TECHNISCHE MECHANIK 12 (1991) Heft 2
Manuskripteingang: 30. 01. 1990

Anisotrope Stabschalenmodelle mit nichtsymmetrischem Wandaufbau[1)]

Holm Altenbach, Johannes Altenbach, Volker Matzdorf

In Fortsetzung einer früheren Arbeit über die Ableitung einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Stabschalen mit über der Wanddicke symmetrischer Struktur werden die Grundgleichungen für den unsymmetrischen Fall abgeleitet. Für praktisch wichtige Spezialfälle werden vereinfachte Gleichungen angegeben.
Die Arbeit diskutiert weitere Entwicklungen auf dem Gebiet der dünnwandigen Stabschalen und gibt einen aktuellen Literaturüberblick.

Anisotropic beam-shell-models with non-symmetrical structured walls

Following an earlier paper on the fundamentals of a generalized semi-moment shell theory for thinwalled, anisotropic structures with symmetry to the middle plane of the walls the basic equations for the case of non-symmetrical structures walls are derived. Simplifications are presented for some important special cases.
The paper discusses further trends of generalization and gives a state of the art by reviewing literature.

1. Einleitung

Berechnungsmodelle auf der Grundlage der Theorie dünnwandiger Stäbe [1], der halbmomentenfreien Schalentheorie von Vlasov [2] bzw. verallgemeinerter Stabschalenmodelle [3], [4] haben in der Berechnungspraxis (Leichtbau, Schiffbau usw.) breite Anwendung gefunden. Forschungsarbeiten der letzten Jahre haben dazu geführt, daß weitere Modellvorschläge für die Strukturanalyse erarbeitet wurden. Den Schwerpunkt dabei bilden Fragen der Verbesserung der Modelle selbst – dies bezieht sich hauptsächlich auf die Erhöhung des kinematischen Freiheitsgrades [5], [6] und die Einbeziehung eines allgemeineren Werkstoffmodells [7] bis [9] – sowie die Effektivitätssteigerung der numerischen Berechnungsverfahren [10], wobei beide Problemkreise zunehmend in Wechselwirkung stehen.

In einer früheren Arbeit [7] wurden die Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen mit symmetrischem Wandaufbau abgeleitet. Ausgehend von dieser Arbeit soll in diesem Beitrag eine Erweiterung auf den Fall nichtsymmetrischen Wandaufbaus vorgenommen werden. Dieser Fall wird zunehmend auch für anisotrope Modelle bedeutsam, da konstruktive Anisotropie (z. B. Anordnung von Aussteifungen in bestimmten Richtungen für einzelne Blechfelder) und Materialanisotropie (z. B. Einsatz von Verbundwerkstoffen, Werkstoffverbunden bzw. Laminaten aus Faserverbunden) nicht immer ausreichend genau im Rahmen von Modellen mit symmetrischem Wandaufbau beschrieben werden können.

In der vorliegenden Arbeit wird die Gültigkeit der linearen Elastizitätstheorie vorausgesetzt. Außerdem erfolgt die Ableitung der Grundgleichungen im Rahmen der klassischen Theorien für dünnwandige Flächentragwerke [11], [12]. Mit den dabei gefundenen Beziehungen lassen sich lange, stabförmige Faltwerke mit ausgeprägter Anisotropie und symmetrischem bzw. nichtsymmetrischem Wandaufbau in den einzelnen Schalenstreifen bezüglich der jeweiligen Schalenmittelfläche (SMF) modellieren. Wichtige Sonderfälle sind darin enthalten.

2. Das elastische Potential für anisotrope Stabschalen mit unsymmetrischem Wandaufbau

Im hier analysierten Fall gelten die Gln. (1.1) bis (1.14) der Arbeit [7] unverändert. Sie werden daher an dieser Stelle nur verkürzt wiedergegeben. Betrachtet man anisotrope, prismatische Stabschalen, die aus n dünnen, ebenen, im Grundriß rechteckigen Schalenstreifen bestehen, wobei die Längskanten biegesteife oder gelenkige Verbindungen aufweisen können, lassen sich (n+1) Koordinatensysteme einführen: das globale Koordinatensystem x, y (beliebig wählbare Bezugsachsen für den Gesamtquerschnitt) und z (beliebig wählbare Stabachse) sowie n lokale Systeme (jeweils 1 System je Streifen). Die lokalen Systeme werden durch die Koordinaten z_i (parallel zur z-Achse), s_i (Konturkoordinate in den Querschnittsebenen) definiert. Dabei ist $i = 1, 2, \dots, n$. Damit lassen sich die Grundgleichungen für den i-ten Streifen in folgender Form angeben:

– die Verschiebungen für die i-te SMF

$$u_i = u_i(z_i, s_i), \quad v_i = v_i(z_i, s_i), \quad w_i = w_i(z_i, s_i) \tag{2.1}$$

