

Inkrementelle Finite-Elemente Modellierung des 2D-Kontaktproblems¹⁾

Johannes Altenbach, Ryszard Buczkowski

Im Beitrag wird eine inkrementelle Finite-Elemente-Berechnung für statische, ebene und axialsymmetrische Kontaktaufgaben unter Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften an der Kontaktzone dargestellt. Zur Modellierung der nichtlinearen Eigenschaften an der Kontaktzone wird ein Kontaktfederelement verwendet, dessen Steifigkeitsmatrix aus den experimentell ermittelten Kennwerten der Kontaktzone berechnet werden kann.

Das Verhalten (Belastung und Entlastung) in normaler Richtung wird durch eine Potenzgleichung beschrieben. Die funktionale Abhängigkeit der Schubspannungen und der tangentialen Verschiebungen wird durch zwei lineare Abschnitte (ein elastischer und ein plastischer Bereich) approximiert.

Zur Begrenzung der tangentialen Kontaktkräfte wird in der Berührungsfläche ein oberflächenverfestigendes Reibungsgesetz nach Fredriksson eingeführt.

Anhand ausgewählter Beispiele wird durch Vergleich mit Ergebnissen für Kontaktflächen ohne Rauigkeit und Coulombscher Reibung der Einfluß der Oberflächenrauigkeitsparameter bewertet.

Incremental Finite Element Modelling of 2D Contact Problems

The paper presents an incremental finite element analysis for static two-dimensional and axisymmetrical contact problems considering the influence of the nonlinear properties of the contact zone. For modelling the contact zone, a discrete spring contact element is used. The analysis of the stiffness matrix of the contact element using the experimentally determined characteristics of the contact zone.

The contact behaviour in normal direction is described by a power equation. To limit the tangential forces a friction law of Fredriksson is introduced.

The influence of surface roughness is evaluated by comparing the results for contact surfaces without roughness and with Coulomb's friction for selected examples.

1. Einleitung

Bei der Kontaktanalyse von Körpern, deren Oberflächen beliebig gestaltet werden, bzw. bei denen nichtlineare, physikalische und geometrische Eigenschaften berücksichtigt werden, die in der Kontaktzone auftreten, wird in zunehmendem Maße die Methode der finiten Elemente (FEM) benutzt.

Reibungsbehaftete Kontaktprobleme lassen sich als Variationsungleichungen formulieren, die mit Hilfe nichtlinearer Optimierungsverfahren gelöst werden können. Es sind hier die quadratische Programmierung [Chand u. a., 1976; Paczelt, 1976; Fredriksson u. a., 1977; Panagiotopoulos, 1975; Lee und Kwak, 1989], die lineare Optimierung (Simplexmethode) [Fischer u. a. 1988, Hoyer, 1989], lineare Komplementaritätsprogrammierung [Klarbring 1984; 1986], Klarbring und Björkmann, [1988], die Regularisierungsmethode (mit Einführung spezieller differenzierbarer Funktionale) [Kikuchi 1982; Oden und Pires, 1983; Pires und Oden, 1983; Campos u. a., 1982] und Barriere-Methoden [Oden und Kim, 1981] zu nennen.

Die Anwendung der Variationsungleichungen in der Kontaktmechanik erfolgte in letzter Zeit vor allem durch Kalker [1977]; Oden und Pires [1984]; Hlavacek, u. a., [1988]; Panagiotopoulos, [1985], Telega [1988] und Skalski [1988] (elastisch-plastische Kontaktprobleme). Die Existenz einer Lösung mit Hilfe der Variationsformulierung für Kontaktprobleme mit einem nichtlinearen Reibungsgesetz wurde von Rabier u. a. [1986] gezeigt.

Bei der Behandlung der Zwangsbedingungen, die meist in der Form von Ungleichungen für die Spannungen und Verschiebungen an der Kontaktzone gegeben sind, lassen sich folgende Lösungsmethoden anwenden: die klassische Multiplikatoren-Methoden nach Lagrange [Chandhary und Bathe, 1986; Idelberger, 1985], Straf- oder Penalty Methode [Kikuchi und Song, 1981; Hallquist u. a., 1985; Cheng und Kikuchi, 1985a, 1985b; Simo u. a., 1986] und die Kombination der Lagrangefunktion durch Erweiterung um einen „Penalty-Term“, die sog. Augmented Lagrange-Methode [Wriggers, Simo und Taylor, 1985; Bischoff, Plank und Stein, 1987; Wriggers, Wagner, Stein, 1987].

Die Verschiebungsgrößen-Methode der finiten Elemente basiert auf dem Prinzip vom Minimum des gesamten Potentials. Andere Formulierungen, wie z. B. gemischte oder hybride Finite Elemente zur Lösung der zweidimensionalen Kontaktprobleme, basieren einerseits auf der „perturbed Lagrangian“ Formulierung [Simo, Wriggers und Taylor, 1984; Wriggers und Simo [1985], Stein, Wagner und Wriggers [1986]; Lu und Taylor, [1988] und Shyu, Chang und Saleeb, [1989] oder andererseits auf der Modifikation des Prinzips von Hellinger-Reissner [Paczelt, 1988], Heyliger und Reddy [1987] bzw. auf der von Pian vorgeschlagenen Modifikation des erweiterten Funktionals für die Komplementärenergie [Paczelt, 1983; Desai und Sargand, 1984].

1) Herrn Prof. Dr.-Ing. Erwin Stein zum 60. Geburtstag gewidmet.

Ausgehend von Aufgaben der Geomechanik wurden von Goodmen, Taylor, Brekke [1968] und von Ghaboussi, Wilson, Isenberg [1973] andererseits Methoden entwickelt, bei denen in der Kontaktfläche fiktive (unendlich dünne) Linien- oder Flächenkontaktelemente angenommen werden. Diese Kontaktelemente wurden letzters u. a. von Desai u. a. [1984], Beer [1985], Desai und Nagaraj [1986], Eger und Altenbach [1989] und Altenbach, Eger und Paczelt [1990] betrachtet. Die Kontaktelemente werden wie Standard-Finite-Elemente interpretiert. Mit Hilfe dieser Kontaktelemente ist es möglich, nichtumkehrbare und nichtlineare Erscheinungen an der Kontaktzone wie z. B. die Reibungsprozesse bzw. Oberflächenrauigkeit zu simulieren. Die Anwendung spezieller Kontaktelemente in der Kontaktmechanik für Körper und Metall und eine Wertung der verschiedenen mathematischen Modelle beider Lösungen von 2D-Kontaktaufgaben wurden in der Arbeit von Buczkowski und Altenbach [1989] ausführlich erörtert. Dort ist ebenfalls auf weitere Literatur verwiesen.

Von den Arbeiten, die in den letzten Jahren veröffentlicht wurden, sollen die Beiträge von Gläser, Drey und Dudek [1987], Gläser [1989] (große elastisch-plastische Deformationen, 2D-Problem), Wriggers [1987; 1988] (elastisch-plastisches Reibungsgesetz, große Deformationen, 2D-Kontaktprobleme, lineare Penalty-Formulierung), Parisch [1989] (Penalty und Lagrange Formulierung, große Deformationen, 3D-reibungsfreies Kontaktproblem) und die Arbeit von Wriggers, Vu-Van und Stein [1990] (große Deformationen, 2D-Stoßprobleme, nichtlineares Verhalten in der Normalrichtung, lineares Verhalten in der tangentialen Richtung) genannt werden.

Der aktuelle Stand der theoretischen Kenntnisse für die Beurteilung der verschiedenen Modelle in der Kontaktmechanik mittels der numerischen Methoden ist 1988 im Journal de Mecanique Theoretique et Applique (vol. 7, Numero Spezial) angegeben worden.

2. Mechanisches Verhalten in der Kontaktzone

Während der mechanischen Bearbeitung von Werkstoffen entsteht an ihren Oberflächen eine sogenannte technologische Rauigkeit (die Rauheit und die Welligkeit). Bei Berücksichtigung zweier realer Festkörperoberflächen erfolgt somit kein gleichmäßiger Kontakt zwischen beiden Oberflächen. Nur einzelne Oberflächenbereiche übertragen die auf die Körper wirkenden Kräfte.

Eine der Methoden, um den Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf die Spannungsverteilung und die Verformungen in der Kontaktzone zu berücksichtigen, beruht auf einer Modellierung der Oberflächenrauigkeit durch experimentelle Identifikation. Zuerst werden die experimentellen Charakteristiken zwischen Verschiebungen und Belastungen in den real belasteten Preßflächen ermittelt und dann die mechanischen Charakteristiken mit einfachen mathematischen Gleichungen beschrieben.

Die experimentellen Untersuchungen [vgl. Buczkowski und Altenbach, 1989] weisen auf den nichtlinearen Charakter der Verformungen der Rauigkeitsspitzen infolge der Werkstoffbeanspruchung (Bild 1) hin.

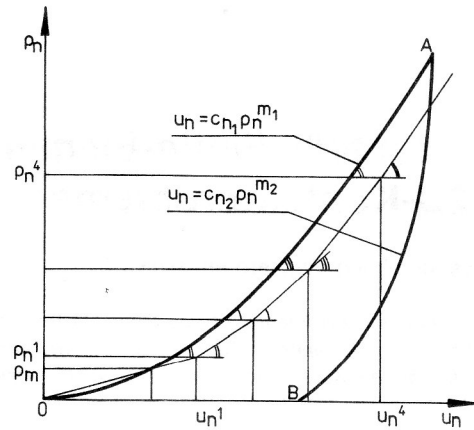


Bild 1

Das Verhalten der Kontaktzone in Richtung der Normalen
OA – Belastungszweig
AB – Entlastungszweig

In der Literatur beschreibt man das Verhalten (Belastung, die Kurve OA, und Entlastung, die Kurve AB, vgl. Bild 1) in der normalen Richtung durch die Gln. (2.1a) und (2.1b):

1. Belastungsfall [Sokolovski, 1946, s. Oden und Martins, 1985], wenn:

$$|\Delta u_n^{(1)} + \sum_{i=2}^j \Delta u_n^{(i)}| > |\Delta u_n^{(j)} + \sum_{i=2}^{j-1} \Delta u_n^{(i)}|$$

$$u_n = c_{n1} p_n^{m1} \quad (2.1a)$$

2. Entlastungsfall [Grudziński, Kawiak, Konowalski, 1989], wenn:

$$|\Delta u_n^{(1)} + \sum_{i=2}^j \Delta u_n^{(i)}| < |\Delta u_n^{(j)} + \sum_{i=2}^{j-1} \Delta u_n^{(i)}|$$

$$u_n = c_{n2} p_n^{m2} \quad (2.1b)$$

u_n – relative Verschiebung in Normalenrichtung (Annäherung der Kontaktfläche beider Proben)

p_n – normale Kontaktspannung,

c_{n1}, m_1, c_{n2}, m_2 – Parameter, die von den Werkstoffeigenschaften und der Oberflächenbearbeitung abhängig sind²⁾,

$i-1, i$ – Nummer des Lastinkrementses.

