

# FEM-Lösung des Problems der St.-Venantschen Torsion mit Hilfe der Wölbfunktion

Siegfried Koczyk, Walter Weese

*Es wird das Problem der St.-Vénantschen Torsion eines geraden Stabes beliebigen Querschnitts mit Hilfe der Methode der finiten Elemente gelöst. Die Bezugnahme auf die Wölbfunktion  $\omega$  (Deformationsmethode) bietet gegenüber der Anwendung der Torsionsfunktion  $\Phi$  (Kraftgrößenmethode) wesentliche Vorteile, da keine wesentlichen Randbedingungen zu erfüllen sind. Es können alle wichtigen Kenngrößen wie Torsionsträgheitsmoment, Torsionswiderstandsmomente beliebiger Querschnittspunkte, Koordinaten des Schubmittelpunktes usw. berechnet werden. Durch die Anwendung isoparametrischer 8-Knoten-Viereckelemente und der dazu kompatiblen 6-Knoten-Dreieckelemente ist auch eine gute Approximation gekrümmter Querschnittskonturen möglich. Die Methode ist allgemeingültig und ersetzt zahlreiche bekannte Näherungsverfahren.*

*The problem of St.-Venants torsion of a straight bar is solved for an arbitrary cross section by application of the finite element method. The reference of the warping function  $\omega$  (method of deformation) offer many advantages in relation to the application of the stress function  $\Phi$  (methode of forces), because a satisfaction of essentials boundary conditions is not necessary. It is possible to calculate all the important coefficients like the torsional constant, the coefficients of shear stresses for any point, the coordinates of shear center etc. In consequence of the use of 8-nodal points isoparametriques quadrangular elements and the compatibles 6-nodal points triangles a good approximation of any cross-sectional shape is possible. The method is universal and substitute many known approximates procedures.*

## 1. Einleitung

Die Erarbeitung und der Einsatz von Rechenprogrammen zur statischen und dynamischen Analyse von Stabtragwerken erfordert die Kenntnis bestimmter Querschnittskennwerte, wie Fläche, Flächenträgheitsmomente, Torsionsträgheitsmoment, Widerstandsmoment usw. Die zur Bestimmung der Biegeverformung und der Biegespannung erforderlichen Kennwerte können im allgemeinen problemlos ermittelt werden, da nur eine Integration über die Querschnittsfläche ausgeführt werden muß.

Demgegenüber bereitet die Berechnung der entsprechenden Kennwerte zur Lösung des Problems der St.-Venantschen Torsion erheblich mehr Mühe, da sie im allgemeinen Fall die Lösung einer partiellen Differentialgleichung erfordert. In der Praxis stehen dem Berechnungsingenieur zahlreiche Methoden zur Lösung des Problems zur Verfügung, die den unterschiedlichsten Querschnittsformen angepaßt sind, deren entscheidender Nachteil aber in der mangelnden Universalität besteht. Man kann, wie allgemein bekannt, einmal die Verwölbung des Querschnitts  $\omega = \omega(x, y)$  als zu bestimmende Funktion auffassen [1] und erhält die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta \omega = 0, \quad (1)$$

wobei  $\omega$  auf dem Rand des Querschnitts der Bedingung

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) dy - \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} + x \right) dx = 0 \quad (2)$$

genügen muß.

Zum anderen kann man aber auch von einer Spannungsfunktion  $\Phi = \Phi(x; y)$  ausgehen ( $z = \text{Stabachse}$ ), mit

$$\tau_{zx} = 2G \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \tau_{zy} = -2G \vartheta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (3)$$

und erhält die Poissonsche Differentialgleichung

$$\Delta \Phi = -1 \quad (4)$$

mit  $\Phi = \text{const}$  auf dem Rand, wobei bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen die Konstante auf jedem Rand im allgemeinen einen anderen Wert besitzt. Aufgrund der einfacheren Randbedingung wurde bislang der Methode der Spannungsfunktion der Vorzug gegeben. Die wichtigsten Lösungsverfahren, die bisher entwickelt bzw. angewandt wurden, seien im folgenden nochmals kurz umrissen.

### a) Methode der Konformen Abbildung mit komplexen Funktionen [4]:

Die Methode, die insbesondere zur Lösung analoger Probleme der Strömungstechnik und der Potentialtheorie eingesetzt wird, liefert für bestimmte Spezialfälle die exakte Lösung. Sie hat sich aber in der praktischen Anwendung nicht durchsetzen können.

