

# Über ein verallgemeinertes Versagenskriterium der Theorie des Grenzzustandes isotroper Werkstoffe

Holm Altenbach, Jens Krause, Aleksandr Zolochovsky

*Die Formulierung von Versagenskriterien bei bestimmten Grenzzuständen (Fließen, Bruch u. a. m.) wird in der Fachliteratur zunehmend diskutiert. Dabei werden unterschiedliche theoretische Konzepte angewandt. Dazu kommen verschiedene Aspekte der Werkstofftechnik, die in den entsprechenden Festkörpermechanischen Modellen Berücksichtigung finden müssen. In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch unternommen, ein verallgemeinertes Versagenskriterium für isotrope Werkstoffe zu formulieren. Dieses beruht auf der Theorie der Grenzflächen und bezieht auch kompliziertere Werkstoffeigenschaften (z. B. unterschiedliches Verhalten beim Zug und Druck) in die Betrachtung ein.*

## On a criterion of failure in the theory of limit state for isotropic materials

*The formulation of criterions of failure for some limit (plastic flow, fracture etc.) is discussed. There are used different theoretical frameworks. Moreover, there exist some aspects of material sciences considering in the solid mechanics. In the present paper is given an attempt to formulate a general criterion of failure for isotropic materials. The criterion is based on the theory of limit surfaces. Using this approach it is possible to analyse so-called second order effects (for example, different behavior in tension and compression).*

### 0. Einleitung

Gegenwärtig werden Berechnungen zum Grenzzustand von Maschinen- und Konstruktionselementen bei zeitlich unabhängiger Kraft- oder Temperaturbeanspruchung im Rahmen der phänomenologischen Vorgehensweise, d. h. auf der Grundlage von Vorstellungen der Festkörpermechanik, realisiert. Der Beitrag der Festkörperphysik ist nicht zu unterschätzen – u. a. konnte mit ihrer Hilfe die Festigkeit zahlreicher Konstruktionswerkstoffe erhöht werden. Gleichzeitig erscheint eine Grenzzustandsanalyse von Maschinen- und Konstruktionselementen ausgehend vom atomaren Aufbau gegenwärtig unrealistisch.

Im Rahmen der klassischen Vorstellungen der Festkörpermechanik [1] bis [3] ist der Eintritt des Grenzzustandes in einer Konstruktion ein skleronomes Phänomen, welches mit dem Erreichen eines kritischen Wertes (Schwellwert) eines bestimmten Parameters verbunden ist. Dieser Parameter steht in Beziehung mit dem Spannungs- und/oder Deformationszustand. Die Schwellwertgröße ist eine Charakteristik des betrachteten Werkstoffs und wird aus einem Grundversuch (einachsiger Spannungszustand) ermittelt. Vielfach ist dies der Zugversuch. Daneben wird angenommen, daß der Grenzzustand lokalen Charakter aufweist – er wird in einem bestimmten Punkt oder charakteristischem Gebiet erreicht. Im nachfolgenden Beitrag wird ein verallgemeinertes Kriterium formuliert und diskutiert. Dabei wird gezeigt, daß dieses Kriterium bekannte klassische Kriterien enthält, wobei für diese Anwendungsempfehlungen angegeben werden können.

### 1. Formulierung eines verallgemeinerten Kriteriums für den Grenzzustand

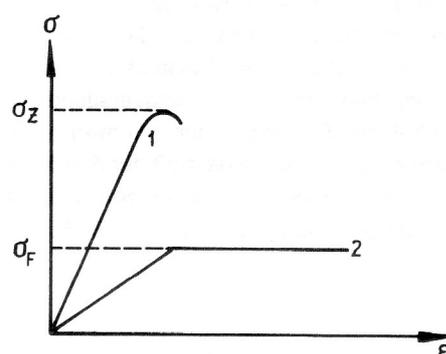
Der Grenzzustand, der in einer Konstruktion eintritt, soll zunächst mit Hilfe von experimentellen Untersuchungen an Standardprüfkörpern aus dem zu untersuchenden