Das Verhalten in tangentialer Richtung zeigt einen nichtlinearen, elastisch-plastischen Charakter (Bild 2).

Die funktionale Abhängigkeit der Schubspannungen p_T und der tangentialen Verschiebungen u_T wurde von Reshetov und Kirsanova [1970] durch zwei lineare Abschnitte wie folgt approximiert (Bild 2):

$$u_T = c_{T1} p_T + c_{T2} p_T \quad (2.2)$$

Es gilt im elastischen Bereich:

$$u_T = c_{T1} p_T = (k_T^e)^{-1} p_T \quad \text{für} \quad (2.3)$$

$$0 \leq p_T \leq p_{T1} = 0.625\mu |p_n|$$

- 2) Zur Vereinfachung der Beschreibung wird weiter auf die unteren Indizes verzichtet.

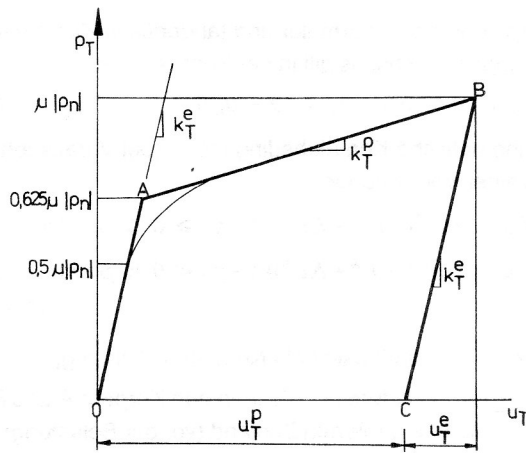


Bild 2
Das Verhalten der Kontaktzone in Richtung der Tangente
OA – Belastungszweig, elastischer Bereich
AB – Belastungszweig, plastischer Bereich
BC – Entlastungszweig

und im plastischen Bereich:

$$u_T = c_{T2} p_T = (k_T^p)^{-1} p_T \quad \text{für} \quad (2.4)$$

$$0.625\mu |p_n| \leq p_T \leq \mu |p_n|$$

und bei Berücksichtigung von (2.2 bis 2.4) erhält man

$$u_T = \begin{cases} (k_T^e)^{-1} p_T & \text{für } 0 \leq p_T \leq p_{T1} = 0.625\mu |p_n| \\ (k_T^e)^{-1} p_{T1} + (k_T^p)^{-1} (p_T - p_{T1}) & \text{für } p_{T1} \leq p_T \leq \mu |p_n| \end{cases} \quad (2.5)$$

Dabei sind u_T und u_T^e – die relative gesamte und die elastische Verschiebungen beider Körper,

k_T^e – ist die tangentielle Kontaktsteifigkeit im elastischen Bereich,

k_T^p – ist die tangentielle Kontaktsteifigkeit im plastischen Bereich.

Nach der Arbeit von Reshetov und Kirsanova [1970] wurde angenommen, daß

$$k_T^p \cong (1/25 \dots 1/20) k_T^e \quad (2.6)$$

Aufgrund experimenteller Untersuchungen (vgl. Buczkowski und Altenbach, 1989) gibt man an, daß die Abhängigkeit zwischen tangentialer Kontaktsteifigkeit k_T^e und p_n für elastischen Bereich durch

$$k_T^e = \frac{(p_n)^S}{R} \quad (2.7)$$

berechnet werden kann, wobei S ein Parameter ist, der vom Werkstoff und der Oberflächenfertigung der Reibpaarung abhängt. Für die in Gln. (2.1a) und (2.7) enthaltenen Parameter c_n , m und S sind z. B. von Back, Burdekin, Cowley [1972] und Levina und Reshetov [1971] Werte angegeben.

Der Parameter R kann mit Hilfe der Gl. (2.8) [Back u. a., 1973]

$$R = 2c_n m(1 + \nu) \quad (2.8)$$

berechnet werden, wobei ν – die Poissonsche Konstante des Materials ist.

2.1. Reibungsgesetz

Zur Begrenzung der tangentialen Kräfte in der Kontaktzone wird ein generalisiertes Coulombsches Reibungsgesetz eingeführt. Dieses Gesetz wird durch folgendes Gleitkriterium

$$f(p_T, p_n, u_T^p) = \|p_T\| + \mu(u_T^p) p_n, \quad p_n < 0,$$

ausgedrückt, in dem der Gleitmodul (Reibungskoeffizient) $\mu(u_T^p)$ vom effektiven Gleiten $\|u_T^p\|$ abhängt (dies wird näher im Punkt 2.1.1. beschrieben), und $\|\cdot\|$ die Norm ist.

2.1.1. Reibungskoeffizient

Aus den experimentellen Untersuchungen ist bekannt, daß der Reibungskoeffizient μ nicht konstant ist und u. a. von der Belastung und der Oberflächenrauigkeit abhängig ist.

In der vorliegenden Arbeit wird eine härtende (oberflächenverfestigende) Reibung eingeführt.

Nach Fredriksson [1975] wurde angenommen, daß der Reibungskoeffizient vom sog. effektiven Gleiten v_e der Kontaktzone (in unserem Fall entspricht dem effektiven Gleiten v_e die plastische, relative Verschiebung u_T^p) abhängt:

$$\mu(u_T^p)^{[i]} = \mu_m (1 - (1 + \beta) \exp(-n(\Delta u_T^{p[i]} + \sum_{j=1}^{i-1} \Delta u_T^{p[j]}))) \quad (2.9)$$

μ_m – ist der makroskopische (maximale) Reibungskoeffizient,

β – definiert den anfänglichen Reibungskoeffizienten,

n – Verfestigungsgrad in [1/mm],

u_T^p – relative plastische Verschiebung beider Körper in tangentialer Richtung,

Δu_T^p – plastischer Verschiebungsincrement in tangentialer Richtung,

i – Zahl der Lastinkremente.

In diesem Modell wird der Reibungskoeffizient im i -ten Lastinkrement aus dem $(i-1)$ -ten, vorhergehenden Lastinkremente bestimmt. Die direkte Berechnung des Reibungskoeffizienten für das i -te Lastinkrement ist mit der Anwendung eines zusätzlichen Iterationsprozesses verbunden. Die vorgenommene Vereinfachung hat jedoch keinen Einfluß auf erhaltene Ergebnisse. Diese Bemerkung wurde auch in der Arbeit von Adamczyk und Burczyński [1986] bestätigt.

3. Formulierung des Kontaktproblems

Bild 3 zeigt zwei elastische Körper, die sich im Kontaktzustand befinden. Die beiden Körper haben eine gemeinsame Oberfläche Γ_c . In der Kontaktzone wird ein lokales Koordinatensystem t, n eingetragen. Das lokale Koordinatensystem ist mit dem „unteren“ Körper (Körper B) verbunden, dabei wird die Achse n über einen Einheitsvektor \bar{n} zu Γ_c bezeichnet. V^A und V^B sind die Volumina der elastischen Körper A und B und Γ^A und Γ^B die dazu gehörenden Oberflächen. Die äußeren Belastungen sind als Druckverteilung q_i auf der Teilfläche Γ_{q_i} , als Volumenkräfte p und als

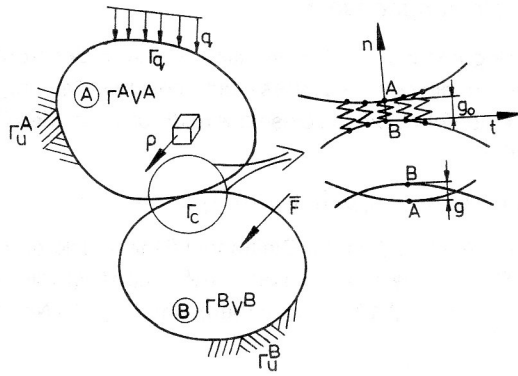


Bild 3

Schematische Darstellung eines Kontaktes zweier rauher Körper:
 n, t – lokale Koordinaten,
 $V = V^A \cup V^B$ – Volumen der Körper A und B,
 $\Gamma = \Gamma_u^A \cup \Gamma_u^B$ – Oberfläche mit vorgegebenen Verschiebungen,
 Γ_q – Oberfläche mit vorgegebenen Kräften,
 Γ_c – mögliche, gemeinsame Kontaktfläche,
 g_o – Spaltbreite,
 g – Durchdringung des Körpers A in den Körper B

Einzelkräfte F_i vorgegeben. Für die Teilbereiche Γ_u^A und Γ_u^B sind Verschiebungsrandbedingungen vorgeschrieben. Der Vektor der Verschiebungen wird mit u bezeichnet. Die Körper wirken durch eine nichtlineare elastische Zwischenschicht aufeinander. Diese Zwischenschicht besteht aus fiktiven, unabhängigen Federn mit den Eigenschaften einer Winklerbettung. Zwischen beiden Körpern kann auch Spiel in Normalenrichtung auftreten. Die genaue Beschreibung dieses Kontaktfederelementes kann man in der Arbeit von Buczkowski und Altenbach [1989] finden.