### b) Methoden der Reihenentwicklung [1], [2]:

Auch diese Methode liefert nur für einfache Querschnittsformen (Rechteckquerschnitt) die erforderlichen Kennwerte bei erträglichem Rechenaufwand. Als Lösungsmethode für komplizierte Querschnittsformen ist sie gleichfalls nicht geeignet.

### c) Differenzenmethode [3]:

Durch Ersetzen der partiellen Ableitungen durch entsprechende Differenzenquotienten wird das Problem auf die Lösung eines endlichen linearen Gleichungssystems zurückgeführt. Die mit dieser Diskretisierung verbundenen Nachteile sind allgemein bekannt. Auch diese Methode hat sich in der Praxis nicht durchgesetzt.

### d) Semiinverse Lösungsmethode [1], [5]:

Der Grundgedanke, Funktionen zu wählen, die den Randbedingungen eines bestimmten Querschnitts bereits genügen und durch Kombination derselben eine Lösung der

Differentialgleichung in möglichst guter Näherung zu erreichen, ist gleichfalls nur für einfache Querschnitte zu realisieren.

e) *Näherungsmethode für dünnwandige offene Querschnitte [1], [2]:*

Ausgehend von der Näherungslösung des schmalen Rechtecks erhält man eine Näherungslösung für den allgemeinen Fall eines dünnwandigen offenen Profils. Die hieraus resultierenden Formeln werden häufig in der ingenieurtechnischen Praxis angewandt.

f) *Näherungsmethode für dünnwandige geschlossene Querschnitte [1], [2]:*

Im Gegensatz zum dünnwandigen offenen Profil können sich in den Zellen des geschlossenen Profils Schubflüsse ausbilden, deren Wirkung bezüglich Spannungs- und Verformungszustand durch die Bredtschen Formeln erfasst wird. Auch diese Formeln haben ihren festen Platz in der Berechnung dünnwandiger Hohlquerschnitte.

g) *Finite-Elemente-Methode und Spannungsfunktion  $\Phi$*

Es ist leicht möglich, auch für das Problem der St-Venant'schen Torsion das elastische Potential anzugeben, welches die Grundlage der FEM bildet. Da nahezu alle bisher erwähnten Methoden von der Spannungsfunktion ausgehen, ist man, was die Entscheidung zwischen Kraftgrößenmethode (Spannungsfunktion  $\Phi$ ) und Deformationsmethode (Wölbfunktion  $\omega$ ) anbelangt, auch bei der Anwendung der FEM sozusagen vorprogrammiert und auf  $\Phi$  ausgerichtet. Die hieraus resultierenden Programme sind seit langem bekannt [6], [12] und gestatten die Lösung für beliebige Querschnittsformen. Ein entscheidender Nachteil ist jedoch, daß bezüglich des elastischen Potentials die Bedingung  $\Phi = konst.$  eine wesentliche Randbedingung ist, die erfüllt werden muß. Des weiteren sind die Kenntnis der Wölbfunktion  $\omega$  ebenso wie die Lage des Schubmittelpunktes im Falle der Wölbkrafttorsion unbedingt erforderlich. Dies wird jedoch durch die Spannungsfunktion zunächst nicht geliefert und erfordert zusätzlichen Rechenaufwand.

Die Vorzüge der Deformationsmethode, die im folgenden zugrunde gelegt wird, sind auch in diesem Falle offensichtlich. Da nur eine Starrkörperverschiebung des Trägers in axialer Richtung verhindert werden muß, Verschiebungsrandbedingungen, also wesentliche Randbedingungen, aber nicht vorliegen, ist der Umfang der Berechnung bei gleicher Genauigkeit wesentlich geringer. Das Verfahren ist universell und kann sowohl auf kompakte als auch auf dünnwandige offene und geschlossene Querschnitte angewandt werden. Querschnittsfläche, Lage des Schwerpunktes und Flächenträgheitsmomente werden durch numerische Integration, gewissermaßen nebenbei, mit ermittelt.

## 2. Grundgleichungen und elastisches Potential

Gegeben sei ein gerader Stab beliebiger Querschnittsform (Bild 1).

Es sei  $\varphi$  der Verdrehwinkel des Querschnitts B gegenüber A und  $\omega = \omega(x, y)$  die Wölbfunktion.