Werkstoff bei einem homogenen und einachsigen Spannungszustand analysiert werden. Dabei sollten die Bedingungen für die äußere Belastung der Prüfkörper maximal den realen Betriebsbedingungen der betrachteten Konstruktionen angepaßt werden. Im Grundversuch (gewöhnlich der Zugversuch) wird das Spannungs-Verformungsdiagramm für den zu untersuchenden Werkstoff ermittelt. Die Werkstoffe lassen sich dabei mit Einschränkungen in spröde und duktile Werkstoffe einteilen. Auf dem Bild sind typische Diagramme für die Verformungen in Richtung der angreifenden Belastung dargestellt (1 – spröder Werkstoff, 2 – duktiler Werkstoff). Der Grenzzustand für einen spröden Werkstoff ist der Bruch. Dieser tritt ein, wenn in der Probe die Spannungen einen Grenzwert, der dem Bruch entspricht, erreicht. Dieser Wert kann als Zugfestigkeit  $\sigma_z$  bezeichnet werden. Mit anderen Worten – der Bruch tritt in der Probe aus sprödem Werkstoff bei Erfüllung der Bedingung

$$\sigma = \sigma_z = R_m \quad (1.1)$$

ein.  $R_m$  ist der entsprechende Werkstoffkennwert Zugfestigkeit.

Der Grenzzustand eines duktilen Werkstoffs ist durch Fließerscheinungen gekennzeichnet. Dabei kommt es zu



einer uneingeschränkten Zunahme der Deformationen bei konstanter Belastung in der Probe. Die Fließbedingung läßt sich dann wie folgt formulieren

$$\sigma = \sigma_F = R_{p0,2} \quad (1.2)$$

$R_{p0,2}$  ist die 0,2-Dehngrenze. Diese stellt einen möglichen Werkstoffkennwert für das durch Fließen gekennzeichnete Grenzverhalten dar, wobei in diesem Fall von fehlender Verfestigung ausgegangen wird. Aufgrund der Probleme bei der experimentellen Bestimmung des Fließbeginns trifft man in der Literatur [4] auch andere Kennwerte an. So wird beispielsweise für Spannstähle im Betonbau  $R_{p0,01}$  angewendet, während in amerikanischen Regelwerken auch Mittelwertbildungen aus Zugfestigkeit und 0,2-Dehngrenze bzw. bei Werkstoffen mit ausgeprägter Streckgrenze der Mittelwert aus Zugfestigkeit und Streckgrenze Anwendung findet. Die Diskussion um die Bevorzugung des einen oder anderen Kennwertes ist jedoch nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Die Bedingungen für das Erreichen des Grenzzustandes lassen sich wie folgt zusammenfassen

$$\sigma = \sigma_G \quad (1.3)$$

Dabei ist im Falle spröder Werkstoffe für  $\sigma_G$  der Wert  $\sigma_Z$  einzusetzen, für duktile Werkstoffe verwendet man  $\sigma_F$ . Natürlich ist die Einteilung in spröde und duktile Werkstoffe ziemlich formal. Exakterweise müßte nach sprödem bzw. duktilem Werkstoffzustand unterteilt werden. In Abhängigkeit von der Einwirkung äußerer Faktoren (Wärmebehandlung, Temperatur usw.) kann sich der chemischen Zusammensetzung nach identische Werkstoff im spröden bzw. im duktilen Zustand befinden.

Für isotrope Werkstoffe kann man die Gl. (1.3) für den mehrachsigen Spannungszustand verallgemeinern

$$\sigma_V = \sigma_G \quad (1.4)$$

Dabei ist die Größe  $\sigma_V$  die Vergleichs- bzw. äquivalente Spannung, die die Äquivalenz zwischen dem einachsigen und dem mehrachsigen Spannungszustand herstellt. Die Darstellung von  $\sigma_V$  ist an mehrere Forderungen gebunden. Erstens sollte die äquivalente Spannung eine Funktion des Spannungszustandes sein, wobei der Ausdruck von  $\sigma_V$  gegenüber Koordinatentransformationen invariant sein muß. Dies hat die Folge, daß die Funktion  $\sigma_V$  nur von den Invarianten des Spannungstensors abhängen darf. Zweitens sollten für isotrope Werkstoffe Konstanten im Ausdruck für  $\sigma_V$  skalare Größen sein. Drittens sollte die Fläche, die im Spannungsraum mit Hilfe von Gl. (1.4) beschrieben werden kann, nicht imaginär sein. Dabei wird an die Funktion  $\sigma_V$  die Forderung der Konvexität bezüglich der Spannungen gestellt. Viertens müssen sich die werkstoffspezifischen Kennwerte, die in den Ausdruck für  $\sigma_V$  eingehen, aus einer endlichen Anzahl von Grundversuchen ermitteln lassen, wobei die Ermittlung der Kennwerte eindeutig möglich sein muß. Und fünftens muß der Ausdruck für  $\sigma_V$  eine homogene Funktion der Spannungen sein, wobei die Gl. (1.4) im Fall des einachsigen Zustands in Gl. (1.3) übergehen soll.