3.1. FEM-Formulierung in inkrementaler Form

Für elastische Probleme gelten folgende Bezeichnungen in inkrementaler Form:

- statisches Gleichgewicht

$$D^T d\bar{\sigma} + d\bar{p} = 0 \quad \text{in } V^A \cup V^B \quad (3.1)$$

wo: D – Differentialmatrix (s. Altenbach und Sacharov, 1982, S. 22), p – Vektor der Volumenkräfte,

- kinematische Gleichungen

$$d\bar{\varepsilon} = D d\bar{u} \quad \text{in } V^A \cup V^B \quad (3.2)$$

- Verschiebungsrandbedingungen

$$du_i = d\bar{u}_i \quad \text{in } \Gamma_u^A \cup \Gamma_u^B \quad (3.3)$$

- Materialgleichungen (Stoffgesetz)

$$d\bar{\sigma} = E d\bar{\varepsilon} \quad \text{in } V^A \cup V^B \quad (3.4)$$

wo: E – Elastizitätsmatrix,
 $\bar{\varepsilon}$ – Der Vektor der Verzerrungen,
 u – Der Vektor der Verschiebungen,

- Spannungsbedingungen

$$d\sigma_{ij}(u)n_j = dq_i(u) \quad \text{in } \Gamma_q \quad (3.5)$$

$$\left. \begin{aligned} d\rho_n(u) &= d\sigma_{ij}(u)n_j n_i \\ d\bar{p}_T(u) &= d\rho(u)\bar{n} - d\rho_n\bar{n} \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Gamma_c \quad (3.6)$$

$d\rho_n$ und $d\rho_T$ – normaler und tangentialer Kontaktspannungszuwachs, es gilt in der Kontaktzone

$$u_n = \bar{u}\bar{n} \quad \text{und} \quad \bar{u}_T = \bar{u} - u_n\bar{n} \quad (3.7)$$

- kinematische Kontaktbedingungen (bei Voraussetzung kleiner Verformungen)

$$\left. \begin{aligned} g &\equiv ((u^B + \Delta u^B) - (u^A + \Delta u^A))\bar{n} - g_o \geq 0 \Rightarrow \rho_n(n)\bar{n} < 0 \\ g &\equiv ((u^B + \Delta u^B) - (u^A + \Delta u^A))\bar{n} - g_o < 0 \Rightarrow \rho_n(n)\bar{n} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Gamma_c \quad (3.8)$$

wo: \bar{n} – Einheitsvektor in Normalen-Richtung,

g_o – Spaltbreite zwischen den Körpern A und B im nichtdeformierten Zustand (vor der Belastung)

$\rho_n = \bar{p}(u)\bar{n}$ – Normalkontaktspannung, $\rho_n \sum_{n \in \text{NBR}} d\rho_n$,
 Δu – Verschiebungsincrement, A und B bezeichnen die Körper A und B.

3.2. Variationsformulierung in dem Verschiebungsfeld

Statt der Differentialformulierungen in (3.1) bis (3.6) wird eine äquivalente Variationsformulierung in den Verschiebungen verwendet. Ausgangspunkt für die weitere Betrachtung ist das elastische Gesamtpotential in einer inkrementellen Form:

$$\begin{aligned} d\Pi^e(du) &= \left(\int_{V^A \cup V^B} d\bar{\varepsilon}^T d\bar{p} dV - \int_{V^A \cup V^B} d\bar{u}^T dV - \int_{\Gamma_q} d\bar{u}^T d\bar{q} dS \right. \\ &\quad \left. - \sum_L d\bar{v}_L^T G_L d\bar{F}_L + d(\phi_n + \phi_T) \right) \quad (3.9) \end{aligned}$$

Physikalisch lassen sich die Terme ϕ_n und ϕ_T als elastischer Deformationsenergiezuwachs einer fiktiven Zwischenschicht interpretieren, welche die mechanischen Eigenschaften einer Bettung hat [Schomburg, 1979], G und v werden unten erklärt. Durch den oberen Index e sind die Größen auf ein Element bezogen.

Der Verschiebungszustand \bar{u} wird näherungsweise durch die Werte \bar{v} in den Elementknoten dargestellt:

$$d\bar{u} = G d\bar{v} \quad (3.10)$$

In Gl. (3.10) ist G die Matrix der Formfunktionen und \bar{v} der Vektor der Knotenverschiebungen.

Setzt man in Gl. (3.9) den Verschiebungsansatz Gl. (3.10) und Gl. (3.4) ein, erhält man nach Ausmultiplizieren die Beziehung

$$\begin{aligned} d\Pi^e(d\bar{v}) &= \frac{1}{2} \int_{V^A \cup V^B} (DG)^T d\bar{v}^T EDG d\bar{v} dV - \int_{V^A \cup V^B} G^T d\bar{v}^T d\bar{p} dV \\ &\quad - \int_{\Gamma_q} G^T d\bar{v}^T d\bar{q} dS - \sum_L d\bar{v}_L^T G_L d\bar{F}_L + d\phi_k \end{aligned}$$

und nach Umformung

$$\begin{aligned} d\Pi^e(d\bar{v}) &= \frac{1}{2} d\bar{v}^T \int_{V^A \cup V^B} (DG)^T ED dV d\bar{v} \\ &\quad - d\bar{v}^T \left(\int_{V^A \cup V^B} G^T d\bar{p} dV + \int_{\Gamma_q} G^T d\bar{q} dS \right. \\ &\quad \left. + \sum_L G_L d\bar{F}_L \right) + d\phi_k \quad (3.11) \end{aligned}$$

Den Potentialzuwachs der Kontaktschicht $d\phi_k = d(\phi_n + \phi_T)$ kann man wie folgt beschreiben

$$d\phi_n = \int_{\Gamma_c} dp_n^T (du_n - g_o) dA \quad (3.12)$$

$$d\phi_T = \int_{\Gamma_c} dp_T^T (du_T - g_o) dA \quad (3.13)$$

wobei g_o – die Spaltbreite (vgl. Ungl. 3.8) ist.

Das elastische Gesamtpotential für ein aus e_1 finiten Elementen und e_2 Kontaktelementen bestehendes System ergibt sich als Summe aller Elementbeiträge

$$d\Pi(\bar{v}) = \sum_{(e_1)} d\Pi^e(\bar{v}) + \sum_{(e_2)} d\phi_k(\bar{v}) \quad (3.14)$$

Die Bedingung $\delta(\Pi(dv)) = 0$ für das Minimum des elastischen Gesamtpotentials unter der Voraussetzung kleiner Deformationen liefert die Gl. (3.15)

$$(K_{AB} + K_c(\Delta\bar{v})) \Delta\bar{v} = \Delta\bar{F} \quad (3.15)$$

Die Elementsteifigkeitsmatrix K_{AB} wird aus

$$K_{AB} = \sum_{(e_1)} \int_V DG^T EDG dV \quad (3.16)$$

berechnet, der Elementkraftvektorzuwachs $\Delta\bar{F}$ setzt sich aus folgenden Anteilen zusammen:

$$\Delta\bar{F}_p = \int_V G^T \Delta\bar{p} dV \quad \text{Kraft infolge des Volumenkräftezuwachses } \Delta\bar{p},$$

$$\Delta\bar{F}_L = \int_{\Gamma_q} G^T \Delta\bar{q} dS \quad \text{Kraft infolge des Oberflächenkräftezuwachses } \Delta\bar{q},$$

$$\Delta\bar{F}_\Lambda = \sum_\Lambda \Gamma_\Lambda d\bar{F}_\Lambda \quad \text{Kraftvektor infolge diskreter Knotenkräfte } \Delta\bar{F}_\Lambda.$$

Der Aufbau der Kontaktsteifigkeitsmatrix $[K_o]$ folgt aus den Gln. (3.12) und (3.13) und wird für infinitesimale Deformationszuwächse wie folgt nachgewiesen:

$$\Delta\phi_T = \int_{\Gamma_c} \Delta p_T^T \Delta u_T dA =$$

$$\Delta\phi_T = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left\{ \left[\frac{\partial(p_T)}{\partial(u_T)} (\Delta u_T) \right]^T \Delta u_T \right\} dA \quad (3.17)$$

Unter Berücksichtigung, daß man die Koeffizienten der Tangentialkontaktsteifigkeit aus der Ableitung der tangentialen Kraft nach der tangentialen Verschiebung bestimmt, gilt in bezug auf die Einheitsfläche,

$$k_T = \frac{\partial(p_T)}{\partial(u_T)}, \quad (3.18)$$

k_T – Steifigkeitskomponente in der tangentialen Richtung in bezug auf die Einheitskontaktfläche. In unserem Modell (vgl. Bild 2) $k_T = \text{konst.}$, gilt also:

$$\Delta\phi_T = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (k_T \Delta u_T) dA$$

$$\Delta\phi_T k_T \int_{\Gamma_c} (\Delta u_T)^T (\Delta u_T) dA \quad (3.19)$$

und mit Hilfe der Gl. (3.10) geht (3.19) über in

$$\Delta\phi_T = \frac{1}{2} k_T \Delta v_T^T \left[\int_{\Gamma_c} G^T G dA \right] \Delta v_T \quad (3.20)$$

Es läßt sich leicht beweisen, daß die Auswertung des Integrals für lineare Ansatzfunktionen des 4-Knoten finiten Elements zu folgender Matrix führt:

$$\int_{\Gamma_c} G^T G dA = \frac{A_c^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (3.21a)$$

oder für quadratische Ansatzfunktionen des 8-Knoten finiten Elementes:

$$\int_{\Gamma_c} G^T G dA = \frac{A_c^{(e)}}{30} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 16 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (3.21b)$$

$A_c^{(e)}$ – Kontaktfläche, die sich längs eines jeden finiten Elementes erstreckt.

Die Matrizen (3.21a) und (3.21b) führen im allgemeinen zur Ermittlung der Kontaktsteifigkeit des Kontaktlinienelementes.

Durch eine Diagonalisierung werden die Matrizen (3.21a) und (3.21b) folgenderweise umgeformt³⁾:

$$C = \frac{A_c^{(e)}}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.22a)$$

bzw. für quadratische Ansatzfunktionen des 8-Knotenelementes:

$$C = \frac{A_c^{(e)}}{30} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad (3.22b)$$

Die diagonalisierten Matrizen (3.22a) und (3.22b) werden im weiteren benutzt, um die Kontaktsteifigkeit der diskreten Kontaktfederelemente zu berechnen. Da die Komponenten der Kontaktsteifigkeit direkt von der Druckspannung (in dem hier angenommenen Modell ändert sich Druckspannung knotenweise, vgl. Gl. 4.10 und 4.11) abhängen, kann das Verhalten der Kontaktzone durch Anwendung der voneinander unabhängigen Federn richtiger beschrieben werden.

Das Funktional (3.20) wird unter Berücksichtigung der Matrizen (3.22a) und (3.22b) folgendermaßen angegeben:

$$\Delta\phi_T = \frac{1}{2} k_T \Delta v_T^T C \Delta v_T \quad (3.23)$$

Wenn man die Gl. (3.23) differenziert,

$$\frac{\partial(\Delta\phi_T)}{\partial(\Delta v_T)} = k_T C \Delta v_T, \quad (3.24)$$

erhält man unter Berücksichtigung der Gl. (2.7):

$$\left[\frac{\partial(\Delta\phi_T)}{\partial(\Delta v_T)} \right]_j = \frac{(p_n)^s}{R} A_j I \Delta v_T, \quad (3.25)$$

I – Einheitsmatrix,

für lineare Ansatzfunktion:

$$A_j = A_c^{(e)} \left(+\frac{1}{2}; +\frac{1}{2} \right) \quad (3.26a)$$

3) Die Hinweise zur Diagonalisierung kommen aus Diskussionen mit Dr. sc. techn. U. Gabbert (Institut Festkörpermechanik TU Magdeburg)

für quadratische Ansatzfunktionen:

$$A_j = A_c^{(e)} \left(+\frac{1}{6}; +\frac{4}{6}; +\frac{1}{6} \right) \quad (3.26b)$$

Bei der Berechnung von axialsymmetrischen Kontaktaufgaben hängt A_j vom Radius r (vgl. Anhang) ab.