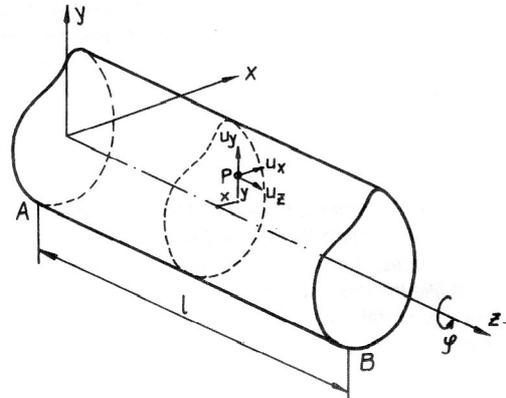


Bild 1  
Tordierter Stab

Für die Verschiebungen eines beliebigen Punktes P gilt

$$\begin{aligned} (\vartheta = \frac{\varphi}{l}): \\ u_x &= -\frac{\varphi}{l} z \cdot y \\ u_y &= \frac{\varphi}{l} z \cdot x \\ u_z &= \frac{\varphi}{l} \cdot \omega(x, y). \end{aligned} \quad (5)$$

Die Verzerrungen in P sind

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\varphi}{l} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\varphi}{l} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (6)$$

Elastisches Materialverhalten vorausgesetzt, erhält man mit dem Gleitmodul G die Torsionsschubspannungen zu:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G \frac{\varphi}{l} \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right) \\ \tau_{zy} &= G \frac{\varphi}{l} \cdot \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right) \end{aligned} \quad (7)$$

Das elastische Potential des Stabes unter Berücksichtigung des Torsionsmomentes  $M_t$  ist

$$\pi = \frac{1}{2} G \cdot J \int_A (\gamma_{zy}^2 + \gamma_{zx}^2) dA - M_t \cdot \varphi \quad (8)$$

Ersetzt man  $\gamma_{zx}$  und  $\gamma_{zy}$  entsprechend (6), so erhält man

$$\pi = \frac{1}{2} G \frac{\varphi^2}{I} \int \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA - M_t \cdot \varphi \quad (9)$$

### 3. Variation des elastischen Potentials

#### 3.1. Variation bezüglich $\varphi$

Die Variation bezüglich  $\varphi$  ergibt

$$\delta^{(\varphi)} \pi = \left[ G \frac{\varphi}{I} \int \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 \right\} dA - M_t \right] \cdot \delta \varphi = 0 \quad (10)$$

Das Flächenintegral ist das Torsionsträgheitsmoment  $J_t$

$$J_t = \int_A \left\{ \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 \right\} dA \quad (11)$$

und man erhält aus (10) die bekannte Formel

$$G \cdot \frac{\varphi}{I} \cdot J_t - M_t = 0 \quad (12)$$

oder

$$\varphi = \frac{M_t \cdot I}{G \cdot J_t}$$

Im Falle des Kreisquerschnitts mit  $\omega = 0$  erhält man wie bekannt für  $J_p$  das polare Trägheitsmoment  $J_t$ .

#### 3.2. Variation bezüglich $\omega$ , Einführung finiter Elemente

Die Variation des elastischen Potentials bezüglich der gleichfalls noch unbekanntes Wölbfunktion wird auf der Grundlage finiter Elemente durchgeführt. Es werden isoparametrische 8-Knoten-Viereckelemente und die hierzu kompatiblen 6-Knoten-Dreieckelemente benutzt, die sich bereits bei der Lösung anderer Probleme bewährt haben [10], [11]. Eine mögliche Vernetzung eines Querschnitts zeigt Bild 2.

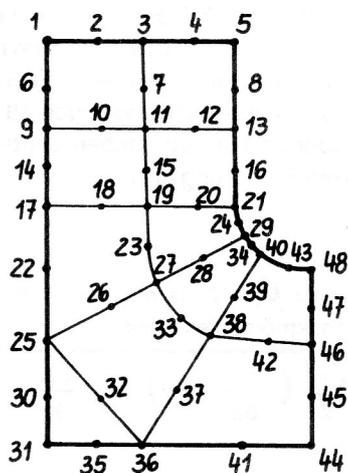


Bild 2  
Vernetzung und Knotennumerierung

Innerhalb eines Elementes gilt die Parameterdarstellung [10], [11], wobei  $x$  und  $y$  auf den Schwerpunkt des Querschnitts bezogen sind.