– die Belastungen für die i-te SMF
  - Flächenlasten

$$p_{z_i} = p_{z_i}(z_i, s_i), \quad p_{s_i} = p_{s_i}(z_i, s_i), \quad p_{n_i} = p_{n_i}(z_i, s_i) \tag{2.2}$$

  - Randlasten

$$\begin{aligned} q_{z_i/z_i=0} &= q_{z_i}(0, s_i), \quad q_{s_i/z_i=0} = q_{s_i}(0, s_i), \\ q_{n_i/z_i=0} &= q_{n_i}(0, s_i) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} q_{n_i/z_i=1} &= q_{z_i}(l, s_i), \quad q_{s_i/z_i=l} = q_{s_i}(l, s_i), \\ q_{n_i/z_i=l} &= q_{n_i}(l, s_i) \end{aligned} \tag{2.4}$$

1) Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Wunderlich zum 60. Geburtstag gewidmet.

- der Schnittgrößenvektor $\boldsymbol{Q}_i$ (t_i – Dicke des i-ten Streifens, $\boldsymbol{n}_i$ – Scheibenkräftevektor, $\boldsymbol{m}_i$ – Plattenmomentenvektor)

$$\boldsymbol{Q}_i^T = [\boldsymbol{n}_i; \boldsymbol{m}_i]$$
$$= [n_{z_i}, n_{s_i}, n_{z_is_i}; m_{z_i}, m_{s_i}, m_{z_is_i}] \qquad (2.5)$$
$$= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} [\sigma_{z_i}, \sigma_{s_i}, \tau_{z_is_i}; \sigma_{z_i}n_i, \sigma_{s_i}n_i, \tau_{z_is_i}n_i]\,dn_i$$

- der Deformationsgrößenvektor $\boldsymbol{E}_i$ ($\boldsymbol{\varepsilon}_i$ – Verzerrungsvektor, $\boldsymbol{\kappa}_i$ – Krümmungsvektor)

$$\boldsymbol{E}_i^T = [\boldsymbol{\varepsilon}_i; \boldsymbol{\kappa}_i]$$
$$= [\varepsilon_{z_i}, \varepsilon_{s_i}, \varepsilon_{z_is_i}; \kappa_{z_i}, \kappa_{s_i}, \kappa_{z_is_i}] \qquad (2.6)$$

mit den geometrischen Beziehungen der Scheibentheorie

$$\varepsilon_{z_i} = u_{i,z_i}, \quad \varepsilon_{s_i} = v_{i,s_i}, \quad \varepsilon_{z_is_i} = u_{i,s_i} + v_{i,z_i} \qquad (2.7)$$

und den geometrischen Beziehungen der Plattentheorie

$$\kappa_{z_i} = -w_{i,z_iz_i}, \quad \kappa_{s_i} = -w_{i,s_is_i}, \quad \kappa_{z_is_i} = -2w_{i,s_iz_i} \qquad (2.8)$$

- sowie das Elastizitätsgesetz

$$\boldsymbol{Q}_i = \boldsymbol{C}_i \boldsymbol{E}_i \qquad (2.9)$$

mit der Steifigkeitsmatrix

$$\boldsymbol{C}_i = \left|\begin{array}{c:c} \boldsymbol{C}_{Si} & \boldsymbol{C}_{Ki} \\ \hdashline \boldsymbol{C}_{Ki} & \boldsymbol{C}_{Pi} \end{array}\right| = \left[\begin{array}{ccc:ccc} C_{11i} & C_{12i} & C_{13i} & C_{14i} & C_{15i} & C_{16i} \\ C_{12i} & C_{22i} & C_{23i} & C_{15i} & C_{25i} & C_{26i} \\ C_{13i} & C_{23i} & C_{33i} & C_{16i} & C_{26i} & C_{36i} \\ \hdashline C_{14i} & C_{15i} & C_{16i} & C_{44i} & C_{45i} & C_{46i} \\ C_{15i} & C_{25i} & C_{26i} & C_{45i} & C_{55i} & C_{56i} \\ C_{16i} & C_{26i} & C_{36i} & C_{46i} & C_{56i} & C_{66i} \end{array}\right]$$

Der Ermittlung der Elemente der Steifigkeitsmatrix (2.10) ist ein umfangreiches Schrifttum gewidmet, es kann exemplarisch auf [13] bis [16] verwiesen werden. Im Unterschied zu [7] wird die Steifigkeitsmatrix (2.10) zunächst als vollbesetzt angesehen. Nullelemente treten im allgemeinen nur für Sonderfälle auf. So verschwindet die Untermatrix $\boldsymbol{C}_{Ki}$ vollständig für symmetrischen Wandaufbau. Im Falle isotropen Werkstoffverhaltens läßt sich statt der SMF für bestimmte Situationen eine Referenzfläche finden, für die die Koppelterme verschwinden. Für allgemeine Materialanisotropie gelingt dies nicht [16], [17]. In der Tabelle 1 ist die Zahl der linear-unabhängigen, von Null verschiedenen Steifigkeiten für den allgemeinen Fall und verschiedene Sonderfälle der Anisotropie sowie für symmetrischen und unsymmetrischen Wandaufbau dargestellt.