Die Komponenten A_j in der Gl. (3.25) können physikalisch als eine Kontaktfläche, die jedem Kontaktfederelement zugeordnet ist, interpretiert werden (die Kontaktfläche ist im Anhang abgeleitet).

Bei der Ausführung der Steifigkeitskomponenten k_n in normaler Richtung geht man wie oben vor:

$$\begin{aligned} D\phi_n &= \int_{\Gamma_c} \Delta p_n^T (\Delta u_n - g_o) dA \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_c} \left\{ \left[\frac{\partial(p_n)}{\partial(u_n)} (\Delta u_n - g_o) \right]^T (\Delta u_n - g_o) \right\} dA \end{aligned}$$

Mit Berücksichtigung, daß man den Koeffizienten der Normalkontaktsteifigkeit aus der Ableitung der normalen Kraft nach der normalen Verschiebung bestimmt, gilt in bezug auf die Einheitsfläche:

$$k_n = \frac{\partial(p_n)}{\partial(u_n)} = \frac{p_n^{1-m}}{c_n^m} \quad (3.27)$$

wobei k_n – die Steifigkeitskomponente in der normalen Richtung in bezug auf die Einheitskontaktfläche ist.

Setzt man Gl. (3.27) in Verbindung mit den Gln. (3.10) und (3.26) ein, so erhält man

$$\Delta\phi_n = \frac{1}{2} k_n \int_{\Gamma_c} G^T (\Delta v_n - g_o)^T G (\Delta v_n - g_o) dA \quad (3.28)$$

Nach Differentiation der Gl. (3.28) erhält man für die Kontaktknoten mit Einführung der Matrix C (Gln. (3.22a) und (3.22b)):

$$\frac{\partial(\Delta\phi_n)}{\partial(\Delta v_n)} = k_n C (\Delta v_n - g_o) \quad (3.29)$$

und weiter unter Berücksichtigung der Gl. (3.27),

$$\left[\frac{\partial(\Delta\phi_n)}{\partial(\Delta v_n)} \right]_j = \frac{p_n^{1-m}}{c_n^m} A_j I (\Delta v_n - g_o) \quad (3.30)$$

A_j und I sind bei der Gl. (3.25) erklärt.

Um das nichtlineare Verhalten der Kontaktzone zu modellieren, wird zwischen zwei berührenden Körpern, d. h. zwischen den Knotenpaaren, ein Kontaktelement eingetragen, das über nichtlineare Eigenschaften verfügt. Das Kontaktelement besteht aus zwei fiktiven Federn der Länge Null und wurde in der Arbeit von Buczkowski und Altenbach [1989] wie folgt beschrieben:

$$[K_c]_G = [\Theta]^T [K_c]_L [\Theta] \quad (3.31)$$

$[\Theta]$ – Matrix der Richtungskosinus für jedes Kontaktelement (vgl. Buczkowski und Altenbach, 1989), $[K_c]_L$ – Kontaktsteifigkeitsmatrix für jedes Kontaktelement in den lokalen Koordinaten.

In den lokalen Koordinaten lautet die Kontaktsteifigkeitsmatrix:

$$[K_c]_L = A_j * \begin{bmatrix} k_T & 0 & -k_T & 0 \\ 0 & k_n & 0 & -k_n \\ -k_T & 0 & k_T & 0 \\ 0 & -k_n & 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Gleichung (3.15) kann man auch wie folgt vorstellen:

$$(K_{AB} + K_c(\Delta\bar{v})) \begin{Bmatrix} \Delta\bar{v}_a \\ \Delta\bar{v}_k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\bar{F}_a \\ \Delta\bar{F}_k(\Delta\bar{v}) \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

Δv_a und Δv_k – sind Knotenverschiebungsincremente außerhalb und in der Kontaktzone.

ΔF_a und ΔF_k – sind die Inkremente der Kontaktkräfte außerhalb und in der Kontaktzone. K_c und $\Delta\bar{F}_k$ hängen von den Knotenverschiebungen Δv ab.

Bei der inkrementellen Beschreibung ist ein Lastinkrement in jedem Berechnungsschritt zu definieren. Die Verschiebungsincremente und die Zuwächse der Kontaktkräfte werden nacheinander gesondert bestimmt. Die Gesamtgrößen folgen aus den inkrementellen Werten durch Summation

$$\{F^{[l]}\} = \{\Delta F^{[l]}\} + \sum_{i=2}^l \{\Delta F^{[i]}\} \quad (3.34)$$

$$\{v^{[l]}\} = \{\Delta v^{[l]}\} + \sum_{i=2}^l \{\Delta v^{[i]}\} \quad (3.35)$$

$$\{F_k^{[l]}\} = \{\Delta F_k^{[l]}\} + \sum_{i=2}^l \{\Delta F_k^{[i]}\} \quad (3.36)$$

Zur Berechnung des Verschiebungsfeldes wird eine Tangentenmatrix angewandt, die im vorhergehenden Inkrement erhalten wird d. h.

$$(K^{i-1}) \{\Delta v^i\} = \{\Delta F^i\} \quad (3.37)$$

$$[K^{i-1}] = [K^{i-1}(\{\Delta v^{i-1}\}, \{\Delta F^{i-1}\})] \quad (3.38)$$

4. Berechnung der Kontaktsteifigkeit

4.1. Kontaktsteifigkeit im elastischen Bereich

Im ersten Belastungsincrement wird eine gleichmäßige Druckverteilung über der Kontaktzone angenommen. Das bedeutet, daß das erste Lastinkrement $\Delta F_n^{[1]}$ auf die nominelle Kontaktfläche A_c verteilt wird (Startbedingung)

$$p_m = \frac{\Delta F^{[1]}}{A_a} \quad (4.1)$$

Für die Berechnung der Kontaktkräfte für jedes Kontaktelement muß diesem eine bestimmte Kontaktfläche A_j zugeordnet werden. Diese Kontaktfläche wird mit Gl. (4.2a) für den ebenen und mit Gl. (4.2b) für den axialsymmetrischen Spannungszustand berechnet:

$$A_j = \iint_{\Gamma_c} G_j \det J d\xi d\eta \quad (4.2a)$$

wobei G_j – die Polynome der Formfunktionen G sind, $\det J$ – Determinante der Jacobischen Matrix.

Die detaillierte Berechnung einer Kontaktfläche A_j wird im Anhang ausgeführt.

Es ist dabei zu unterstreichen, daß die Summe aller Kontaktelementflächen gleich der nominellen Kontaktfläche A_a sein muß. An der Kontaktfläche A_j werden stetige tangentiale und normale Kontaktspannungen vorausgesetzt.

In dem ersten Belastungsfall sind die normalen Kontaktkräfte $F_{nj}^{[1]}$ unter Beachtung der Gl. (4.1) in jedem Kontaktelement:

$$F_{nj}^{[1]} \equiv \Delta F_{nj}^{[1]} = p_m A_j \quad (4.3)$$

Die Kontaktkräfte verursachen Deformationen der Unebenheiten der Kontaktzone. Diese Deformationen stellen die Differenz der Verschiebungen der Federendpunkte dar.

für das erste Belastungsincrement wird die normale Kontaktsteifigkeit als Sekante angenommen, weil die Neigung der Kurve im Ursprung (Startpunkt) den Wert Null annimmt.

Das erste Lastinkrement soll dabei ca. 5 % der Gesamtbelastung betragen [Villauneva-Leal und Hinduja, 1984].

Somit kann für die normale Kontaktsteifigkeit geschrieben werden

$$k_{nj}^{[i]} = \frac{\Delta F_{nj}^{[1]}}{\Delta u_{nj}^{[1]}} \quad (4.4)$$

Bei Berücksichtigung der Gln. (2.1) und (4.3) erhält man weiter

$$k_{nj}^{[1]} = \frac{p_m A_j}{\Delta u_{nj}^{[1]}} = \frac{p_m A_j}{c_n p_m^m}$$

und nach Umformung

$$k_{nj}^{[1]} = \left[\frac{\Delta F_n^{[1]}}{A_a} \right]^{i-m} \frac{A_j}{c_n} \quad (4.5)$$

Für die angenommene gleichmäßige Druckverteilung p_m und mit Hilfe der Gl. (2.7) wird die tangentiale Kontaktsteifigkeit berechnet

$$k_{Tj}^{[1]} = \frac{(p_n^{[1]})^s}{R} A_j$$

und nach Umformung

$$k_{Tj}^{[1]} = \left[\frac{\Delta F_n^{[1]}}{A_a} \right]^s \frac{a_j}{R} \quad (4.6)$$

A_a – nominelle Kontaktfläche,

A_j – Fläche, die jedem Kontaktelement zugeordnet ist (vgl. Gln. 4.2a und 4.2b),

c_n, m, R, S – Parameter der Kontaktzone,

$\Delta F_n^{[1]}$ – Anfangslastinkrement in der Normalenrichtung,

j – Nummer des Kontaktelementes.

Die normale und die tangentiale Kontaktsteifigkeit (Gln. (4.5) und (4.6)) werden jetzt zur Ermittlung der Steifigkeit der einzelnen Kontaktelemente in die Matrix (3.32) eingesetzt.

Verknüpft man die Kontaktsteifigkeitsmatrix (3.32) mit der Steifigkeitsmatrix der Körper A und B, so entsteht die globale Anfangssteifigkeitsmatrix $K^{[1]}$

$$K^{[1]} = K_{AB} + \sum_{(e2)} (K_c)_G \quad (4.7)$$

Vor der Lösung des Gleichungssystems (3.15) müssen auch die Verschiebungsrandbedingungen (3.3) berücksichtigt werden. Aus der Lösung des Gleichungssystems (3.15) erhält man die Knotenverschiebungen und somit die Deformationen $\Delta u_{nj}^{[1]}$ und $\Delta u_{Tj}^{[1]}$. Das Normalspannungsincrement $p_{nj}^{[1]}$ wird nach dem ersten Belastungsschritt aus der Gl. (4.8) bestimmt

$$p_{nj}^{[1]} = \frac{k_{nj}^{[1]} \Delta u_{nj}^{[1]}}{A_j} \quad (4.8)$$

In den folgenden Lastschritten wird die normale Steifigkeitskomponente k_n als Tangente im neuen Punkt der Belastungsdeformationskurve (vgl. Gl. 3.27 und Bild 1) berechnet.