Unter Beachtung der formulierten Forderungen kann man wie folgt vorgehen. Es werden zunächst drei Invarianten des Spannungstensors  $\sigma_{kl}$  eingeführt

$$I_1 = \sigma_{nn}, \quad I_2 = \sigma_{kl} \sigma_{kl}, \quad I_3 = \sigma_{kn} \sigma_{nl} \sigma_{lk} \quad (1.5)$$

In den Gln. (1.5) nehmen die Indizes die Werte 1, 2, 3 an, wobei über doppelt auftretende Indizes summiert wird. Die Gln. (1.5) lauten unter Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors ( $\sigma_{kl} = \sigma_{lk}$ )

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33},$$

$$I_2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2), \quad (1.6)$$

$$I_3 = \sigma_{11}^3 + \sigma_{22}^3 + \sigma_{33}^3 + 3[\sigma_{11}(\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2) + \sigma_{22}(\sigma_{23}^2 + \sigma_{12}^2) + \sigma_{33}(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2) + 2\sigma_{13}\sigma_{23}\sigma_{12}]$$

Weiterhin werden eine lineare, eine quadratische und eine kubische Invariante unter Einbeziehung von 6 werkstoffspezifischen Kennwerten, A, B, C, D, K, E eingeführt

$$\sigma_1 = BI_1, \quad (1.7)$$

$$\sigma_2^2 = AI_1^2 + CI_2, \quad (1.8)$$

$$\sigma_3^3 = DI_1^3 + KI_1I_2 + EI_3 \quad (1.9)$$

Bei der „Konstruktion“ der Invarianten (1.7) bis (1.9) wurden die Möglichkeiten der Berücksichtigung des Beitrags jeder der Invarianten des Spannungstensors (1.5) einbezogen. So geht die erste Invariante in jeden der Ausdrücke (1.7) bis (1.9) ein, wobei sie in der Gl. (1.9) zweifach auftritt. Die zweite Invariante wird nur in die Gln. (1.8) und (1.9) einbezogen. Die dritte Invariante tritt entsprechend nur einmal auf. Für die Vergleichspannung kann dann folgender Ausdruck gesetzt werden

$$\sigma_V = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (1.10)$$

Der hier vorgeschlagene Weg der Formulierung der Gln. (1.5), (1.7) bis (1.10) wurde bereits erfolgreich in zwei führenden Arbeiten angewendet – bei der Formulierung von Konstitutivgleichungen im Rahmen der nichtlinearen Elastizitätstheorie [5] und der Kriechtheorie [6] für isotrope Werkstoffe mit komplizierten Eigenschaften. Hier wird diese Methode auf die Analyse von Grenzzuständen von isotropen Werkstoffen ausgeweitet.

### 3. Diskussion der Grundversuche

Der vorgeschlagene Ausdruck (1.10), der auf die Gln. (1.7) bis (1.9) zurückgeht, enthält 6 werkstoffspezifische Kennwerte. Damit kann dieser Ausdruck auch als 6-Parameter-Gleichung bezeichnet werden. Daraus kann man schlußfolgern, daß 6 Grundversuche zur Ermittlung der Kennwerte notwendig sind. Der gegenwärtige Stand der Festkörpermechanik läßt es nicht als realistisch erscheinen, bei praktischen Aufgaben ein 6-Parameter-Kriterium für den Grenzzustand zu verwenden. Im Zusammenhang damit werden in der Darstellung der kubischen Invariante (1.9) zwei zusätzliche Bedingungen berücksichtigt