Tabelle 1

Wandaufbau	nichtsymmetrisch	symmetrisch
Anisotropie	18	12
Orthotropie	12	8
Transversal-Isotropie (n_i – Isotropieachse)	6	4
Isotropie	6	4

Unter Beachtung der Beziehungen (2.1) bis (2.10) für den i-ten Schalenstreifen erhält man das elastische Potential für die Stabschale in folgender Form

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & (1/2) \textstyle\sum_{(i)} \int_0^{d_i} \{ \int_0^{l} [C_{11i}u_{i,z_i}^2 + C_{22i}v_{i,s_i}^2 \\
& + C_{33i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i})^2 + C_{44i}w_{i,z_iz_i}^2 + C_{55i}w_{i,s_is_i}^2 \\
& + 4C_{66i}w_{i,z_is_i}^2 + 2C_{12i}u_{i,z_i}v_{i,s_i} + 2C_{13i}u_{i,z_i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i}) \\
& - 2C_{14i}u_{i,z_i}w_{i,z_iz_i} - 2C_{15i}u_{i,z_i}w_{i,s_is_i} - 4C_{16i}u_{i,z_i}w_{i,z_is_i} \\
& + 2C_{23i}v_{i,s_i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i}) - 2C_{15i}v_{i,s_i}w_{i,z_iz_i} - 2C_{25i}v_{i,s_i}w_{i,s_is_i} \\
& - 4C_{26i}v_{i,s_i}w_{i,z_is_i} - 2C_{16i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i})w_{i,z_iz_i} \\
& - 2C_{26i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i})w_{i,s_is_i} - 4C_{36i}(u_{i,s_i} + v_{i,z_i})w_{i,z_is_i} \\
& + 2C_{45i}w_{i,z_iz_i}w_{i,s_is_i} + 4C_{46i}w_{i,z_iz_i}w_{i,z_is_i} \\
& + 4C_{56i}w_{i,s_is_i}w_{i,z_is_i} - 2(p_{z_i}u_i + p_{s_i}v_i + p_{n_i}w_i)]dz_i \\
& - (q_{z_i}u_i + q_{s_i}v_i + q_{n_i}w_i)_{|z_i=o} \\
& - (q_{z_i}u_i + q_{s_i}v_i + q_{n_i}w_i)_{|z_i=l}\} ds_i
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

d_i ist die Ausdehnung des i-ten Streifens in Richtung der Konturkoordinaten s_i. Die Steifigkeiten $C_{rpi}(r, p = 1, 2, \ldots 6)$ können sich im allgemeinen Fall des hier analysierten Modells mit s_i und z_i ändern, wobei diese Abhängigkeiten in jedem Streifen anders sein können.

3. Reduktion der zweidimensionalen Aufgabe

Mit Hilfe des Verfahrens von Vlasov und Kantorovich [18] läßt sich das zweidimensionale Problem auf ein eindimensionales reduzieren. Für die Verschiebungen u_i, v_i, w_i werden folgende Produktansätze gemacht

$$\begin{aligned}
u_i(z_i, v_i) &= \textstyle\sum_{(j)} U_j(z_i)\,\phi_j(s_i) = \boldsymbol{U}^T(z_i)\boldsymbol{\phi}(s_i), \\
v_i(z_i, v_i) &= \textstyle\sum_{(k)} V_k(z_i)\,\varphi_k(s_i) = \boldsymbol{V}^T(z_i)\boldsymbol{\varphi}(s_i), \\
w_i(z_i, v_i) &= \textstyle\sum_{(k)} V_k(z_i)\,\xi_k(s_i) = \boldsymbol{V}^T(z_i)\boldsymbol{\xi}(s_i).
\end{aligned} \qquad (3.1)$$