Die Kontaktsteifigkeitskomponenten k_n in der normalen und k_T in der tangentialen Richtung werden für jedes Kontaktelement j in den folgenden Schritten in Verbindung mit den Gln. (3.19) und (3.21) mit Hilfe der Gl. (4.10) und (4.11) berechnet

$$p_{nj}^{[i]} = \frac{k_{nj}^{[i]} (\Delta u_{nj}^{[i]} + \sum_2^i \Delta u_{nj}^{[i]})}{A_j} \quad (4.9)$$

$$k_{nj}^{[i]} = \frac{(p_{nj}^{[i-1]})^{1-m}}{c_n m} A_j \quad (4.10)$$

$$k_{Tj}^{[e][1]} = \frac{(p_{nj}^{[1]})^s}{R} A_j \quad (4.11)$$

i – ist die Zahl der Lastinkremente, j – Nummer des Kontaktelementes, p_n – Druckspannung im i -ten Lastinkrement $k_n^{[i]}$ und $(k_T^e)^{[i]}$ – Kontaktsteifigkeitskomponente im i -ten Lastinkrement, e – elastischer Bereich.

Weil die Knotenverschiebungen der Struktur klein sind, wird für jedes Inkrement eine konstante Steifigkeitsmatrix K_{AB} der Körper A und B vorausgesetzt.

Für die folgenden Inkremente erhält man

$$(K_{AB})^i = K_{AB} + \sum_{(e2)} (K_c)^i \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.12)$$

Es folgen dann die normalen und tangentialen Kontaktkräfte $F_n^{[i]}$ und $F_T^{[i]}$ im i -ten Lastinkrement:

$$F_n^{[i]} = \Delta F_n^{[1]} + \sum_2^i k_n^{[i]} \Delta u_n^{[i]} \quad (4.13)$$

$$F_T^{[i]} = \Delta F_T^{[1]} + \sum_2^i k_T^{[i]} \Delta u_T^{[i]} \quad (4.14)$$

Nach der Berechnung der Kontaktkräfte und Berücksichtigung der kinematischen Kontaktbedingungen an der Berührungsfläche Γ_c prüft man, in welchem Zustand sich das Kontaktelement befindet (Adhäsion, Gleitung bzw. Klaffung). Für $g \geq 0$ (vgl. Ungleichungssystem 3.8) wird für das nächste Lastinkrement angenommen, so daß das Kontaktelement „offen“, d. h. $(K_c)_j$ gleich Null ist.

4.3. Berechnung der Tangentialkontaktsteifigkeit im plastischen Bereich – Gleitmodell –

In jedem Lastinkrement wird iterativ geprüft, ob die tangentialen Kräfte sich schon in dem plastischen Bereich befinden, d. h.

$$0.625 \mu (u_P^T)^{[i]} F_n^{[i]} \leq F_T^{[i]} \leq 1.0 \mu (u_P^T)^{[i]} F_n^{[i]} \quad (4.15)$$

oder die Reibungskräfte überschreiten:

$$F_T^{[i]} \geq 1.0 \mu (u_P^T)^{[i]} F_n^{[i]} \quad (4.16)$$

Für den ersten Fall wird angenommen, daß die Tangentialkontaktsteifigkeit aus

$$k_T^P \cong (0.04 \dots 0.05) k_T^e \quad (4.17)$$

berechnet werden kann [Kirsanova und Reshetov, 1970], und die neue FE-Analyse wird für das gegebene Lastinkrement wiederholt.

Für den zweiten Fall wird im entsprechenden Lastinkrement die neue Belastung aufgebracht, d. h.

$$\Delta F_{kT}^{[i]} = \text{sign.} \mu (u_T^P)^{[i]} \Delta F_n^{[i]} \quad (4.18)$$

$$\text{sign.} = +1 \text{ für } \Delta u_T^{[i]} \geq 0$$

$$\text{sign.} = -1 \text{ für } \Delta u_T^{[i]} \leq 0$$

ΔF_{kT} – Kontaktkraftzuwachs in der tangentialen Richtung, $\mu (u_T^P)$ – Reibungskoeffizient nach Fredriksson (vgl. Gl. 2.9),

i – Nummer des Lastinkrements.

5. Numerische Ergebnisse

5.1. Elastischer Stempel auf elastischer Unterlage (Bild 4)

Das Problem des elastischen Stempels auf elastischer Unterlage wurde mit Berücksichtigung der Kontaktrauhigkeit und mit Anwendung einer iterativen Methode in der Arbeit

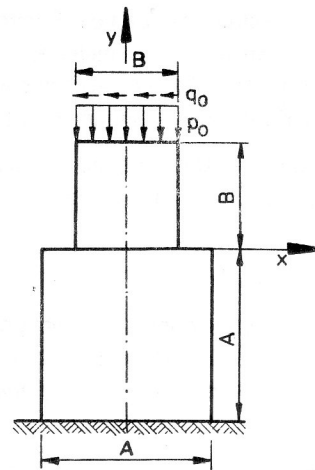


Bild 4

Elastischer Stempel auf elastischer Unterlage

$A = 190 \text{ mm}$, $B = 100 \text{ mm}$, $p_0 = 1.2 \text{ N/mm}^2$, $q_0 = 0$,
Dicke = 10 mm , $E_1 = E_2 = 4000 \text{ N/mm}^2$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.35$

von Buczkowski und Altenbach [1989] ausführlich analysiert. Die äußere Belastung wird hier durch eine Flächenlast p_0 in der Normalrichtung aufgebracht.

Aus der Tabelle 1 sind die gesamten tangentialen Verschiebungen u_T und die irreversiblen Verschiebungen u_T^P (die gesamten relativen Verschiebungen setzen sich aus einem reversiblen und einem irreversiblen Anteil zusammen) zu entnehmen. Die ermittelten Ergebnisse wurden für unterschiedliche Reibungskoeffizienten und bei Annahme derselben Parameterwerte der Kontaktzone ($c_n = 1.0$, $m = 0.5$, $R = 1.3$, $S = 0.5$, $n = 275 [1/\text{mm}]$) ermittelt.

Auf Bild 5 wurde eine Simulation des Be- und Entlastungsprozesses der elastischen Unterlage durch einen elastischen Stempel im Kontaktknoten am Rande des Stempels (das Verhalten in der tangentialen Richtung wurde hier nicht berücksichtigt) dargestellt.

Tabelle 1

Relative gesamte u_T und plastische Verschiebungen u_T^P in der Kontaktzone elastischer Stempel – elastische Unterlage für unterschiedliche Parameterwerte der Kontaktzone

$2x/B$	mit Verfest.		ohne Verfest.		ohne Verfest.		ohne Verfest.		ideal Modell	
	$\mu_m=0.2, \beta=1.0$		$\mu_m=0.2, \beta=1.0$		$\mu_m=0.2, \beta=0.2$		$\mu_m=0.001, \beta=1.0$		[2] ($\mu=0.0$)	
	$u_T, \mu\text{m}$	$u_T^P, \mu\text{m}$	$u_T, \mu\text{m}$	$u_T^P, \mu\text{m}$	$u_T, \mu\text{m}$	$u_T^P, \mu\text{m}$	$u_T, \mu\text{m}$	$u_T^P, \mu\text{m}$	$u_T, \mu\text{m}$	$u_T^P, \mu\text{m}$
0.00	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.109	0.000	0.104	0.000	0.140	0.000	0.835	0.729	0.948	0.948
0.20	0.219	0.000	0.205	0.000	0.285	0.000	1.692	1.485	1.895	1.895
0.30	0.328	0.000	0.298	0.000	0.443	0.144	2.548	2.248	2.824	2.824
0.40	0.467	0.000	0.404	0.000	0.671	0.269	3.470	3.064	3.808	3.808
0.50	0.657	0.000	0.527	0.000	0.956	0.432	4.425	3.898	4.818	4.818
0.60	1.016	0.000	0.694	0.000	1.132	0.643	5.416	4.728	5.858	5.858
0.70	1.786	0.000	0.899	0.000	1.799	0.909	6.473	5.581	6.966	6.966
0.80	2.409	0.000	1.170	0.000	2.373	1.227	7.571	6.438	8.126	8.126
0.85	2.595	0.000	1.371	0.000	2.766	1.437	8.232	6.928	8.835	8.835
0.90	2.544	0.510	1.651	0.088	3.223	1.660	8.887	7.364	9.547	9.547
0.95	2.891	0.532	2.148	0.160	3.867	1.898	9.650	7.789	10.41	10.41
1.00	3.438	0.533	2.744	0.189	4.475	1.994	10.15	7.913	10.97	10.97

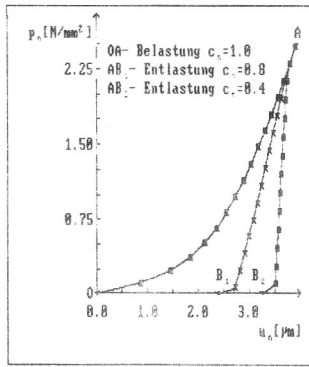


Bild 5
Simulation des Be- und Entlastungsprozesses einer elastischen Unterlage durch einen elastischen Stempel im Kontaktknoten am Rande des Stempels

Es wurden zwei Entlastungsfälle (die Kurven AB₁ und AB₂) für unterschiedliche c_n -Parameter und bei Annahme von $m = 0.5$ angegeben. Die Neigung der Entlastungskurve ist vom c_n -Parameter stark abhängig. Bei Annahme der größeren c_n -Werte erhält man die steifere Charakteristik. Die Abschnitte OB₁ und OB₂ (Bild 5) stellen nach der Entlastung die irreversible (bleibende) relative Verschiebung dar.

5.2. Elastische Kugel auf elastischem Halbraum (Bild 6)

Um den Einfluß der Oberflächenrauigkeit auf die Ermittlung der realen Druckverteilung und der Radien der Berührungsfleichen für den Fall zweier unterschiedlich gekrümmter Körper zu bestimmen, wurde als Beispiel die Kugel auf elastischem Halbraum ausgewählt.