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^N \omega_i^{(K)} G_i(\xi, \eta), & N &= 6, 8 \\ x &= \sum_{i=1}^N x_i^{(K)} G_i(\xi, \eta), & -1 &\leq \xi \leq +1 \\ & & -1 &\leq \eta \leq +1 \\ y &= \sum_{i=1}^N y_i^{(K)} G_i(\xi, \eta), & k &= \text{globale Knotennummer} \\ & & i &= \text{lokale elementbezogene Knotennummer} \end{aligned} \quad (13)$$

Die Ansatzfunktionen  $G_i(\xi, \eta)$  sind allgemein bekannt [6], [10], [11] und bedürfen keiner besonderen Erklärung. Differentiation nach  $x$  und  $y$  sowie Integration einer Funktion sind in [10] ebenfalls ausführlich erläutert. Das elastische Potential  $\Pi$  stellt sich somit als Summe der Potentiale aller Elemente dar und enthält  $D$  als unbekanntes Größen die  $\omega_i^{(K)}$  der Knotenpunkte. Für ein beliebiges Element  $e$  folgt demnach

$$\begin{aligned} \delta^{\omega} \pi_e &= \int_{(A_e)} \left\{ \left( \sum_{j=1}^N \left[ \omega_j \frac{\partial G_j}{\partial x} - y_j G_j \right] \right) \frac{\partial G_j}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + \left( \sum_{j=1}^N \left[ \omega_j \frac{\partial G_j}{\partial y} + x_j G_j \right] \right) \frac{\partial G_j}{\partial y} \right\} dA_e \cdot \delta \omega_j = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

$j = 1 \dots N$

Die Beziehung (14) umfaßt insgesamt  $N$  lineare Gleichungen entsprechend der Zahl der Knotenpunkte des Elementes und stellt die Steifigkeitsbeziehung

$$\underline{K}^{(e)} \cdot \underline{W}^{(e)} = \underline{F}^{(e)} \quad (15)$$

des Elementes dar.

Ein Element  $K_{ij}^{(e)}$  der Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}^{(e)}$  ist danach

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{A_e} \left[ \frac{\partial G_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial G_j}{\partial x} + \frac{\partial G_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_j}{\partial y} \right] dA_e \quad (16)$$

und ein Element  $F_i^{(e)}$  des „Lastvektors“  $\underline{F}^{(e)}$

$$F_i^{(e)} = - \int_{A_e} \left[ x \cdot \frac{\partial G_i}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial G_i}{\partial x} \right] dA_e \quad (17)$$

Der Vektor  $\underline{W}^{(e)}$  enthält die Werte der Wölbfunktion der Knotenpunkte des Elementes  $e$ . Nach Zusammenfügung der Elementsteifigkeitsbeziehungen erhält man schließlich mit

$$\underline{K} \cdot \underline{W} = \underline{F} \quad (18)$$

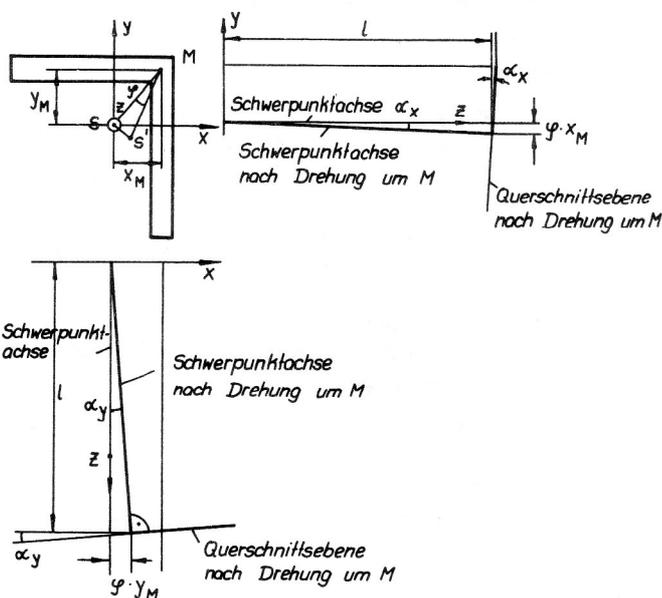
ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Werte der Wölbfunktion in den Knotenpunkten mit der symmetrischen bandförmigen Steifigkeitsmatrix  $\underline{K}$ .

### 4. Randbedingung, Lösung, Schubmittelpunkt

Es ist, wie schon erwähnt, ein Vorteil der hier benutzten Deformationsmethode, daß lediglich die Starrkörperbewegung des Querschnitts in  $z$ -Richtung verhindert werden muß d.h., es muß zunächst die Verwölbung eines beliebigen Knotenpunktes verhindert werden.