Dabei sind $\boldsymbol{\phi}(s_i)$, $\boldsymbol{\varphi}(s_i)$, $\boldsymbol{\xi}(s_i)$ die Vektoren der verallgemeinerten Koordinatenfunktionen und $\boldsymbol{U}(z_i)$, $\boldsymbol{V}(z_i)$ die Vektoren der verallgemeinerten Verschiebungen. Mit diesen Produktenansätzen geht das elastische Potential in folgende Form über

$$\begin{aligned}
\Pi = {} & (1/2) \int_0^{l} [\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}' + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_6\boldsymbol{V} + \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{U} \\
& + 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_{15}\boldsymbol{V}' + \boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{V}' + \boldsymbol{V}''^T\boldsymbol{A}_7\boldsymbol{V}'' \\
& + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{V} + 4\boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_9\boldsymbol{V}' + 2\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_{14}\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{U}' \\
& + 2\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_{13}\boldsymbol{V}' - 2\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_{17}\boldsymbol{V}'' - 2\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_{19}\boldsymbol{V} - 4\boldsymbol{U}'^T\boldsymbol{A}_{18}\boldsymbol{V}' \\
& + 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_{16}\boldsymbol{V} + 2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_5\boldsymbol{V}' - 2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{26}\boldsymbol{V}'' - 2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{28}\boldsymbol{V} \\
& - 4\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{27}\boldsymbol{V}' - 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_{20}\boldsymbol{V}'' - \boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_{23}\boldsymbol{V}'' - 2\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{V} - 2\boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_{25} \\
& - 4\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{V}' - 4\boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_{24}\boldsymbol{V}' + 2\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{10}\boldsymbol{V}'' + 4\boldsymbol{V}'^T\boldsymbol{A}_8\boldsymbol{V}'' \\
& + 4\boldsymbol{V}^T\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{V}' - 2(\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{f}_z + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{f}_s + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{f}_n)]dz \\
& - (\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{r}_z + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{r}_s + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{r}_n)_{|z=o} - (\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{r}_z + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{r}_s + \boldsymbol{V}^T\boldsymbol{r}_n)_{|z=l}
\end{aligned} \qquad (3.2)$$

mit $(\ldots)' = \delta(\ldots)/\delta z_i$ sowie den Abkürzungen für die Vektoren der verallgemeinerten Flächenlasten $\boldsymbol{f}^T = [\boldsymbol{f}_z, \boldsymbol{f}_s, \boldsymbol{f}_n]$

$$\boldsymbol{f}_z = \langle p_{z_i}\boldsymbol{\phi}\rangle, \quad \boldsymbol{f}_s = \langle p_{s_i}\boldsymbol{\varphi}\rangle, \quad \boldsymbol{f}_n = \langle p_{n_i}\boldsymbol{\xi}\rangle, \qquad (3.3)$$

den Vektoren der verallgemeinerten Randlasten

$$\boldsymbol{r}^T_{|z=0,l} = [\boldsymbol{r}_z, \boldsymbol{r}_s, \boldsymbol{r}_n]_{|z=0,l} \quad \boldsymbol{r}_{z_i|z=0,l} = \langle q_{z_i|z=0,l}\,\boldsymbol{\phi}\rangle,$$
$$\boldsymbol{r}_{s_i|z=0,l} = \langle q_{s_i|z=0,l}\,\boldsymbol{\varphi}\rangle, \quad \boldsymbol{r}_{n_i|z=0,l} = \langle q_{n_i|z=0,l}\,\boldsymbol{\xi}\rangle \qquad (3.4)$$

sowie den Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte

$$\boldsymbol{A}_1 = <C_{11l}\phi\phi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_2 = <C_{13l}\phi^o\phi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_3 = <C_{33l}\phi^o\phi^{oT}>, \qquad \boldsymbol{A}_4 = <C_{33l}\varphi\varphi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_5 = <C_{23l}\varphi^o\varphi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_6 = <C_{22l}\phi^o\phi^{oT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_7 = <C_{44l}\xi\xi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_8 = <C_{46l}\xi^o\xi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_9 = <C_{66l}\xi^o\xi^{oT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{10} = <C_{45l}\xi^{oo}\xi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_{11} = <C_{56l}\xi^{oo}\xi^{oT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{12} = <C_{55l}\xi^{oo}\xi^{ooT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = <C_{13l}\phi\varphi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_{14} = <C_{12l}\phi\varphi^{oT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{15} = <C_{33l}\phi^o\varphi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_{16} = <C_{23l}\phi^{oT}\xi^{oT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{17} = <C_{14l}\phi\xi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_{18} = <C_{16l}\phi\xi^{oT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{19} = <C_{15l}\phi\xi^{ooT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{20} = <C_{16l}\phi^o\xi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_{21} = <C_{36l}\phi^o\xi^{oT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{22} = <C_{26l}\phi^o\xi^{ooT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{23} = <C_{16l}\varphi\xi^T>, \qquad \boldsymbol{A}_{24} = <C_{36l}\varphi\xi^{oT}>,$$

$$\boldsymbol{A}_{25} = <C_{26l}\varphi\xi^{ooT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{26} = <C_{15l}\varphi^o\xi^T>,$$

$$\boldsymbol{A}_{27} = <C_{26l}\varphi^o\xi^{oT}>, \qquad \boldsymbol{A}_{28} = <C_{25l}\varphi^o\xi^{ooT}>,$$

mit $(\ldots)^o = \delta(\ldots)/\delta s_i$. In den Formeln (3.3) bis (3.5) ist unter dem Symbol $<(\ldots)>$ das Integral über die Wanddicke zu verstehen

$$<(\ldots)> \; = \; \Sigma_{(i)} \int_0^{d_i} (\ldots) \mathrm{d}s_i$$

Für zwei praktisch wichtige Sonderfälle vereinfacht sich der Berechnungsaufwand für die Matrizen $A_1, \ldots, A_{28}$ wesentlich:

1. Die Steifigkeitswerte C_{rpi} hängen nicht von s_i ab, sind jedoch in jedem Streifen unterschiedlich. Damit erhält man beispielsweise
$$\boldsymbol{A}_1 \; = \; \Sigma_{(i)} C_{11i} \int_0^{d_i} \phi\phi^T \mathrm{d}s_i.$$
2. Die Steifigkeitswerte C_{rpi} hängen nicht von s_i ab und sind in allen Streifen gleich ($C_{rpi} = C_{rp}$), folglich gilt z. B.
$$\boldsymbol{A}_1 \; = \; C_{11} \Sigma_{(i)} \int_0^{d_i} \phi\phi^T \mathrm{d}s_i$$

4. Ableitung der Matrizen-Differentialgleichung und der Randbedingungen

Mit der Forderung $\delta\Pi = 0$ erhält man die Matrizen-Differentialgleichungen und die Randbedingungen in folgender Form

$$-\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}'' + (\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{A}_2^T)\boldsymbol{U}' + \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}_{17}\boldsymbol{V}''' - (\boldsymbol{A}_{13} - 2\boldsymbol{A}_{18} + \boldsymbol{A}_{20})\boldsymbol{V}''$$
$$+ (-\boldsymbol{A}_{14} + \boldsymbol{A}_{15} + \boldsymbol{A}_{19} - 2\boldsymbol{A}_{21})\boldsymbol{V}' + (\boldsymbol{A}_{16} - \boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{V} \; = \; \boldsymbol{f}_z$$

$$-\boldsymbol{A}_{17}^T\boldsymbol{U}''' - (\boldsymbol{A}_{13}^T - 2\boldsymbol{A}_{18}^T + \boldsymbol{A}_{20}^T)\boldsymbol{U}'' + (\boldsymbol{A}_{14}^T - \boldsymbol{A}_{15}^T - \boldsymbol{A}_{19}^T + 2\boldsymbol{A}_{21}^T)\boldsymbol{U}'$$
$$+ (\boldsymbol{A}_{16}^T - \boldsymbol{A}_{22}^T)\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}_7\boldsymbol{V}'''' + (2\boldsymbol{A}_8^T - 2\boldsymbol{A}_8 + \boldsymbol{A}_{23} - \boldsymbol{A}_{23}^T)\boldsymbol{V}'''$$
$$-(\boldsymbol{A}_4 + 4\boldsymbol{A}_9 - \boldsymbol{A}_{10} - \boldsymbol{A}_{10}^T - 4\boldsymbol{A}_{24} + \boldsymbol{A}_{26} + \boldsymbol{A}_{26}^T)\boldsymbol{V}''$$
$$+(\boldsymbol{A}_5 - \boldsymbol{A}_5^T + 2\boldsymbol{A}_{11} - 2\boldsymbol{A}_{11}^T + \boldsymbol{A}_{25} - \boldsymbol{A}_{25}^T - 2\boldsymbol{A}_{27} + 2\boldsymbol{A}_{27}^T)\boldsymbol{V}'$$
$$+(\boldsymbol{A}_6 + \boldsymbol{A}_{12} - 2\boldsymbol{A}_{28})\boldsymbol{V} = \boldsymbol{f}_s + \boldsymbol{f}_n$$

$$\delta\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{U}' + \boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}_{17}\boldsymbol{V}'' + (\boldsymbol{A}_{13} - 2\boldsymbol{A}_{18})\boldsymbol{V}' + (\boldsymbol{A}_{14} - \boldsymbol{A}_{19})\boldsymbol{V} \pm \boldsymbol{r}_z] = 0$$

$$\delta\boldsymbol{V}'^T[-\boldsymbol{A}_{17}^T\boldsymbol{U}' - \boldsymbol{A}_{20}^T\boldsymbol{U} + \boldsymbol{A}_7\boldsymbol{V}'' + (2\boldsymbol{A}_8^T - \boldsymbol{A}_{23}^T)\boldsymbol{V}' + (\boldsymbol{A}_{10}^T - \boldsymbol{A}_{26}^T)\boldsymbol{V}] \; = 0$$