Die Rauigkeitsparameter wurden durch $c_n = 0.3$, $c_n = 0.8$ unter der Voraussetzung $m = 0.5$ erfaßt. Tangentiale Kraftwirkungen wurden nicht berücksichtigt. Die Ergebnisse werden mit der analytischen Lösung nach Hertz verglichen. Aus den Bildern 7 und 8 ist zu ersehen,

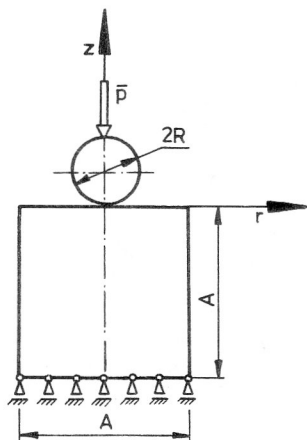


Bild 6
Elastische Kugel auf elastischem Halbraum:
 $A = 120 \text{ mm}$, $R = 15 \text{ mm}$, $E_1 = E_2 = 21000 \text{ N/mm}^2$,
 $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

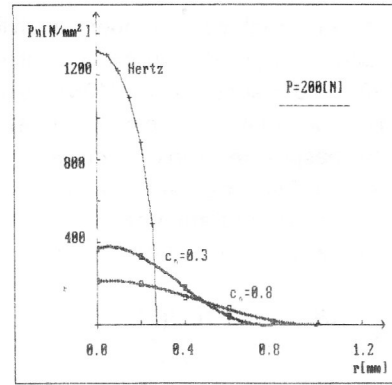


Bild 7
Kontaktdruckverteilung p_n zwischen elastischer Kugel und elastischem Halbraum im Vergleich zur Hertzlösung für $P = 200 \text{ [N]}$.

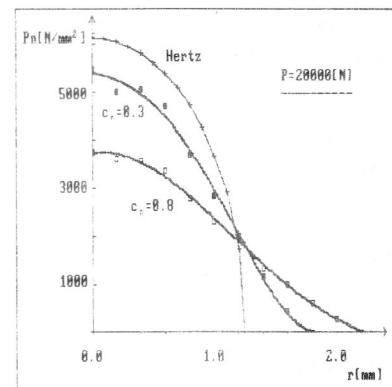


Bild 8
Kontaktdruckverteilung p_n zwischen elastischer Kugel und elastischem Halbraum im Vergleich zur Hertzlösung für $P = 20000 \text{ [N]}$

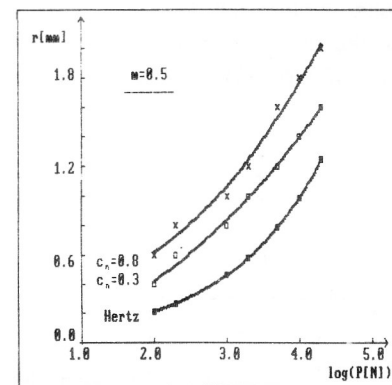


Bild 9
Abhängigkeit des realen Kontaktbeiches beim Eindringen einer Kugel in einen rauhen Körper von der äußeren Belastung

daß die Rauigkeit einen Effekt hat wie eine elastische Schicht zwischen den Körpern, d.h., die Druckverteilung erfolgt über eine größere Fläche. Der Rauigkeitseffekt nimmt mit der Verminderung der äußeren Belastung zu. Ferner nimmt die reale Berührungsfleiche mit der Steigerung der Oberflächenrauigkeit (größere c_n -Werte) zu und weicht stark von der Hertzlösung ab (Bild 9).

Die vorgestellten Ergebnisse wurden analytisch von Greenwood und Tripp [1967] und experimentell von Kagiya u. a. [1983] und Greenwood u. a. [1984] bestätigt. Das Kontaktproblem der rauhen Körper wurde letzters von Johnson [1985] besprochen. Dieser Vergleich hat aber nur einen qualitativen Charakter, weil die oben genannten Autoren als wesentlichen Parameter der Rauigkeit den Wert α [z. B. Johnson, 1985, S. 419] benutzen:

$$\alpha \equiv \frac{\sigma_s}{\delta_o} = \frac{\sigma_s R}{r} = \sigma_s \left[\frac{16R(E^*)^2}{gP^2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

σ_s – Quadratischer Mittelwert der Rauigkeitsprofilabweichungen innerhalb der Meßstrecke (Bezugstrecke) nach DIN 4726/1,

δ_o – Annäherung der Berührungsflächen,

R – Radius der Kugel,

r – Radius der realen Berührungsfläche,

P – äußere Belastung,

E^* – elastischer Ersatzmodul der beiden Körper [Johnson, 1985, S. 92].

Für eine quantitative Einschätzung muß man den funktionalen Zusammenhang der Parameter c_n und m und des Rauigkeitsparameters α bestimmen.

Vor der Aufbringung der äußeren Belastung wurden als Startbedingung drei Kontaktknoten angenommen.

5.3. Starrer Hohlzylinder auf elastischem Halbraum (Bild 10)

Dieses Kontaktproblem wurde unter Berücksichtigung der Normalkontaktsteifigkeit und Vernachlässigung der Tangentialkontaktsteifigkeit mit Hilfe einer iterativen Methode von Buczkowski und Altenbach [1989] behandelt. Um den Einfluß der äußeren Belastung und von unterschiedlichen Rauigkeitsparametern auf die Kontaktspannungsverteilung einzuschätzen, wurden hier zwei unterschiedliche Belastungen, $P = 10$ [kN] und $P = 100$ [kN], aufgebracht. Die

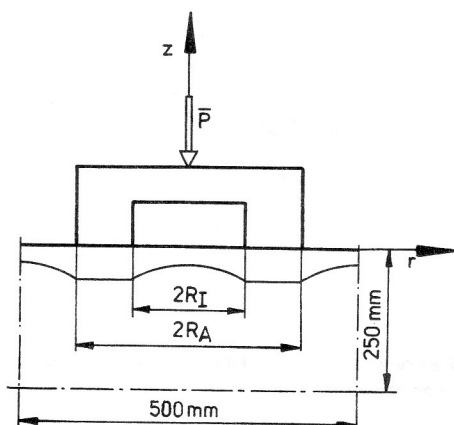


Bild 10

Modell für die Kontaktaufgabe starrer Hohlzylinder auf elastischem Halbraum für unterschiedliche c_n -Werte, $m = 0.59$, $R = 0.67$, $S = 0.40$, $R_I = 25$ mm, $R_A = 50$ mm, $E_1 = 4 \cdot 10^7$ N/mm², $E_2 = 4 \cdot 10^9$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\mu_m = \mu = 0.3 = \text{konst}$

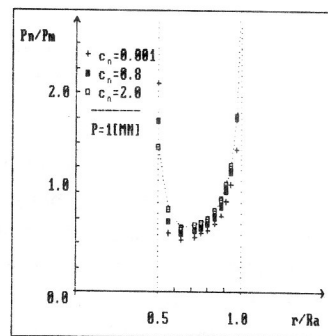
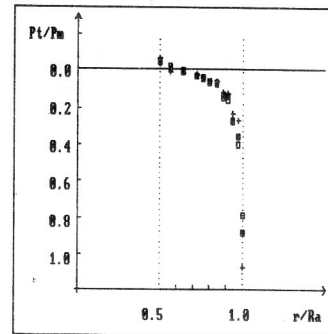


Bild 11a und 11b

Dimensionslose Verteilungen der Normal- p_n/p_m - und Tangentialspannungen p_T/p_m zwischen starrem Hohlzylinderstempel und elastischem Halbraum in Abhängigkeit von der äußeren Belastung ($P = 1$ [MN]) für unterschiedliche c_n -Parameter

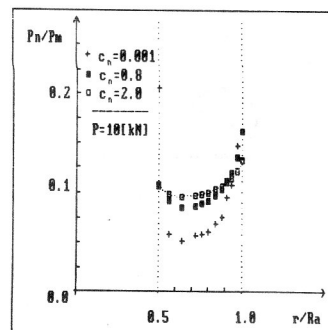
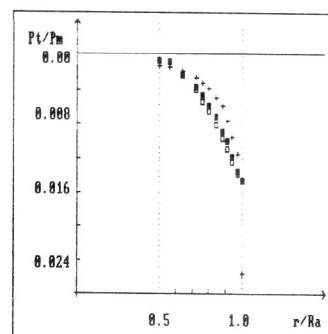


Bild 12a und 12b

Dimensionslose Verteilungen der Normal- p_n/p_m - und Hohlzylinderstempel und elastischem Halbraum in Abhängigkeit von der äußeren Belastung ($P = 10$ [kN]) für unterschiedliche c_n -Parameter

Tabelle 2
 Kontaktspannungen in der Kontaktzone zum Beispiel 1 (elastischer Stempel – elastische Unterlage) mit der Anwendung der 3-Knoten und 8-Knoten finiten Elemente

Kontaktknoten		1	3	5	7	9	11	12	13
9-Knoten Element	x [mm]	0.00	10.00	20.00	30.00	40.00	45.00	47.50	50.00
	p_T N/mm ²	0.0000	0.0325	0.0635	0.1157	0.2253	0.2955	0.3581	0.5683
	p_n N/mm ²	1.0369	1.0416	1.0433	1.1272	1.2701	1.4773	1.7905	2.8415
8-Knoten Element	x [mm]	0.00	8.333	16.667	25.00	33.333	41.667	45.833	50.00
	p_T N/mm ²	0.0000	0.0234	0.0504	0.0816	0.1390	0.2506	0.3252	0.6079
	p_n N/mm ²	1.0329	1.0369	1.0492	1.0819	1.1639	1.2532	1.6260	3.0396
8-Knoten Element	x [mm]	0.00	8.333	16.667	25.00	33.333	41.667	45.833	50.00
	p_T N/mm ²	0.0000	0.0493	0.0574	0.0944	0.1406	0.2338	0.3092	0.6229
	p_n N/mm ²	1.3202	1.0375	1.0678	1.0913	1.1696	1.3278	1.5459	3.1144

Bilder 11 ... 12 stellen Normalkontaktspannungen und Tangentialkontaktspannungen für unterschiedliche c_n -Parameter und bei Annahme von $m = 0.59$, $R = 0.67$ und $S = 0.40$ dar. Für kleine Kontaktsteifigkeit (große c_n -Werte) ist die Druckverteilung längs der Kontaktzone gleichmäßiger. Wie aus den Bildern 11 ... 12 zu ersehen ist, ist der Einfluß der Rauigkeit auf die Druckverteilung und die Tangentialspannungen bei einer Verminderung der Belastung wesentlich größer. Dieser wurde auch im Beispiel Kugel – elastischer Halbraum beobachtet.-

6. Schlußbemerkungen

Entsprechend dem nichtlinearen und nichtkonservativen Charakter des Reibungsprozesses der zu lösenden Kontaktaufgaben wird eine inkrementelle Formulierung angewendet, die eine beliebige Be- und Entlastung des Systems zuläßt.