Auch die Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften eines Querschnitts ist problemlos möglich, da die Verwölbung auf einer Symmetrielinie gleich Null ist. Zur Lösung des Gleichungssystems wird das Verfahren von Cholesky für symmetrische Bandmatrizen benutzt. Entsprechende Programme sind gleichfalls in [10] angegeben.

Da die Verdrehung des Querschnitts auf die Schwerpunktschwerachse bezogen und die axiale Verschiebung eines beliebigen Punktes verhindert wurde, enthält die Wölbfunktion im allgemeinen Fall noch einen konstanten und linear veränderliche Anteile. Die Elimination dieser Anteile führt schließlich auf die Koordinaten des Schubmittelpunktes M und eine „bereinigte“ Wölbfunktion. Es sei  $u_{z_M}$  die Verschiebung in axialer Richtung, wenn die Drehung um den Schubmittelpunkt M erfolgt. Die durch Lösung von (18) ermittelte Verschiebung sei  $u_{z_S}$  (Bezugnahme auf den Schwerpunkt).



**Bild 3**  
Verdrehung der Schwerpunktschwerachse

Es gilt dann für einen beliebigen Punkt des Querschnitts (Bild 3)

$$u_{z_M} = u_{z_S} - u_{z_0} - \alpha_y \cdot x + \alpha_x \cdot y \quad (19)$$

Es gilt mit den Koordinaten des Schubmittelpunktes  $x_M$  und  $y_M$  für die Winkel  $\alpha_x$  bzw.  $\alpha_y$  gemäß Bild 3:

$$\alpha_x = \frac{\varphi}{l} \cdot x_M \quad (20)$$

$$\alpha_y = \frac{\varphi}{l} \cdot y_M$$

Demnach nach Einführung der Wölbfunktion  $\omega$

$$\omega_M = \omega_S - \omega_{SO} - y_M \cdot x + x_M \cdot y \quad (21)$$

Da  $\omega_M$  definitionsgemäß weder einen konstanten noch linear veränderliche Anteile enthält, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \omega_M dA &= \int_{(A)} \omega_S dA - \omega_{SO} A - y_M \int_{(A)} x dA \\ &+ x_M \int_{(A)} y dA = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Da die statischen Momente bei Bezugnahme auf den Schwerpunkt verschwinden, erhält man für  $\omega_{SO}$

$$\omega_{SO} = \frac{1}{A} \int_{(A)} \omega_S dA. \quad (23)$$

Desgleichen müssen die statischen Momente von  $\omega_M$  verschwinden

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \omega_M \cdot x \cdot dA &= 0 \int_{(A)} \omega_S \cdot x \cdot dA - \omega_{SO} \int_{(A)} x dA \\ &- y_M \int_{(A)} x^2 dA + x_M \int_{(A)} xy dA = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \omega y dA &= \int_{(A)} \omega_S y dA - \omega_{SO} \int_{(A)} y dA - \\ &- y_M \int_{(A)} xy dA + x_M \int_{(A)} x^2 dA = 0 \end{aligned}$$

Daraus resultiert nach Einführung der Flächenträgheitsmomente

$$J_{xx} = \int_{(A)} y^2 dA, \quad J_{xy} = \int_{(A)} xy dA, \quad J_{yy} = \int_{(A)} x^2 dA \quad (25)$$

und der Wölbmomente

$$R_x = \int_{(A)} \omega_S y dA, \quad R_y = \int_{(A)} \omega_S \cdot x dA \quad (26)$$

das folgende Gleichungssystem zur Bestimmung von  $x_M$  und  $y_M$

$$J_{yy} \cdot y_M + J_{xy} \cdot x_M = R_y \quad (27)$$

$$J_{xy} \cdot y_M + J_{xx} \cdot x_M = -R_x.$$

Die Lösung dieses Systems ist

$$x_M = - \frac{R_x \cdot J_{yy} + R_y J_{xy}}{J_{xx} \cdot J_{yy} - J_{xy}^2} \quad (28)$$

$$y_M = \frac{R_y \cdot J_{xx} + R_x J_{xy}}{J_{xx} \cdot J_{yy} - J_{xy}^2}.$$

Entsprechende Vereinfachungen ergeben sich, falls  $x$  und  $y$  Hauptachsenkoordinaten sind. Nachdem  $x_M$  und  $y_M$  bekannt sind, bereitet die Bestimmung des Sektorträgheitsmomentes  $J_w$  durch numerische Integration keine Schwierigkeiten.