$$D = K = 0 \quad (2.1)$$

Damit erhält man statt Gl. (1.9) den Ausdruck

$$\sigma_3^3 = EI_3 \quad (2.2)$$

Die Einschränkungen (2.1), die das Eingehen der ersten und der zweiten Invariante in die Gl. (1.9) verhindern, sind nicht sehr groß, da diese Invarianten noch in den Gln. (1.7), (1.8) berücksichtigt werden. Durch den Erhalt des Kennwerts E und der dritten Invarianten in Gl. (1.9) kann jedoch deren Einfluß auf den Grenzzustand isotroper Werkstoffe untersucht werden. Für die weiteren Ausführungen wird folglich nur ein 4-Parameter-Kriterium des Grenzzustandes (1.4) unter Einbeziehungen der Gln. (1.7), (1.8), (1.10) und (2.2) betrachtet. Dieses Kriterium kann in folgender spezieller Form angegeben werden

$$BI_1 + \sqrt{AI_1^2 + CI_2} + \sqrt[3]{EI_3} = \sigma_G \quad (2.3)$$

Die Ermittlung der Kennwerte im vorgeschlagenen Kriterium (2.3) kann methodisch folgendermaßen geschehen. Dazu ist es notwendig, die Grundversuche für Prüfkörper aus dem zu untersuchenden Werkstoff zu analysieren. Dabei wird angenommen, daß im Prüfkörper ein homogener Spannungszustand auftritt und dieser den Grenzzustand im Werkstoff hervorruft.

\* Einachsiger Zug. Dabei ist die einzige von Null verschiedene Grenzspannung  $\sigma_{11}$ , wobei  $\sigma_{11} > 0$  ist. Als Bedingung für das Erreichen des Grenzzustandes ergibt sich

$$\sigma_{11} = \sigma_G \quad (2.4)$$

\*\* Einachsiger Druck ( $\sigma_{11} \neq 0$ ,  $\sigma_{11} < 0$ ). Wenn  $\sigma_D$  die Festigkeits- bzw. Fließgrenze bei Druck ist, gilt für den Grenzzustand

$$\sigma_{11} = -\sigma_D \quad (2.5)$$

\*\*\* Reine Torsion ( $\sigma_{12} \neq 0$ ). Wenn  $\tau_T$  die Festigkeits- bzw. Fließgrenze des Werkstoffs bei Torsion ist, erhält man in diesem Fall für den Grenzzustand

$$\sigma_{12} = \tau_T \quad (2.6)$$

\*\*\*\* Belastung einer dünnwandigen Rohrprobe (Dicke h, Radius der Mittelfläche R) mit Innendruck. Damit sind von Null verschieden die Spannungen  $\sigma_{11}$  und  $\sigma_{22}$ , wobei der Grenzzustand bei folgenden Spannungswerten erreicht wird

$$\sigma_{11} = \sigma_R/2, \sigma_{22} = \sigma_R \quad (2.7)$$

Dabei ist  $\sigma_R = pR/h$  die radiale Grenzspannung im dünnwandigen Rohr und p der Grenzwert des Innendrucks.

Jetzt wird das Kriterium (2.3) für jeden Grundversuch analysiert. Im Fall des einachsigen Zugs erhält man die Invarianten (1.6) unter Berücksichtigung der Gl. (2.4)

$$I_1 = \sigma_G, I_2 = \sigma_G^2, I_3 = \sigma_G^3 \quad (2.8)$$

Daher folgt das Kriterium (2.3) mit

$$B + \sqrt{A + C} + \sqrt[3]{E} = 1 \quad (2.9)$$

Bei einachsigem Druck folgt unter Beachtung der Gl. (2.5) aus Gl. (1.6) für die Invarianten

$$I_1 = -\sigma_D, I_2 = \sigma_D^2, I_3 = -\sigma_D^3 \quad (2.10)$$

Damit nimmt das Kriterium (2.3) den folgenden Ausdruck an

$$-B + \sqrt{A + C} - \sqrt[3]{E} = \sigma_G/\sigma_D \quad (2.11)$$

Für eine Torsion ergibt sich bei Verwendung der Gl. (2.6) für die Invarianten

$$I_1 = 0, I_2 = 2\tau_T^2, I_3 = 0 \quad (2.12)$$

Folglich ergibt sich für das Grenzzustandskriterium (2.3)

$$2C = \sigma_G/\tau_T \quad (2.13)$$

Für das vierte Experiment ergeben sich die Invarianten (1.6) unter Einbeziehung der Gl. (2.7) in der Form

$$I_1 = (3/2)\sigma_R, I_2 = (5/4)\sigma_R^2, I_3 = (9/8)\sigma_R^3 \quad (2.14)$$