Die Körper wurden mit finiten Elementen mit 3-, [70] und 4-Knoten (lineare Ansatzfunktion) bzw. mit 8-Knoten Serendipity oder 9-Knoten Lagrange-Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen [28], [47] diskretisiert. Das Programm wurde für alle oben genannten Elemente getestet. In der Tabelle 2 wird beispielsweise ein Vergleich der Kontaktspannungen bei Anwendung der 3-Knoten- und der 8-Knoten-Elemente für das Beispiel 1 (elastischer Stempel auf elastischer Unterlage) gezeigt.

Im Unterschied zu der iterativen Methode [Buczowski und Altenbach, 1989] wurde in der vorliegenden Arbeit ein großer Einfluß der Reibungsparameter auf die gesamten u_T und die irreversiblen u_T^P Verschiebungen (vgl. Tabelle 1) beobachtet. Dieser Effekt bei der inkrementellen Modellierung folgt aus der stückweisen Veränderung der Tangentialkontaktsteifigkeit mit der Steigerung der Normalkontaktspannungen (vgl. Gl. 2.7), wobei die Tangentialkräfte nach beiden Methoden gut übereinstimmen. Ein ähnlicher Effekt wurde auch mit und ohne Voraussetzung einer linearen Reibungsverfestigung (Tabelle 1) festgestellt.

In dieser Arbeit wurden nur 2D-Kontaktprobleme behandelt. In weiteren Arbeiten sollen sowohl räumliche Kontaktaufgaben als auch anisotrope Eigenschaften der Kontaktzone berücksichtigt werden.

Anhang

Berechnung der jedem Kontaktfederelement zugeordneten Kontaktfläche:

Axialsymmetrischer Fall (vgl. Gl. 4.2a):

$$A_j = 2\pi \int_{l_c} r G_j \det J d\xi \quad (A1)$$

G_j – Polynome der Ansatzfunktionen,
 für lineare Ansatzfunktionen ist $r = \sum_{j=1}^2 G_j r_j$

für quadratische Ansatzfunktion ist $r = \sum_{j=1}^3 G_j r_j$.

Die Polynome der Ansatzfunktion hängen längs der Kontaktzone nur von ξ ab, da η konstant ist ($\eta = \bar{\eta} = -1$). Somit wird

$$\det J = \frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^k G_j r_j \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ [G_j(\xi_P, \bar{\eta}_P)] r_j \right\}$$

und mit Berücksichtigung der Gl. (A1) erhält man weiter

$$A_j = 2\pi \int_{-1}^{+1} \left\{ G_j(\xi_P, \bar{\eta}_P) \left[\sum_{j=1}^k G_j(\xi_P, \bar{\eta}_P) r_j \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial G_j}{\partial \xi} (\xi_P, \bar{\eta}_P) r_j \right] \right\} d\xi \quad (A2)$$

Mit Gaußscher Integration in lokalen Koordinaten berechnet man

$$A_j = 2\pi \sum_{g=1}^N \left\{ G_j(\xi_P, \bar{\eta}_P) \left[\sum_{j=1}^k G_j(\xi_P, \bar{\eta}_P) r_j \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial G_j}{\partial \xi} (\xi_P, \bar{\eta}_P) r_j \right] \right\} H_g \quad (A3)$$

wo: ξ_p, η_p – Koordinaten der Gaußpunkte,

N – Anzahl der Stützstellen,

N_g – Gewichtskoeffizienten,

$k=2$ für lineare, $k=3$ für quadratische Ansatzfunktion.

Ebener Spannungszustand Gl. (4.2b):

$$A_j = t \int_{l_c} G_j \det J d\xi \quad (A4)$$

G_j – Polynome der Ansatzfunktionen,

t – Dicke des Körpers,

für lineare Ansatzfunktion ist $x = \sum_{j=1}^2 G_j x_j$,

für quadratische Ansatzfunktion $x = \sum_{j=1}^3 G_j x_j$.

Die Polynome der Ansatzfunktion hängen längs der Kontaktzone nur von ξ ab, da η konstant ist ($\xi = \bar{\eta} = -1$). Somit wird

$$\det J = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\sum_{j=1}^k G_j x_j \right) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial \xi} [G_j(\xi_p, \bar{\eta}_p)] x_j$$

und mit Berücksichtigung der Gl. (A4) erhält man Gl. (A5)

$$A_j = t \int_{-1}^{+1} \left\{ G_j(\xi_p, \bar{\eta}_p) \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial G_j}{\partial \xi}(\xi_p, \bar{\eta}_p) x_j \right] \right\} d\xi \quad (A5)$$

Mit Gaußscher Integration in lokalen Koordinaten berechnet man

$$A_j = t \sum_{g=1}^N \left\{ G_j(\xi_p, \bar{\eta}_p) \left[\sum_{j=1}^k \frac{\partial G_j}{\partial \xi}(\xi_p, \bar{\eta}_p) x_j \right] \right\} dH_g \quad (A6)$$

ξ_p, η_p – Koordinaten der Gaußpunkte,

N – Anzahl der Stützstellen,

H_g – Gewichtskoeffizienten,

$k=2$ für lineare, $k=3$ für quadratische Ansatzfunktion.

LITERATUR

- [1] (1989) Adamczyk, T., Burczyński, T.: Metoda elementów brzegowych w zagadnieniach przestrzennego kontaktu z tarciem, ZN Politechniki Śląskiej, Mechanika z. 83, s. 7–20
- [2] (1989) Altenbach, J., Buczkowski, R.: Finite-Elemente-Formulierung ebener und axialsymmetrischer Kontaktaufgaben mit Coulombscher Reibung, Technische Mechanik, vol. 9, H. 4, S. 254–263.
- [3] (1982) Altenbach, J., Sacharov, A. S.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. VEB Fachbuchverlag Leipzig.
- [4] (1990) Altenbach, J., Egert, J., Paczelt, I.: Lösung und rotationssymmetrischer elastischer Kontaktaufgaben mit Hilfe spezieller finiter Kontaktelemente, Z. angew. Math. Mech., vol. 70, Nr. 6, T671–T675.
- [5] (1972) Back, N., Burdekin, N., Cowley, A.: Review of the research on fixed and sliding joints, pp. 87–97, in: (S. A. Tobias and F. Koenigsberger), Proc. 13th. Internat. Machine Design and Research Conf., London.
- [6] (1973) Back, N., Burdekin, N., Cowley, A.: Analysis of machine tool joints by the element method, pp. 529–537, in: (S. A. Tobias and F. Koenigsberger), Proc. 14th. Internat. Machine Design and Research Conf., London.

- [7] (1985) Beer, G.: An isoparametric joint-interface element for finite element analysis, Int. j. num. methods eng., vol. 21, pp. 585–600.
- [8] (1987) Bischoff, D., Plank, L., Stein, E.: Solution Strategies for Elastic and Inelastic Contact Problems of Solids, pp. 59–77., in: Numerical Methods for Transient and Coupled Problems (ed. R. W. Lewis, E. Hinton, P. Bettes and B. A. Schrefler), John Wiley & Sons.
- [9] (1989) Buczkowski, R., Altenbach, J.: Numerische Berechnung zweidimensionaler Kontaktaufgaben mit Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften der Kontaktzone, Technische Mechanik, vol. 10, H. 3, S. 183–196.
- [10] (1982) Campos, L. T., Oden, J. T., Kikuchi, N.: A numerical analysis of class contact problems with friction in elastostatics, Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng., vol. 34, pp. 821–845.
- [11] (1976) Chand, R., Haug, E. J., Rim, K.: Analysis of Unbonded Contact Problems by Means of Quadratic Programming. J. Optimization Theory Applications, vol. 20, No. 2, pp. 171–189.
- [12] (1986) Chaudhary, A. B., Bathe, K.-J.: A Solution Method for Static and Dynamic Analysis of Three-Dimensional Contact Problems with Friction, Comp. & Struct., vol. 24, No. 6, pp. 855–873.
- [13] (1985a) Cheng, J. H., Kikuchi, N.: An Analysis of Metal Forming Processes Using Large Deformation Elastic-Plastic Formulations, Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng., vol. 49, pp. 71–108.
- [14] (1985b) Cheng, J. H., Kikuchi, N.: An Incremental Constitutive Relation of Unilateral Contact Friction for Large Deformation Analysis, J. of Appl. Mech., vol. 52, pp. 639–648.
- [15] (1984) Desai, C. S., Zaman, M. M., Lightner, J. G., Siriwardane, H. J.: Thin-Layer Element for Interfaces and Joints, Int. j. numer. anal. methods geomech., vol. 8, pp. 19–43.
- [16] (1984) Desai, C. S., Sargand, S.: Hybrid FE Procedure for Soil-Structure Interaction, J. of Geotechnical Engineering, vol. 110, No. 4, pp. 473–486.
- [17] (1986) Desai, C. S., Nagaraj, B. K.: Constitutive Modelling for Interfaces under Cyclic Loading, pp. 97–108, in: Mechanics of Material Interfaces (ed. A. P. S. Selvaduari and G. Z. Voyiadjis), Elsevier, Amsterdam.
- [18] (1989) Egert, J., Altenbach, J.: Inkrementelle Iterationsmethoden zur Lösung elastischer Kontaktaufgaben mit Reibung mittels spezieller isoparametrischer 2D- und 3D-Kontaktelemente, Technische Mechanik, vol. 10, H. 2, S. 120–137.
- [19] (1987) Fischer, U., Hoyer, U., Melosh, R. J.: Lösung diskretisierter Kontaktprobleme unter Verwendung der linearen Optimierung. Technische Mechanik, vol. 8, H. 2, S. 52–56.
- [20] (1975) Fredriksson, B.: Experimental determination frictional properties in araldite b contacts, Report LITH-IKP-R-061, Linköping Institute of Technology.
- [21] (1977) Fredriksson, B., Rydholm, G., Sjöblom, P.: Variational Inequalities in Structural Mechanics with Emphasis on Contact Problems, Proc. Conf. on Nonlinear solid and Structural Mechanics, Geilo Norway, pp. 863–884.
- [22] (1973) Ghaboussi, J., Wilson, E. L., Isenberg, J.: Finite Element for Rock Joints and Interfaces, J. of Soil Mechanics and Foundations Div. ASCE, vol. 99, No. SM10, pp. 833–848.
- [23] (1987) Gläser, H., Drey, K.-D., Dudek, R.: Beispiele zur Spannungs- und Deformationsanalyse sowie zur Lösung des Kontaktproblems nach dem FEM-Programm FIDEFA, Technische Mechanik, vol. 8, H. 2, S. 57–62.
- [24] (1989) Gläser, H.: Zum Kontaktproblem zwischen festen Körpern mit Berücksichtigung der Reibung – Modelle und Lösungswege, Technische Mechanik, vol. 10, H. 1, S. 65–71.