$$J_w = \int_{(A)} \omega_M^2 dA \quad (29)$$

$\omega_M$  wird entsprechend (21) bestimmt, und es kann damit auch das Problem der Wölbkrafttorsion für beliebige Querschnittsformen gelöst werden. Ebenso können jetzt die Torsionsschubspannungen gemäß (7) in jedem Punkt des Querschnitts angegeben werden. Berücksichtigt man die Beziehung (12)

$$G \frac{\varphi}{l} = \frac{M_t}{J_t},$$

so erhält man für  $M_t = 1$  die reziproken Werte des Torsionswiderstandsmomentes gemäß

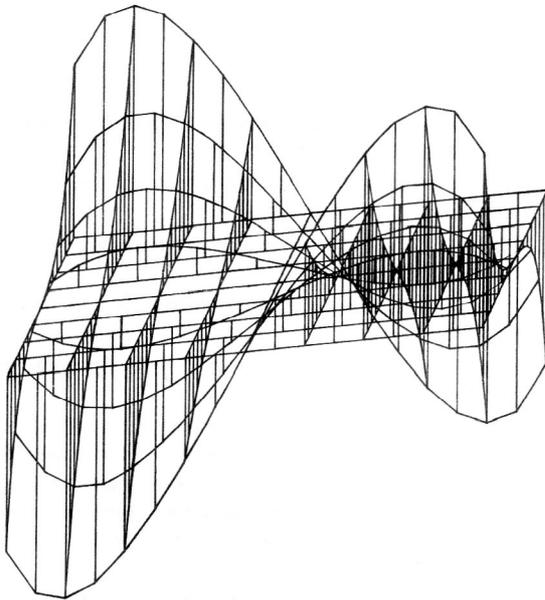
$$\frac{1}{W_t} = \frac{1}{J_t} \sqrt{\left( \frac{\partial \omega}{\partial x} - y \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} + x \right)^2}. \quad (30)$$

## 5. Beispiele

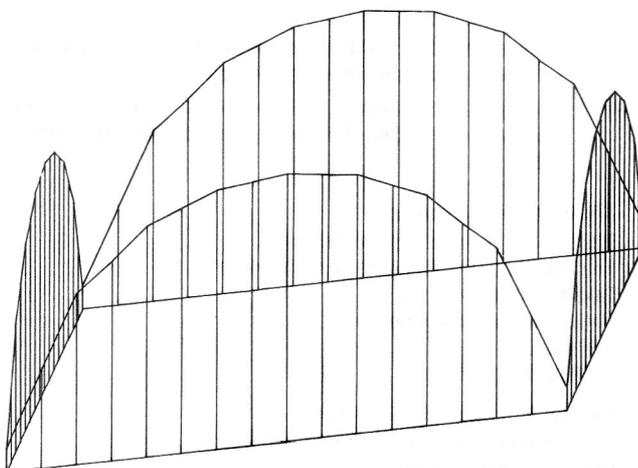
An ausgewählten Beispielen werden die Richtigkeit der Vorgehensweise und einige Anwendungsmöglichkeiten dargelegt. Da die theoretischen Grundlagen allgemeingültig sind, schließen sie ausgeprägte dünnwandige Querschnittsformen mit ein. Für einen Rechteckquerschnitt mit dem Abmessungsverhältnis  $b/h = 1,5$  sind in den Bildern 4 und 5 die Verwölbung und die resultierenden Schubspannungen dargestellt.

Die Symmetrieeigenschaften wurden hierfür nicht ausgenutzt. Bereits bei der Vernetzung in  $8 \times 8$  Elemente ergeben sich gute Näherungswerte für das Torsionsträgheitsmoment (0,12 % Abweichung) und für die maximalen Schubspannungen (0,35 % Abweichung).

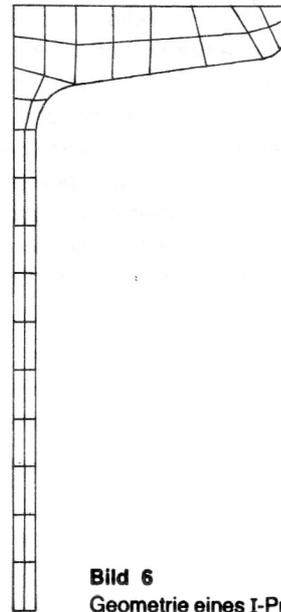
Ein zweiter Test erfolgte an einem dünnwandigen Standardprofil I20 (Bild 6).