Damit erhält man für das Kriterium (2.3)

$$(3/2)B + \sqrt{(9/4)A + (5/4)C} + \sqrt[3]{9E/2} = \sigma_G/\sigma_R \quad (2.15)$$

Damit stehen 4 Gln. (2.9), (2.11), (2.13) und (2.15) zur Ermittlung der zu bestimmenden werkstoffspezifischen Kennwerte A, B, C und E zur Verfügung. Nach einigen Umformungen erhält man

$$\begin{aligned} C &= \sigma_G^2/(2\tau_T^2), \\ A &= (1 + \sigma_G/\sigma_D)^2/4 - \sigma_G^2/(2\tau_T^2), \\ \sqrt[3]{E} &= [3(1 - \sigma_G/\sigma_D)/2 - 2\sigma_G/\sigma_R] / (3 - \sqrt[3]{9}), \\ &+ \sqrt{9(1 + \sigma_G/\sigma_D)^2/4 - 2\sigma_G^2/\tau_T^2} / (3 - \sqrt[3]{9}), \\ B &= (1 - \sigma_G/\sigma_D)/2 - [3(1 - \sigma_G/\sigma_D)/2 - 2\sigma_G/\sigma_R] \\ &+ \sqrt{9(1 + \sigma_G/\sigma_D)^2/4 - 2\sigma_G^2/\tau_T^2} / (3 - \sqrt[3]{9}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

### 3. Sonderfälle des Grenzzustandskriteriums

Das vorgeschlagene Kriterium (2.3) stellt ein verallgemeinertes Kriterium für den Grenzzustand isotroper Werkstoffe dar. Nachfolgend wird gezeigt, daß aus diesem Kriterium verschiedene spezielle Kriterien folgen (darunter auch aus der Literatur bekannte), die eine geringere Anzahl von Parametern enthalten.

#### 3.1. Ein-Parameter-Kriterium nach von Mises

Von Mises schlug folgendes Kriterium für den Grenzzustand vor [7]

$$\sigma_I = \sigma_G \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\sigma_I = [(3/2)s_{kl}s_{kl}]^{1/2}$  die Spannungsintensität,  $s_{kl} = \sigma_{kl} - (1/3)\delta_{kl}$  sind die Komponenten des Deviators des Spannungstensors, und  $\delta_{kl}$  stellt das Kronecker-Symbol dar. Der Vergleich des von-Mises-Kriteriums (3.1) mit dem Kriterium (2.3) liefert

$$B = E = 0, A = -1/2, C = 3/2 \quad (3.2)$$

Nach Einsetzen der ermittelten Werte (3.2) in die Gln. (2.16) ergeben sich Beziehungen für die Grenzwerte in den Grundversuchen

$$\sigma_G/\sigma_D = 1, \sigma_G/\tau_T = \sqrt{3}, \sigma_G/\sigma_R = \sqrt{3}/2 \quad (3.3)$$

Folglich kann man das von-Mises-Kriterium nur dann verwenden, wenn in den Grundversuchen die Beziehungen (3.3) ermittelt werden. Damit kann man die Beziehungen (3.3) auch als Empfehlung zur praktischen Anwendung des von-Mises-Kriteriums ansehen.

### 3.2. Zwei-Parameter-Kriterien

Nachfolgend werden Kriterien betrachtet, die zwei Parameter enthalten. Deren Ermittlung erfordert die Durchführung von zwei Grundversuchen. Ein erstes Grenzzustandskriterium läßt sich in folgender Form angeben

$$0.5(1 - \chi)I_1 + 0.5(1 + \chi)\sigma_I = \sigma_G \quad (3.4)$$

Dabei gilt  $\chi = \sigma_G/\sigma_D$ . Die Gl. (3.4) wurde zuerst von Nadai [8] vorgeschlagen. Von Prager und Drucker wurde später ein Kriterium vorgeschlagen [9], welches folgende Form hat