$$\delta\boldsymbol{V}^T[\boldsymbol{A}_{17}^T\boldsymbol{U}'' + (\boldsymbol{A}_{13}^T - 2\boldsymbol{A}_{18}^T + \boldsymbol{A}_{20}^T)\boldsymbol{U}' + (\boldsymbol{A}_{15}^T - 2\boldsymbol{A}_{21}^T)\boldsymbol{U} - \boldsymbol{A}_7\boldsymbol{V}'''$$
$$+ (2\boldsymbol{A}_8 - 2\boldsymbol{A}_8^T - \boldsymbol{A}_{23} + \boldsymbol{A}_{23}^T)\boldsymbol{V}'' + (\boldsymbol{A}_4 + 4\boldsymbol{A}_9 - \boldsymbol{A}_{10}^T - 4\boldsymbol{A}_{24} + \boldsymbol{A}_{26}^T)\boldsymbol{V}'$$
$$+ (\boldsymbol{A}_5^T + 2\boldsymbol{A}_{11}^T - \boldsymbol{A}_{25} - 2\boldsymbol{A}_{27}^T)\boldsymbol{V} \pm \boldsymbol{r}_s \pm \boldsymbol{r}_n] = 0$$

Dabei gelten in den Randbedingungen die oberen Vorzeichen für den Rand $z = 0$, die unteren für den Rand $z = l$.

5. Sonderfälle

Bei der Analyse von Sonderfällen kann man leicht feststellen, daß ein Teil der Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte identisch Null werden bzw. in die zu lösenden Differentialgleichungen mit Termen eingehen, die vernachlässigt werden können, so daß die Berechnung des entsprechenden verallgemeinerten Querschnittskennwerts überflüssig ist. Eine sorgfältige Analyse der Konstruktion bezüglich des Auftretens von Sonderfällen der Anisotropie, der Symmetrieeigenschaften der

Tabelle 2

Fall	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Matrix										
A_1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_2	x	x	o	o	o	o	x	x	x	o
A_3	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_4	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_5	x	x	o	o	o	o	x	x	/	/
A_6	x	x	x	x	x	x	x	x	/	/
A_7	x	x	x	x	x	x	/	o	o	o
A_8	x	x	o	o	o	o	/	/	/	/
A_9	x	x	x	x	x	x	x	/	/	/
A_{10}	x	x	x	x	x	x	/	/	/	/
A_{11}	x	x	o	o	o	o	x	/	/	/
A_{12}	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_{13}	x	x	o	o	o	o	x	x	x	o
A_{14}	x	x	x	x	x	x	x	x	/	/
A_{15}	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
A_{16}	x	x	o	o	o	o	x	x	/	/
A_{17}	x	o	x	o	x	o	/	/	/	o
A_{18}	x	o	o	o	o	o	x	/	/	o
A_{19}	x	o	x	o	x	o	x	x	x	o
A_{20}	x	o	o	o	o	o	/	/	/	o
A_{21}	x	o	x	o	x	o	x	/	/	o
A_{22}	x	o	o	o	o	o	x	x	x	o
A_{23}	x	o	o	o	o	o	/	/	/	o
A_{24}	x	o	x	o	x	o	x	/	/	o
A_{25}	x	o	o	o	o	o	x	x	x	o
A_{26}	x	o	x	o	x	o	/	/	/	o
A_{27}	x	o	o	o	o	o	x	/	/	o
A_{28}	x	o	x	o	x	o	x	x	/	o
Summe	28	16	16	10	16	10	21	15	10	5

Legende:

x – entsprechende Matrix ist von Null verschieden

o – entsprechende Matrix ist identisch Null

/ – entsprechende Matrix geht nicht in das Modell ein (Beschreibung der Fälle im Text)

Wände bezüglich der SMF bzw. möglicher Modellvereinfachungen kann somit zu einer wesentlichen Senkung des Berechnungsaufwandes führen.

Tabelle 2 enthält Beispiele für Sonderfälle und eine entsprechende Auflistung der zu berechnenden Matrizen. Die Fälle I, III, V beziehen sich auf nichtsymmetrischen Wandaufbau und entsprechend anisotropes, orthotropes sowie isotropes Material. Die Fälle II, IV, VI stellen die gleichen Materialsonderfälle bei symmetrischem Wandaufbau. Die Fälle VII bis IX beziehen sich auf anisotropes Material und nichtsymmetrischen Wandaufbau sowie bestimmte Modellvereinfachungen: VII – Vernachlässigung der Längskrümmungen (und folglich der Längsbiegemomente), VIII – Vernachlässigung der Längskrümmungen und Drillungen sowie IX – Vernachlässigung von Längskrümmungen, Drillungen und Querdehnungen (erweitertes Vlasovsches Berechnungsmodell für halbmomentenfreie Stabschalen). Weitere Fälle sind denkbar (z. B. Superposition von 2 Sonderfällen – Fall X ist die Überlagerung von IV und IX). Interessant ist, daß bei der hier beschriebenen Vorgehensweise die Struktur der zu bestimmenden Matrizen der verallgemeinerten Querschnittswerte für orthotropes und isotropes Material in bestimmten Fällen übereinstimmen (sie enthalten allerdings unterschiedliche Materialkennwerte). Damit sind auch die Dgln. und die Randbedingungen für diese Fälle in ihrer Struktur identisch. Folglich können für den wichtigen Fall der Materialorthotropie mit symmetrischem Wandaufbau die bekannten Lösungsalgorithmen für das isotrope Material [9] verwendet werden.