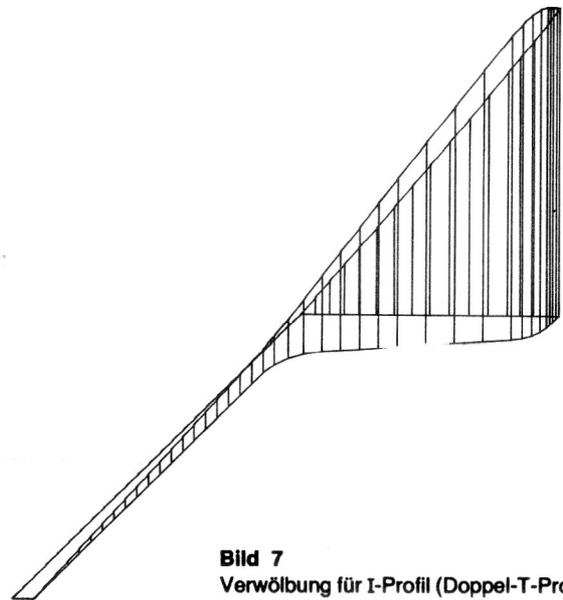
**Bild 4**  
Verwölbung für ein Rechteck



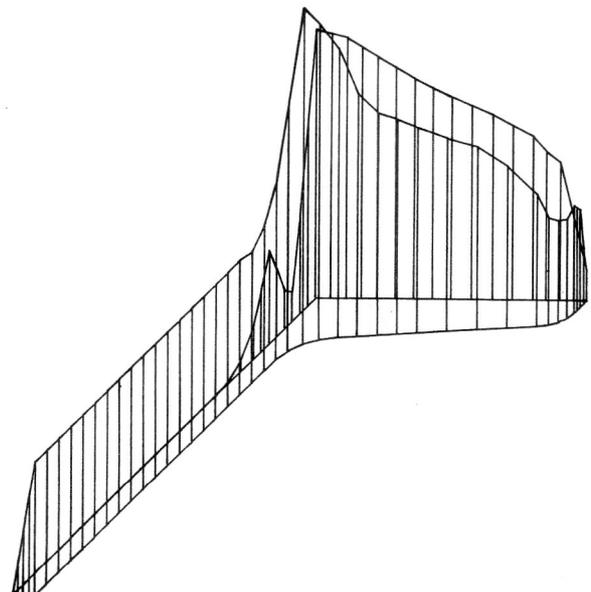
**Bild 5**  
Resultierende Schubspannungen für I-Profil (Doppel-T-Profil)



**Bild 6**  
Geometrie eines I-Profiles einschließlich FE-Vernetzung  
(Doppel-T-Profil)



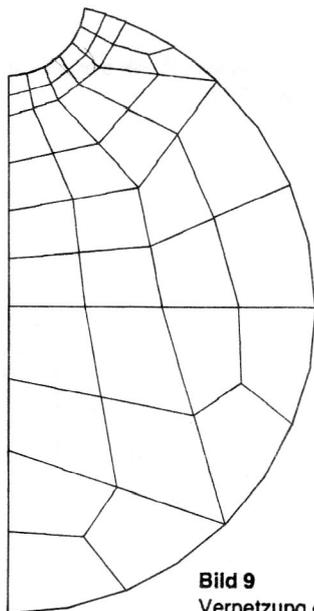
**Bild 7**  
Verwölbung für I-Profil (Doppel-T-Profil)



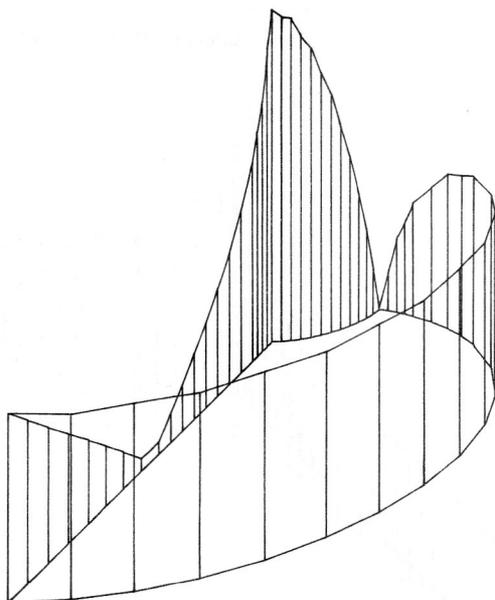
**Bild 8**  
Resultierende Schubspannungen für I-Profil (Doppel-T-Profil)