$$bI_1 + a\sigma_I = \sigma_G \quad (3.5)$$

Der Vergleich der Gln. (3.4) und (3.5) liefert

$$b = (1 - \chi)/2, \quad a = (1 + \chi)/2, \quad (3.6)$$

folglich stimmt das Kriterium (3.5) mit dem Nadaischen Kriterium (3.4) überein. Um die Eindeutigkeit der weiteren Überlegungen zu sichern, wird hier nur auf das Kriterium (3.4) eingegangen. Dieses folgt ebenfalls als Sonderfall des verallgemeinerten Kriteriums (2.3). Dabei sind folgende Beziehungen einzuhalten

$$B = (1 - \chi)/2, \quad E = 0, \quad C = 3(1 + \chi)^2/8, \quad A = -(1 + \chi)^2/8 \quad (3.7)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (3.7) in die linken Seiten der Gl. (2.16) erhält man durch Auflösung des entsprechenden Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sigma_G/\tau_T &= \sqrt{3}(1 + \chi)/2, \\ \sigma_G/\sigma_R &= \sqrt{3}(1 + \chi)/4 + 3(1 - \chi)/4 \end{aligned} \quad (3.8)$$

In den Gln. (3.8) tritt  $\chi = \sigma_G/\sigma_D$  als eine gegebene Zahl auf, die aus experimentellen Daten folgt. Damit basiert das Kriterium (3.4) auf zwei Grundversuchen: einachsiger Zug und einachsiger Druck. Die Ergebnisse der anderen Versuche (reine Torsion und Belastung einer dünnwandigen Rohrprobe durch Druck) müssen dabei den Bedingungen (3.8) genügen. Damit stellen die Gln. (3.8) praktische Anwendungsempfehlungen für das Kriterium (3.4) dar. Ein weiteres Kriterium mit zwei Parametern kann folgendermaßen angegeben werden. Setzt man in Gl. (2.3)

$$B = E = 0, \quad (3.9)$$

ergibt sich

$$\sqrt{AI_1^2 + CI_2} - \sigma_G = 0 \quad (3.10)$$

Unter Verwendung der Gln. (2.16) und der Werte für die Kennwerte (3.9) erhält man

$$\sigma_G/\sigma_D = 1, \quad \sigma_G/\sigma_R = \sqrt{9/4 - \sigma_G^2/(2\tau_T^2)} \quad (3.11)$$

Damit verwendet das Kriterium (3.9) Daten der Experimente zum einachsigen Zug und zur reinen Torsion. Die Daten der anderen Experimente müssen die Bedingungen (3.11) erfüllen, d. h., die Gln. (3.11) definieren die Anwendungsgrenzen des Kriteriums (3.10). U. a. folgt damit, daß das Kriterium (3.10) nicht für isotrope Werkstoffe verwendet werden kann, die unterschiedliche Festigkeitsgrenzen bzw. Fließgrenzen bei Zug und Druck aufweisen.

### 3.3. Drei-Parameter-Kriterien

Für Drei-Parameter-Kriterien ist zu berücksichtigen, daß dazu die Versuchsdaten von drei Grundversuchen vorliegen müssen.

Setzt man in Gl. (2.3)

$$E = 0 \quad (3.12)$$

folgt das Kriterium

$$BI_1 + \sqrt{AI_1^2 + CI_2} = \sigma_G \quad (3.13)$$

Nach Einsetzen der Gl. (3.12) in die Gln. (2.16) ergibt sich

$$\sigma_G/\sigma_R = 3(1 - \chi)/4 + \sqrt{9(1 + \chi)^2/16 - \Psi^2/2} \quad (3.14)$$

mit  $\chi = \sigma_G/\sigma_D$  und  $\Psi = \sigma_G/\tau_T$  als gegebenen Zahlenwerten. Das Kriterium (3.13) basiert auf den Grundversuchen einachsiger Zug, einachsiger Druck und reine Torsion. Dabei muß der Grenzwert der Radialspannung in den mit Innendruck belasteten dünnwandigen Rohrproben die Beziehung (3.14) erfüllen. Die Gl. (3.14) ist damit die Anwendungsempfehlung für das Kriterium (3.13).