- [25] (1968) Goodman, R. E., Taylor, R. L., Brekke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock, *J. of Soil Mechanics and Foundations Div. ASCE*, vol. 94, No. SM3, pp. 637–659.
- [26] (1967) Greenwood, J. A., Tripp, J. H.: The Elastic Contact of Rough Spheres, *J. of Appl. Mech.*, vol. 89, pp. 153–159.
- [27] (1984) Greenwood, J. A., Johnson, K. L., Matsubara, E.: A Surface Roughness Parameter in Hertz Contact, *WEAR*, vol. 100, pp. 47–57.
- [28] (1989) Grudziński, K., Kawiak, R., Konowski, K.: Opracowanie metod komputerowych do projektowania połączeń elementów maszyn z uwzględnieniem zjawisk kontaktowych, *Forschungsheft, Etap IV, Szczecin (unveröffentlicht)*.
- [29] (1985) Hallquist, J. O., Goudreau, G. L., Benson, D. J.: Sliding Interfaces with Contact-Impact in Large-Scale Lagrangian Computations, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 51, pp. 107–137.
- [30] (1987) Heyliger, P. R., Reddy, J. N.: A Mixed Computational Algorithm for Plane Elastic Contact Problems – I. Formulation, *Comp & Struct.*, vol. 26, No 4, pp. 621–634. – II. Numerical Examples, *Comp. & Struct.*, vol. 26, No. 4, pp. 635–653.
- [31] (1977) Hinton, E., Owen D. R. J.: Finite Element Programming, Academic Press Inc., London.
- [32] (1988) Hlavacek, I., Haslinger, J., Necas, J., Lovisek, J.: Solution of Variational Inequalities in Mechanics, Springer Verlag, Berlin.
- [33] (1989) Hoyer, U.: Diskretisierte Lösung elastischer Kontaktprobleme mittels eines Verfahrens der linearen Optimierung, *Diss. A, TU Magdeburg*.
- [34] (1985) Idelberger, H.: Ein Algorithmus zur Berechnung des Kontaktproblems „elastischer Körper und starres Hindernis“ unter Berücksichtigung des Coulombschen Reibungsgesetzes, *ZAMM*, vol. 65, No. 4, T142–T143.
- [35] (1985) Johnson, K. L.: Contact mechanics, Cambridge University Press.
- [36] (1983) Kagami, J., Yamada, K., Hatazawa, T.: Contact Between a Sphere and Rough Plates, *WEAR*, vol. 87, pp. 93–105.
- [37] (1977) Kalker, J. J.: Variational Principles of Contact Elastostatics, *J. Inst. Maths. Applics*, vol. 20, pp. 190–219.
- [38] (1981) Kikuchi, N., Song, Y. J.: Penalty Finite Element Approximations of a Class of Unilateral Problems in Linear Elasticity, *Quartely of Appl. Math.*, vol. 39, pp. 1–22.
- [39] (1982) Kikuchi, N.: Friction contact problems by using penalty regularization methods, pp. 37–59, in: *Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems*, University of Waterloo Press, Vancouver.
- [40] (1984) Klarbring, A.: Contact Problems with Friction-using a Finite Dimensional Description and the Theory of Linear Complementarity, Thesis No. 20, Linköping Institut of Technology.
- [41] (1986) Klarbring, A.: A Mathematical Programming Approach to Three-Dimensional Contact Problems with Friction, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 58, pp 175–200.
- [42] (1988) Klarbring, A., Björkman, G.: A Mathematical Programming Approach to Contact Problems with Friction and Varying Contact Surface, *Comp. & Struct.*, vol. 30, No. 5, pp. 1185–1198.
- [43] (1989) Lee, G. B., Kwak, B. M.: Formulation and Implementation of Beam Contact Problems under Large Displacement by a Mathematical Programming, *Comp. & Struct.*, vol. 31, No. 3, pp. 365–376.
- [44] (1971) Левина, З. М., Решетов, Д. Н. Levina und Reshetov): Контактная жесткость машин, *Изд. Машиностроение, Москва*.
- [45] (1988) Lu, J W., Taylor, R. L.: A perturbed Lagrangian formulation for the finite element solution of nonlinear frictional contact problems, *J. de Mec. Theor. et Appliq.*, vol. 7, Numero Special, pp. 1–14.
- [46] (1983) Oden, J. T., Pires, E. B.: Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity, *J. of Appl. Mech.*, vol. 50, pp. 67–76.
- [47] (1984) Oden, J. T., Pires, E. B.: Nonlocal Friction in Contact Problems in Plane Elasticity, in: *Finite elements; Special Problems in Solid mechanics*, vol. V (ed. J. T. Oden and G. F. Carey) Prentice-Hall, pp. 213–267.
- [48] (1982) Oden, J. T., Kim, S. J.: Interior Penalty Methods for Finite Element Approximations of the Signorini Problem in Elastostatic, *Comp. Meths. with Appls.*, vol. 8, No. 1, pp. 35–56.
- [49] (1985) Oden, J. T., Martins, J. A. C.: Models and computational methods for dynamic friction phenomena, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 52, pp. 527–634.
- [50] (1986) Owen, D. R. J., Hinton, E.: Finite Elements in Plasticity: theorie and practice, Pineridge Press, Swansea, U. K.
- [51] (1976) Paczelt, I.: Solution of Elastic Contact Problems by the Finite Element Displacement Method, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.*, T. 82 (3–4), pp. 353–375.
- [52] (1988) Paczelt, I.: Wybrane problemy zagadnień kontaktowych dla układów sprężynowych, s. 7–49, w: *Mechanika kontaktu powierzchni* (ed. Z. Mróz), IPPT PAN, Ossolineum, Wrocław.
- [53] (1983) Paczelt, I.: Incremental variational principles in contact problems, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.*, 96, No. 1–4, pp. 19–57.
- [54] (1975) Panagiotopoulos, P. D.: A nonlinear programming approach to the unilateral contact and friction boundary value problem in theory of elasticity, *Ing. Arch.*, vol. 44, pp. 421–432.
- [55] (1985) Panagiotopoulos, P. D.: Inequality Problems in Mechanics and Applications, Birkhäuser, Boston.
- [56] (1989) Parisch, H.: A consistent tangent stiffness matrix for three-dimensional non-linear contact analysis, *Int. j. num. methods eng.*, vol. 28, pp. 1803–1812.
- [57] (1983) Pires, E. B., Oden, J. T.: Analysis of contact problems with friction under oscillating loads, *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 39, pp. 337–362.
- [58] (1986) Rabier, P., Martins, J. A. C., Oden, J. T., Campos, L.: Existence and local uniqueness of solution to contact problems in elasticity with nonlinear friction laws, *Int. J. Engng. Sci.*, vol. 24, No. 11, pp. 1755–1768.
- [59] (1970) Решетов, Д. Н., Кирсанова, В. И. (Reshetov und Kirsanova): Касательная контактная подотливность деталей. *Изд. Машиноведение*, Нр. 2, с. 88–101.
- [60] (1979) Schomburg, U.: Die Penalty-Methode mit finiten Elementen in der Technischen Mechanik, Habilitation, RWTH Aachen.
- [61] (1989) Shyu, A. F., Chang, T. Y., Saleeb, A. F.: Friction-Contact Analysis Using a Mixed Finite Element Method, *Comp. & Struct.*, vol. 32, No. 1, pp. 223B242.
- [62] (1984) Simo, J. C., Wriggers, P., Taylor, R. L.: A Perturbed Lagrangian Formulation for the Finite Element Solution of Contact Problems, Dept. of civil Engineering, University of California, Berkeley, Report No. UCB-SESM-84-14.
- [63] (1986) Simo, J. C., Wriggers, P., Schweizerhof, R. H., Taylor, R. L.: Finite Deformation Post Buckling Analysis Involving Inelasticity and Contact Constraints, *Int. j. num. methods eng.*, vol. 23, pp. 779–800.
- [64] (1988) Skalski, K.: Zagadnienia kontaktowe w zakresie sprężysto-plastycznym, s. 211–273, w: *Mechanika kontaktu powierzchni* (ed. Z. Mróz), IPT PAN, Ossolineum, Wrocław.
- [65] (1986) Stein, E., Wagner, W., Wriggers, P.: Finite Element Postbuckling Analysis of Shells with Nonlinear Contact Constraints, pp. 719–744, in: *Finite Element Methods for Nonlinear Problems*, Trondheim, Norway, (ed. P. G. Bergan, Bathe, K. J., W. Wunderlich), Springer Verlag, Berlin.

- [66] (1988) Telega, J. J.: Nierówności wariacyjne w zagadnieniach kontaktowych mechaniki, s. 51–165, w: *Mechanika kontaktu powierzchni* (ed. Z. Mróz), IPPT PAN, Ossolineum, Wrocław.
- [67] (1984) Villanueva-Leal, A., Hinduja, S.: Modelling the characteristics of interface by the finite element method, *Proc. Inst. Mech. Engrs.*, vol. 198C, No. 4, pp. 9–23.
- [68] (1985) Wriggers, P., Simo, J. C.: A Note on Tangent Stiffnesses for Fully Nonlinear Contact Problems, *Comm. Appl. Num. Meth.* vol. 1, pp. 199–203.
- [69] (1985) Wriggers, P., Simo, J. H., Taylor, R. L.: Penalty and augmented Lagrangian formulations for contact problems, *Proceed. of the NUMETA 85 Conf.*, Swansea.
- [70] (1987) Wriggers, P., Wagner, W., Stein, E.: Algorithms for non-linear contact constraints with applications to stability problems of rods and shells, *Computational Mechanics*, vol. 2, pp. 215–230.
- [71] (1987) Wriggers, P.: On consistent tangent matrices for frictional contact problems, *Proceed. of the Conf. NUMETA 87*, Swansea, pp. C15/1–C15/8.
- [72] (1988) Wriggers, P.: Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Elemente-Methode, *Habilitation*, TU Hannover.
- [73] (1990) Wriggers, P., Vu-Van, T., Stein, E.: Finite-Element-Formulation of Large Deformation Impact-Contact-Problems with Friction, submitted to *Comp. & Struct.*
- [74] (1972) Zienkiewicz, O. C.: *Metoda elementów skończonych*, Arkady, Warszawa.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. J. Altenbach
 Technische Universität „Otto von Guericke“
 Institut für Festkörpermechanik
 Universitätsplatz 2
 O-3010 Magdeburg

Dr.-Ing. R. Buczkowski
 Technische Hochschule Szczecin
 Lehrstuhl für Technische Mechanik
 70-310 Szczecin
 Al. Piastów 19
 Polen