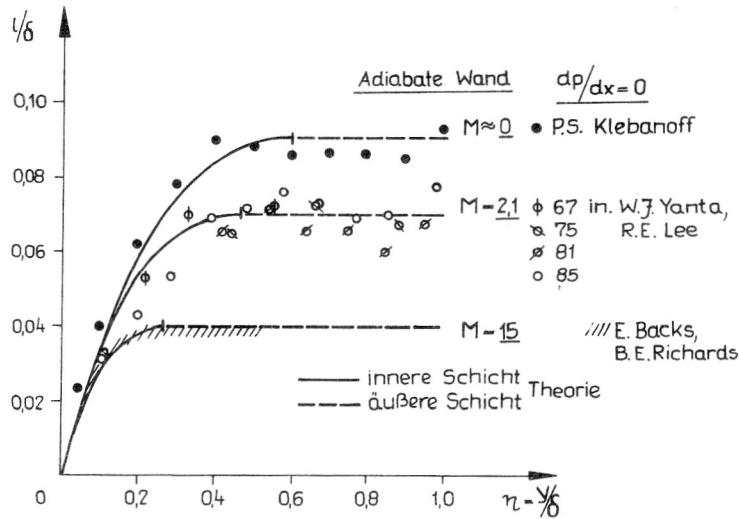
### a) Inkompressible Grenzschichten

Bild 1 enthält aus *Messungen* gewonnene Verteilungen von  $l/\delta$  für die Grenzschicht an der ebenen Platte (Klebanoff [4]) und für sog. *Equilibrium-Grenzschichten* mit *Druckanstieg* (Bradshaw [5]). (*Equilibrium-Grenzschichten* verhalten sich nahezu ähnlich und sind dadurch charakterisiert, daß die *Potentialströmung* nach einem *Potenzgesetz*  $U(x) \sim x^a$  verläuft). Gemessen wurde die *turbulente Schubspannung*  $\tau$  und die *Geschwindigkeitsverteilung*  $u(y)$ , die es dann noch zu differenzieren galt



**Bild 1**

Verteilung des relativen Längenmaßes  $l/\delta$  des turbulenten Impulsaustausches in inkompressiblen Grenzschichten.



**Bild 2**  
Verteilung des relativen Längenmaßes  $l/\delta$  des turbulenten Impulsaustausches in kompressiblen Grenzschichten bei verschiedenen Machzahlen  $M$ .

$$l = \frac{\sqrt{\tau}}{\rho} / \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Eingetragen haben wir dazu die sich nach (10) für

$$m = 0,6 \quad (12)$$

ergebende theoretische Verteilung von  $l/\delta$ .

#### b) Kompressible Grenzschichten

Neuere Untersuchungen von kompressiblen turbulenten Grenzschichten zeigen offensichtlich eine Abhängigkeit  $(l/\delta)_{\max}$  der inneren Trägheitsschicht von der Machzahl  $M$  der Anströmung. Bei diesen Untersuchungen wurde die Schubspannung

$$\tau = \rho (-\overline{u'v'}) \quad (13)$$

nicht gemessen, sondern aus den Bewegungsgleichungen mit Hilfe gemessener Geschwindigkeitsverteilungen

ermittelt, wobei Differentiationen nach  $x$  (Längskoordinate) und  $y$  durchzuführen waren. In [6] wurde zusätzlich der Term  $-u'v'$  auch direkt mittels Lasertechnik bestimmt.

Bild 2 enthält für adiabatische Strömung und  $dp/dx = 0$  bei  $M = 2,9$  die von Yanta, Lee [6] durch Anwendung von Lasertechnik ermittelte Verteilung von  $l/\delta$  mit  $(l/\delta)_{\max} \approx 0,07$ , was nach der Relation (11) für die relative Breite  $m$  der inneren Schicht  $m \approx 0,46$  und damit nach (10)  $l/\delta \approx 0,41 \eta \exp(-\eta/0,46)$  in Übereinstimmung mit der Messung für  $0 < \eta \leq m$  ergibt. Eingetragen ist weiter für adiabatische Strömung und  $dp/dx = 0$  bei  $M = 15$  die von Backx, Richards [7] mittels der Bewegungsgleichungen erhaltene Verteilung von  $l/\delta$ . Das ergibt hier mit  $(l/\delta)_{\max} \approx 0,04$  nach (11)  $m \approx 0,265$  und damit  $l/\delta \approx 0,41 \eta \exp(-\eta/0,265)$  für  $0 < \eta \leq m$ .