In diesem Falle wurde die doppelte Symmetrie ausgenutzt. Während im Bild 6 die verwendete Vernetzung mit eingezeichnet wurde, zeigen die Bilder 7 und 8 die Verwölbung und die Schubspannungsverteilung. Der Vergleich zur vereinfachten Rechnung entsprechend der Dünnwandigkeit liefert nur geringe Abweichungen in den Maximalwerten. Beim Torsionsträgheitsmoment ist die Abweichung jedoch 12,7 %. Schließlich wird für eine Wellennut (Bild 9) eine Berechnung durchgeführt, die insbesondere die Kerbwirkung im Nutgrund anzeigen soll.

Es wird von einer einfachen Symmetrie ausgegangen. Im Bild 10 ist der resultierende Spannungsverlauf entlang der Kontur dargestellt. Im ungestörten Bereich erhält man die Werte nach der elementaren Theorie.



**Bild 9**  
Vernetzung einer Wellennut



**Bild 10**  
Resultierender Schubspannungsverlauf entlang der Kontur der Wellennut

## 6. Anwendungen im Programmsystem COSAR-BALTRA

Aus [7] geht eine Charakterisierung des Programmsystems COSAR-BALTRA hervor. Auf der Grundlage der Methode der finiten Elemente ermöglicht BALTRA die Berechnung ebener und räumlicher Stabtragwerke. Auf Anwendungsgebiete und Weiterentwicklungen wurde in [8] hingewiesen. Ein höchst effektiver Preprozessor wurde in [9] vorgestellt. Damit ist eine universelle Anwendung des o.g. Programmsystems für statische, dynamische und Stabilitätsprobleme möglich, wenn die entsprechenden Querschnittswerte vorliegen. Die durch diesen Beitrag geschaffenen Möglichkeiten erlauben neben der Darstellung der Verwölbung und der Schubspannungen auch die Berechnung des Torsionsträgheitsmomentes, des Schubmittelpunktes und der Widerstandsmomente in jedem Querschnittspunkt. Diese Größen werden auf Listen abgelegt und können z. B. durch den Preprozessor BALCAD [9] über Symbole abgerufen werden.

### LITERATUR

- [1] Göldner, H.: Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre, Band 1. Fachbuchverlag Leipzig 1983.
- [2] Göldner, H., Landgraf, G.: Arbeitsbuch Höhere Festigkeitslehre. Fachbuchverlag Leipzig 1981.
- [3] Pfau, H.: Differenzenmethode in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig 1987.
- [4] Weber, C., Günther, W.: Torsionstheorie. Akademie-Verlag Berlin 1958.
- [5] Szabo, I.: Höhere Technische Mechanik. Springer-Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg 1956.
- [6] Weese, W.: Anwenderdokumentation für das Programm SAVETO 81. TU Magdeburg, Sektion Maschinenbau 1982.
- [7] Koczyk, S.: COSAR-BALTRA – Ein Programmsystem zur Berechnung ebener und räumlicher Stabtragwerke auf Büro- und Personalcomputer. Maschinenbautechnik, Berlin 36 (1987) 8.
- [8] Fischer, U., Koczyk, S.: FEM-Software für Kleinrechner. Technische Mechanik, Magdeburg 9 (1988) Heft 1, S. 101 – 104.
- [9] Fischer, U.: BALCAD – Ein Programm zum rechnergestützten Preprocessing für Balkentragwerke. Maschinenbautechnik, Berlin 38 (1989) 12.
- [10] Fischer, U., Grochla, J., Koczyk, S., Weese, W.: Finite-Elemente-Programme in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig, 1986.
- [11] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Carl-Hanser-Verlag München/Wien, 2. Aufl., 1984.
- [12] Kämmel, G., Franek, H. I., Recke, H. G.: Einführung in die Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag Leipzig 1988.

### Anschrift der Verfasser:

Doz. Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk  
Technische Universität „Otto von Guericke“  
Fakultät Maschinenbau  
Institut für Festkörpermechanik  
PSF 4210  
O-3010 Magdeburg

Prof. Dr.-Ing. habil. Walter Weese  
Technische Universität „Otto von Guericke“  
Fakultät Maschinenbau  
Institut für Festkörpermechanik  
PSF 4210  
O-3010 Magdeburg