Ein weiteres Drei-Parameter-Kriterium läßt sich mit folgender Formel beschreiben

$$\sqrt{AI_1^2 + CI_2} = \sqrt[3]{EI_3} = \sigma_G \quad (3.15)$$

Die Gl. (3.15) folgt aus dem Kriterium (2.3) für

$$B = 0 \quad (3.16)$$

Damit ergibt sich aus den Gln. (2.16) die Bedingung

$$\sigma_G/\sigma_R = \sqrt[3]{9(1 - \chi)/4 + \sqrt{9(1 + \chi)^2/16 - \Psi^2/2}} \quad (3.17)$$

Für das Kriterium (3.15) werden folglich Daten aus den Versuchen zum einachsigen Zug, zum einachsigen Druck und zur reinen Torsion benötigt. Die Gl. (3.17) stellt die entsprechende Anwendungsempfehlung dar. Die Ergebnisse der Diskussion zu den Sonderfällen des allgemeinen Kriteriums (2.3) sind in der Tabelle zusammengefaßt.

Spezialfälle für Kriterien des Grenzzustandes, die aus dem allgemeinen Kriterium (2.3) folgen

Kriterium	Äquivalente Spannung	Werte für die Konstanten					Anwendungshinweise		
		B	A	C	E	$\sigma_G/\sigma_D$	$\sigma_G/\tau_T$	$\sigma_G/\sigma_R$	
Ein-Parameter-Kriterium nach von Mises									
3.1	$\sigma$	0	-1/2	3/2	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/2$	
Zwei-Parameter-Kriterien									
3.4	$1/2(1-\chi)I_1 + 1/2(1+\chi)\sigma_I$	$(1-\chi)/2$	$-(1+\chi)^2/8$	$3/8(1+\chi)^2$	0	$\chi$	$\sqrt{3}/2(1+\chi)$	$\sqrt{3}/4(1+\chi) + 3/4(1-\chi)$	
3.10	$\sqrt{AI_1^2 + CI_2}$	0	A	C	0	1	$\Psi$	$\sqrt{9/4 - \Psi^2/2}$	
Drei-Parameter-Kriterien									
3.13	$BI_1 + \sqrt{AI_1^2 + CI_2}$	B	A	C	0	$\chi$	$\Psi$	$3/4(1-\chi) + \sqrt{9/16(1+\chi)^2 - 1/2\Psi^2}$	
3.15	$\sqrt{AI_1^2 + CI_2} = \sqrt[3]{EI_3}$	0	A	C	E	$\chi$	$\Psi$	$\sqrt[3]{9/4(1-\chi) + \sqrt{9/16(1+\chi)^2 - 1/2\Psi^2}}$	

## 4. Zusammenfassung

Für jedes der betrachteten Kriterien des Grenzzustandes konnten entsprechende Bedingungen für deren Anwendung definiert werden. Wenn man dabei feststellt, daß aufgrund der Daten der Grundversuche kein spezielles Kriterium angewendet werden kann, muß das verallgemeinerte Vier-Parameter-Kriterium des Grenzzustands in der Form der Gl. (2.3) herangezogen werden. Zur experimentellen Begründung des Kriteriums (2.3) können beispielsweise Daten von einachsigen Zugversuchen in Hochdruckkammern verwendet werden. Dabei ist proportionale Belastung und Halten der Belastung bis zum Eintritt des Grenzzustandes bei einem konstanten Verhältnis von auf die Probe wirkender Längskraft zum hydrostatischen Druck zugelassen. Von Interesse ist daher die Gegenüberstellung von theoretischen Ergebnissen im Rahmen des Kriteriums (2.3) mit experimentellen Daten aus Versuchen, bei denen folgende Spannungen realisiert werden

$$* \quad \sigma_{11} = 2\sigma_*/3, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\sigma_*/3 \quad (4.1)$$

Damit ergibt sich unter Anwendung der ersten Beziehung aus (1.6), daß die erste Invariante verschwindet, d. h.

$$I_1 = 0 \quad (4.2)$$

$$** \quad \sigma_{11} = \sigma_{**}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = -\sigma_{**}/\sqrt{2} \quad (4.3)$$

In diesem Fall erhält man, daß die dritte Invariante verschwindet, d. h.

$$I_3 = 0 \quad (4.4)$$

Der hier aufgezeigte Vergleich von theoretischen und experimentellen Ergebnissen gestattet entweder die Begründung eines Vier-Parameter-Kriteriums des Grenzzustandes in der Form der Gl. (2.3), welches die Annahmen (2.1) verwendet, oder erfordert die Anwendung des Kriteriums (1.4) auf der Grundlage der Vergleichsspannung (1.10) und der Darstellung (1.9) mit einer größeren Anzahl von Parametern [im Vergleich zur Gl. (2.2)].