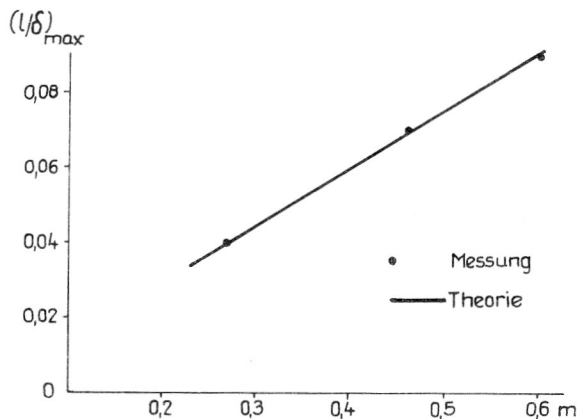
Was die äußere Trägheitsschicht betrifft, so ist  $l/\delta = \text{const}$  aus den Messungen ablesbar.

In allen Fällen ergab sich

$$\kappa = 0,41.$$

In Bild 3 haben wir das sich nach der Relation (11) ergebende  $(l/\delta)_{\max}$  in Abhängigkeit von  $m$  (der relativen Breite der inneren, dem Einfluß der Wand unterliegenden Schicht) mit den Messungen verglichen.

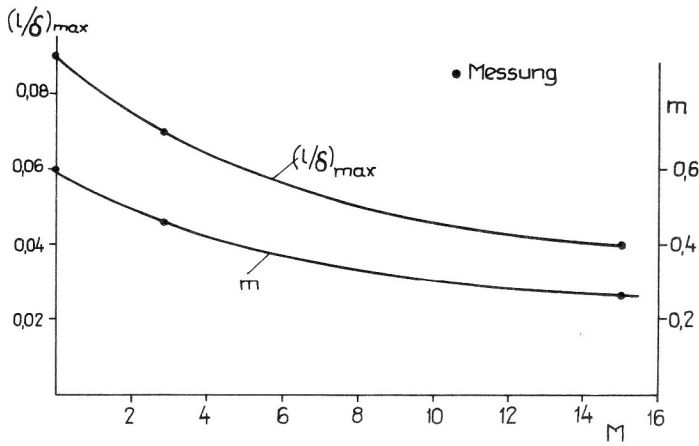
Es verbleibt hier jedoch theoretisch das Problem der Abhängigkeit von  $(l/\delta)_{\max}$  bzw.  $m$  von der Machzahl  $M$ ; vgl. Bild 4.



**Bild 3**  
Abhängigkeit des relativen Längenmaßes  $(l/\delta)_{\max}$  von der relativen Breite  $m$  der inneren Schicht

**Tabelle 1**

$M = 0$	$(l/\delta)_{\max} \approx 0,09$	$m \approx 0,6$
2,9	$\approx 0,07$	$\approx 0,46$
15	$\approx 0,04$	$\approx 0,265$



**Bild 4**  
Abhängigkeit von  $(l/\delta)_{max}$  und  $m$  von der Machzahl  $M$

## 2. Zähigkeitsschicht

a) In dieser Schicht tritt neben  $y$  als weitere determinierende Länge

$$v/v_* \quad (v_* = \sqrt{\tau_{o/\rho}}) \text{ auf.}$$

Damit stellt sich für diese Schicht das Problem

$$l = \kappa y \varphi_* \left( \frac{v_* y}{\nu} \right) \quad (14)$$

bzw.

$$\frac{v_* l}{\nu} = \kappa y_* \varphi_* (y_*) \quad (y_* = \frac{v_* y}{\nu})$$

mit der Forderung

$$\varphi_* (y_*) \rightarrow 1 \text{ für } y_* \rightarrow \infty.$$

Wir bemerken zunächst, daß  $\tau_{turb./\rho} = -\overline{u'v'}$  an der Wand zumindest mit der dritten Potenz des Abstandes  $y$  von der Wand verschwindet, wie Reihenentwicklung unter Beachtung der Kontinuität ergibt:

$$u' \sim y, \quad v' \sim y^2.$$

Mit

$$(\tau/\rho)_{turb.} = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} = \kappa^2 y^2 \varphi_*^2(y_*) \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y} \quad (15)$$

ist demnach  $y_* > y_*$   $\varphi_*(y_*)$  in Wandnähe  $y_* \neq 0$ .

Startend mit Null bei  $y_* = 0$  verläuft also  $y_* \varphi_*(y_*)$  unterhalb von  $y_*$ , um dann der obigen Forderung entsprechend in  $y_*$  zu münden ( $\varphi_* \rightarrow 1$  für  $y_* \rightarrow \infty$ ).

Dem entspricht die von van Driest [2] auf heuristischem Wege gefundene Formulierung

$$\varphi_* = 1 - e^{-y_*/a} \quad (a > 0 \text{ Parameter}) \quad (16)$$

in der Zähigkeitsschicht.