6. Zusammenfassung und Ausblick

Die hier vorgestellte Erweiterung stellt nur eine Möglichkeit der Entwicklung neuer Stabschalenmodelle dar. Neben der Frage der geometrischen Erweiterung stehen weitere Probleme der Werkstoffmodellerweiterung zur Diskussion. Dabei sollte man sich zunächst auf folgende Fragen konzentrieren:

- Übergang zur Timoshenko-Theorie (statt der Kirchhoffschen Hypothesen),
- Einbeziehung viskoelastischer Schichten,
- eben gekrümmte Stabschalen,
- nichtprismatische Stabschalen.

Der erste Problemkreis wird besonders interessant für den Fall von relativ dünnwandigen Schichtlaminaten mit schubweichen Zwischenschichten, da bis heute keine genaueren Abschätzungen zu den Anwendungsgrenzen der Kirchhoffschen Theorie existieren [13], [19], [20]. Die zweite Fragestellung ist z. B. für die Modellierung der Schwingungsdämpfung von Interesse. Erste Erfahrungen im Rahmen von Stabschalenmodellen wurden z. B. in [21] veröffentlicht. Die Ableitung von Modellgleichungen für eben gekrümmte Stabschalenmodelle erfolgt in der Literatur unter Voraussetzung sehr unterschiedlicher Modellvereinfachungen [22] bis [30]. Auch hier stehen Abschätzungen zu den möglichen Anwendungsgrenzen jeweilige Modellvereinfachungen noch aus. Eine Erweiterung der hier vorgestellten Theorie auf schwach-nichtprismatische Stabschalen ist nach den vorliegenden Erfahrungen für isotrope Stabschalen leicht möglich [31] bis [33]. Stark-nichtprismatische Schalenmodelle können im allgemeinen nicht als Stabschalen modelliert werden. Genauere Untersuchungen zu den Modellgrenzen stehen jedoch noch aus.

LITERATUR

[1] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. Berlin: Verlag für Bauwesen, 1964 (Bd. 1), 1965 (Bd. 2).

[2] Wlassow, W. S.: Allgemeine Schalentheorie und ihre Anwendungen. Berlin: Akademie-Verlag, 1958.

[3] Altenbach, J., Kissing, W.: Verallgemeinerte Stabmodelle als Grundlage von Spannungs- und Verformungsberechnungen für dünnwandige geschlossene Konstruktionen unter statischen und thermischen Belastungen. In: Publications of the Technical University for Heavy Industry Miscolc, Series C. Mechanical Engineering. 41 (1987) 3 – 4, S. 161 – 193 (Teil 1), S. 195 – 240 (Teil 2).

[4] Schardt, R.: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie. – Berlin u. a.: Springer 1989.

[5] Altenbach, J., Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen. In: Technische Mechanik 7 (1986) 4, S. 5 – 14.

[7] Altenbach, H., Altenbach, J., Matzdorf, V.: Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen. In: Technische Mechanik 11 (1990) 1, S. 23 – 35.

[8] Altenbach, J., Matzdorf, V.: Modellieren und Berechnen anisotroper Stabschalenkonstruktionen. In: Bauplanung-Bautechnik 44 (1990) 5, S. 216 – 218.

[9] Altenbach, J., Altenbach, H., Matzdorf, V.: Die Berechnung dünnwandiger Stäbe, die aus ebenen Streifen mit symmetrischem Querschnitt bestehen. In: Mekhanika kompozitnykh materialov (1989) 4, S. 641 – 649.

[10] Altenbach, J.: Finite Element Modelling and Analysis of Thinwalled Structures. In: The Mathematics of Finite Elements and Applications VII – MAFELAP 1990 (Ed. by J. Whiteman). London et al.: Academic Press (im Druck).

[11] Wunderlich, W.: Vergleich verschiedener Approximationen der Theorie dünner Schalen (mit numerischen Beispielen). In: Techn. Wiss. Mitt. des Instituts für Konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum. 1973, Nr. 73-1.

[12] Altenbach, H.: Modellierung des Deformationsverhaltens mehrschichtiger Flächentragwerke – ein Überblick zu Forschungsrichtungen und -tendenzen. In: Wiss. Zeitschr. der TU „Otto von Guericke" Magdeburg 32 (1988) 4, S. 86 – 94.