Untersuchungen zu verallgemeinerten Versagenskriterien sind von großer praktischer Bedeutung. Zur Diskussion um diese Fragen sei an dieser Stelle nur auf [10] verwiesen.

### Danksagung

Diese Arbeit stellt die Fortsetzung eines Zyklus von Arbeiten [5], [11] im Rahmen der Zusammenarbeit zwischen der Technischen Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg und dem Polytechnischen Institut Charkow dar. Sie entstand während der Gastlehrtätigkeit von Doz. Dr. Zolochovsky im Herbst 1990. Die Autoren sind der TU Magdeburg für die finanzielle Unterstützung zu Dank verpflichtet.

Für die unterstützenden Diskussionen zu den werkstoffwissenschaftlichen Aspekten möchten sich die Autoren bei Dr. G. Dehne (Institut für Werkstofftechnik und -prüfung der TU Magdeburg) bedanken.

## LITERATUR

- [1] Sähn, S., Göldner, H.: Bruch- und Beurteilungskriterien in der Festigkeitslehre. Fachbuchverlag Leipzig 1989.
- [2] Chen, W. F., Han, D. J.: Plasticity for Structural Engineers. u. a.: Springer-Verlag New York 1988.
- [3] Macherauch, E., Kloos, K. H.: Bewertung von Eigenspannungen bei quasistatischer und schwingender Werkstoffbeanspruchung. Teil I – III. In: Materialwissenschaft und Werkstofftechnik. Weinheim 20 (1989) 1. S. 1 – 13; 2. – S. 53 – 60; 3. – S. 82 – 91.
- [4] Blumenauer, H., Pusch, G.: Technische Bruchmechanik. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig 1982.
- [5] Altenbach, H., Dankert, M., Zolochovskij, A. A.: Konstitutive Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf der Grundlage von 3 Invarianten des Spannungstensors. In: Technische Mechanik 10(1989)4 Magdeburg, S. 211 – 217.
- [6] Zolochovskij, A. A.: Kriechen von Konstruktionselementen aus Materialien mit von der Belastung abhängigen Charakteristiken. In: Technische Mechanik 9 (1988) 3 Magdeburg, S. 177 – 184.
- [7] Mises, R. v.: Mechanik des festen Körpers im plastischen deformierbaren Zustand. In: Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften Göttingen. Göttingen, 1913.
- [8] Nadai, A.: Theory of Flow and Fracture of Solids. McGraw-Hill New York 1950.
- [9] Drucker, D. C., Prager, W.: Soil mechanics and plastic analysis or limit design. In: Quart. Appl. Math. 10(1952)2. Cambridge, p. 157 – 165.
- [10] Merten, C.: Zur Anwendung eines FEM-Postprozessors „Festigkeits- und Lebensdauerbewertung“ für hochbeanspruchte Bauteile. In: Technische Mechanik 11 (1990) 3. Magdeburg, S. 143 – 151.
- [11] Altenbach, H., Dankert, M., Zolochovskij, A. A.: Anisotrope mathematisch-mechanische Modelle für Werkstoffe mit von der Belastung abhängigen Eigenschaften. In: Technische Mechanik 11 (1990) 1. Magdeburg, S. 5 – 13.

### Anschrift der Verfasser:

Dr.-Ing. habil. H. Altenbach  
Institut für Werkstofftechnik und -prüfung,

Jens Krause  
Institut für Festkörpermechanik  
Technische Universität „Otto von Guericke“ Magdeburg,  
Universitätsplatz 2,  
D-O-3010 Magdeburg

Dozent Dr. A. A. Zolochovsky  
Lehrstuhl für Dynamik und Festigkeit von Maschinen,  
Polytechnisches Institut Charkow  
ul. Frunse 21,  
SU-310002 Charkow-2