Der Parameter  $a$  ist dabei dadurch charakterisiert, daß

$$\frac{d}{dy_*} (y_* - y_* \varphi_*(y_*)) = 0$$

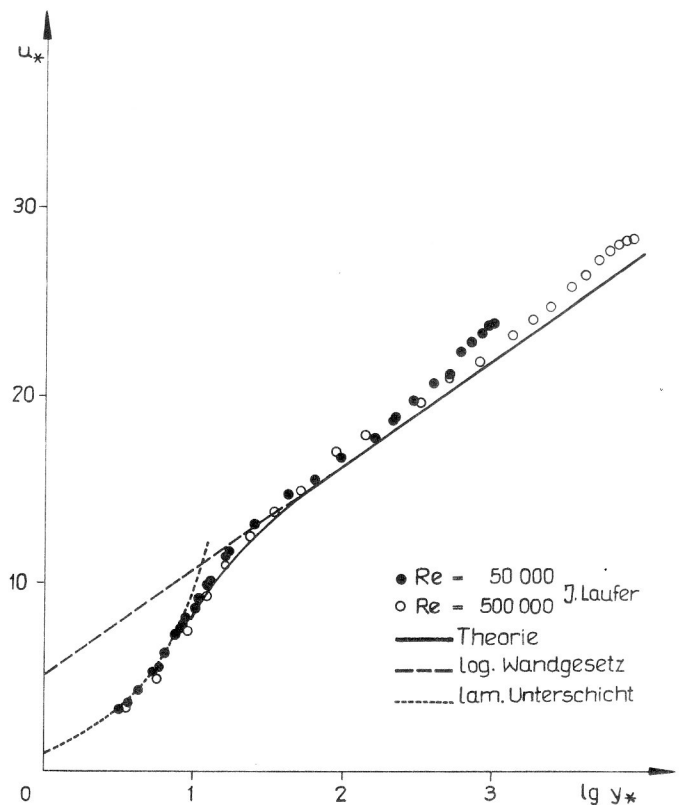
$$\text{oder - mit } \psi_* = 1 - \varphi_* -$$

$$\frac{d}{dy_*} y_* \psi_* = 0 \quad \text{für } y_* = a;$$

nach (16):

$$\frac{d\psi_*(y_*; a)/dy_*}{\psi_*(y_*; a)} = -\frac{1}{a} \quad (17)$$

Die Funktion  $\psi_*(y_*)$  in der Zähigkeitsschicht erscheint so - vgl. Gleichung (9) - als Analogon zur Funktion  $f(\eta)$  in der inneren Trägheitsschicht.



**Bild 5**  
Geschwindigkeitsverteilung im Zähigkeits- und Trägheitsunterbereich inkompressibler turbulenter Grenzschichten

Wir merken hierzu noch an: Für relativ große Reynoldssche Zahlen  $Re_\delta$  bzw. relativ dünne Zähigkeitsschicht ist der Parameter  $a$  als Konstante anzusehen. Im anfänglichen Verlauf einer turbulenten Grenzschicht bei relativ kleiner Reynoldsscher Zahl  $Re_\delta$  bzw. relativ dicker Zähigkeitsschicht ergibt sich jedoch nach den Messungen von Bradshaw, Huffman [8] eine Variation des Parameters  $a$  mit  $Re_\delta$ .

b) Die Gleichung der Zähigkeitsschicht lautet

$$\frac{\tau}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\tau_{\text{lam.}} + \tau_{\text{turb.}}) \approx \frac{\tau_0}{\rho} \quad (18)$$

mit

$$\begin{aligned} (\tau/\rho)_{\text{lam.}} &= \nu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (\tau/\rho)_{\text{turb.}} = -\overline{u'v'} \\ &= l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier  $l = \kappa y \varphi_*(y_*)$  mit  $\varphi_*(y_*)$  nach (16), so erhalten wir die Gleichung

$$1 = \frac{\partial u_*}{\partial y_*} + \kappa^2 y_*^2 [1 - \exp(-y_*/a)]^2 \left( \frac{\partial u_*}{\partial y_*} \right)^2 \quad (19)$$

$$(u_* = u/v_*).$$

Quadratur ergibt dann die Geschwindigkeitsverteilung

$$u_* = \int_0^{y_*} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4 \kappa^2 y_*^2 \varphi_*^2}} dy_*, \quad (20)$$

die für  $y_* \rightarrow \infty$  in ein logarithmisches Wandgesetz übergeht. Der Parameter  $a$  ist hier für *inkompressible Grenzschichten* so zu wählen, daß sich die Integrationskonstante  $C \approx 5,10$  ergibt

$$a \approx 25. \quad (21)$$

Der in Bild 5 enthaltene Vergleich der Theorie mit von Laufer [9] in ausgebildeten turbulenten Rohrströmungen gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen zeigt Übereinstimmung in der Zähigkeitsschicht.

c) Die Messungen von Laufer ermöglichen eine weitere Bestätigung des Ansatzes von van Driest.