[13] Alfutov, N. A., Zinov'ev, P. A., Popov, B. G.: Berechnung mehrschichtiger Platten und Schalen aus Kompositwerkstoffen (in Russisch). Moskau: Mashinostroenie, 1984.

[14] Vinson, J. R., Sierakowski, R. L.: The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. Dordrecht et al.: Martinus Nijhoff, 1987.

[15] Altenbach, H.: Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften. In: Wiss. Zeitschr. der TH „Otto von Guericke" Magdeburg 28 (1984) 2, S. 29 – 33.

[16] Wiedemann, J.: Leichtbau. Band 1: Elemente. Berlin u. a.: Springer-Verlag, 1986.

[17] Vasil'ev, V. V.: Einige Probleme der Schalentheorie, die mit Besonderheiten moderner Konstruktionswerkstoffe verbunden sind (in Russisch). In: Izvestiya AN SSSR. Mekh. tv. tela (1987) 5, S. 178 – 188.

[18] Obrazcov, I. F. (Herausgeber): Baumechanik für Flugapparate (in Russisch). Moskau: Mashinostroenie, 1986.

[19] Piskunov, V. P.: Nichtklassische dynamische Modelle für Schichtkonstruktionen. In: X. IKM Weimar (1984, Berichte 1, S. 24 – 27.

[20] Soldatos, K.: On the theories used for the wave propagation in laminated composite thin elastic shells. In: ZAMP 36 (1985), S. 120 – 123.

[21] Oßwald, R.: Schwingungsberechnungen an dünnwandigen, prismatischen Konstruktionen unter Berücksichtigung der Dämpfung. In: Wiss. Beiträge der TH Wismar 13 (1988) 5/II, S. 126 – 129.

[22] Altenbach, J., Garz, K.-F.: Die Berechnung von geschlossenen Kreisringträgern nach der Faltwerkstheorie. In: Wiss. Zeitschr. der TH „Otto von Guericke" Magdeburg 10 (1966) 3, S. 277 – 280.

[23] Garz, K.-F., Altenbach, J.: Methoden der Berechnung geschlossener Ringträger. In: Hebezeuge und Fördermittel 7 (1967) 3, S. 71 – 74.

[24] Dabrowski, R.: Gekrümmte dünnwandige Träger. Berlin u. a.: Springer-Verlag, 1968.

[25] Kollbrunner, C. F., Hajdin, N.: Beitrag zur Theorie dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Achse. Zürich: Verlag Leemann, 1969.

[26] Hirashima, M., Yajima, S.: Baustatischer Beitrag zu elastischen, dünnwandigen Stäben. Bull. of Science and Eng. Research Lab. Waseda Univ. No. 45 (1969), S. 121 – 133.

[27] Zhang, Sh., Lyons, L. P. R.: Thinwalled box beam finite element for curved bridge analysis. In: Comp. & Structures 15 (1984) 6, S. 1035 – 1046.

[28] Kissing, W., Schulz, J.: Grundlagen der Berechnung von Ringträgern mit dünnwandigem geschlossenen Querschnitt unter Anwendung des halbmomentenfreien Schalenmodells. In: XI. IKM Weimar (1987), Berichte 1, S. 31 – 35.

[29] Schneider, F.: Finite Elemente auf der Grundlage verallgemeinerter Vlasov-Stabmodelle und ihr Einsatz bei der statischen und dynamischen Strukturanalyse dünnwandiger Konstruktionen. Dissertationsschrift, TU Magdeburg, Fak. f. Techn. Wiss. 1989.

[30] Schulz, J., Kissing, W., Altenbach, J.: Ein erweitertes halbmomentenfreies Schalenmodell für stark gekrümmte dünnwandige Ringträger mit geschlossenem Querschnitt (in Vorbereitung).

[31] Altenbach, J., Kissing, W.: Numerische Berechnung konischer dünnwandiger geschlossener Konstruktionen. In: Schiffbauforschung 24 (1985) 1. S. 33 – 39.

[32] Zwicke, M.: Ein quasi-eindimensionales finites Element für die globale mechanische Strukturanalyse dünnwandiger, stabähnlicher Konstruktionen. Dissertationsschrift, TU Magdeburg, Fak. f. Techn. Wiss., 1987.

[33] Kissing, W., Reckziegel, P.: Nichtprismatische dünnwandige Konstruktionen und ihre rechnergestützte Untersuchung mit der halbmomentenfreien Schalentheorie. In: Schiffbauforschung 28 (1987) 4, S. 203 – 208.

Anschrift der Verfasser:
Dr.-Ing. habil. Holm Altenbach
Institut für Werkstofftechnik und -prüfung

Prof. Dr.-Ing. habil. Johannes Altenbach
Dipl.-Ing. Volker Matzdorf
Institut für Festkörpermechanik
Technische Universität „Otto von Guericke" Magdeburg
Universitätsplatz 2
D-O-3010 Magdeburg