Für die auf die Masseneinheit bezogene Produktion der Turbulenzenergie  $\Pi$  bzw.

$$\Pi \left( \equiv \frac{\Pi \nu}{v_*^4} \right) = \frac{\tau_{\text{turb.}}}{\rho v_*^2} \frac{\partial u_*}{\partial y_*} \quad (22)$$

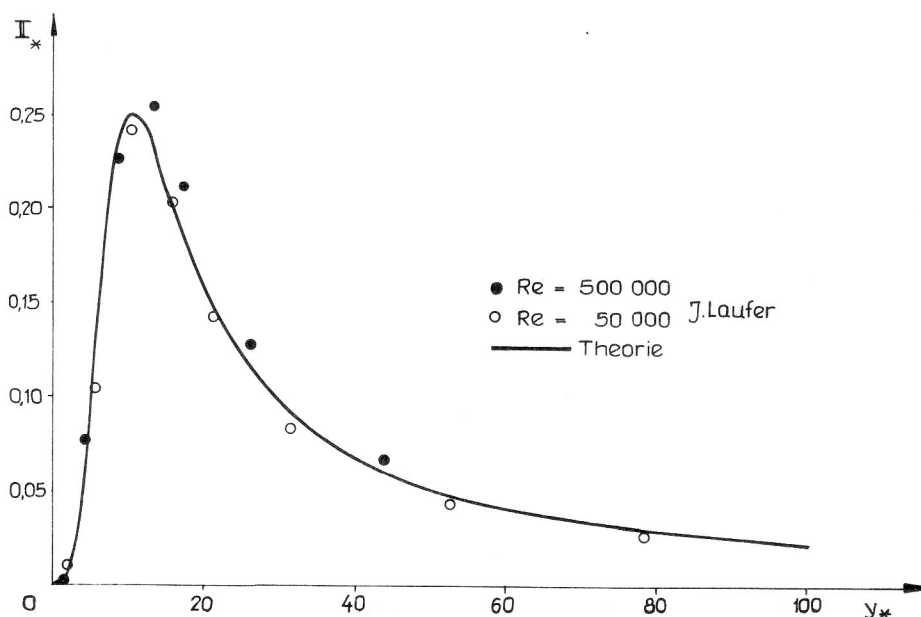
erhält man mit der Bewegungsgleichung (19)

$$1 = \frac{\partial u_*}{\partial y_*} + \frac{\tau_{\text{turb.}}}{v_*^2}$$

$$\Pi_* = \left( 1 - \frac{\partial u_*}{\partial y_*} \right) \frac{\partial u_*}{\partial y_*}. \quad (23)$$

Daraus folgt exakt, daß  $\Pi_{*,\text{max}} = \frac{1}{4}$  bei  $\partial u_*/\partial y_* = 1/2$ .

Einsetzen von (20) ergibt die in Bild 6 aufgetragene Verteilung  $\Pi_*$  über  $y_*$  im Vergleich mit den Messungen von Laufer.



**Bild 6**  
Produktion der Turbulenzenergie im Zähigkeitsbereich inkompressibler turbulenter Grenzschichten

## LITERATUR

- [ 1 ] Prandtl, L.: Über die ausgebildete Turbulenz. ZAMM 5 (1925) 126.
- [ 2 ] von Driest, E. R.: On turbulent flow near a wall. J. Aero. Sci. 23 (1956) 1007.
- [ 3 ] Szablewski, W.: Turbulente Scherströmungen I: Grenzschichten. Akad. Verlag Berlin 1976.
- [ 4 ] Klebanoff, P. S.: Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient. NACA Rep. 1242 (1955).
- [ 5 ] Bradshaw, R.: The turbulence structure of equilibrium boundary layers. Fl. Mech. 29 (1967), 625.
- [ 6 ] Yanta, W. J.; Lee, R. D.: Measurements of Mach 3 turbulence transport properties on a nozzle wall. AIAA Journ. 14 (1976) 725.
- [ 7 ] Backx, E.; Richards, B. E.: A high Mach number boundary-layer study. AIAA Journ. 14 (1976) 1159.
- [ 8 ] Huffman, G. D.; Bradshaw, P.: A note on von Kármán's constant in low Reynolds number turbulent flows. Fl. Mech. 53 (1972) 45.
- [ 9 ] Laufer, J.: The structure of turbulence in fully developed pipe flow. NACA Rep. 1174 (1954).

### **Anschrift des Verfassers:**

Prof. W. Szablewski  
Rudower Chaussee 5  
Berlin  
1199