

Geometrische Nichtlinearität und kontinuierliche Plastizierung in räumlichen Stabtragwerken aus homogenem Werkstoff – Statik und Kinetik mit STATRA-DGL

H. Müller, E. Stanoew

Für räumlich wirkende Tragwerke, die aus geraden bzw. imperfekt geraden dünnwandigen Stäben mit offenem, formtreuem Querschnitt bestehen, werden unter Beachtung physikalischer und geometrischer Nichtlinearitäten Algorithmen angegeben, die das mechanische Verhalten bis zum Systemversagen beschreiben. Verarbeitbar sind für Statik und Kinetik elastisch-plastische Stoffgesetze mit isotroper und/oder kinematischer Verfestigung, im Fall der Kinetik auch ein elastisch/viskoidealplastisches Stoffgesetz. Die geometrischen Nichtlinearitäten erfassen kleine Verzerrungen und kleine bis mäßig große Rotationen. An Beispielen werden die erfaßbaren Effekte demonstriert.

Geometric non-linearity and continuous plasticizing in spatial framed structures of homogeneous material-statics and kinematics using STATRA – DGL

For spatial framed structures made of straight or imperfect straight thin-walled beams with open geometrically true section, algorithms are indicated, taking into account physical and geometric non-linearities. These algorithms describe the mechanical behaviour until system breakdown. For statics and kinetics, elastic-plastic materials laws of isotropic and/or kinematic consolidation, in case of kinetics, an elastic/viscoideal plastic material's law, as well, can be used. By geometric non-linearities, small strains and small up to moderately great rotations are taken into consideration. The effects detectable are demonstrated by means of examples.

1. Zielstellung

Die Erfassung physikalischer Nichtlinearitäten von räumlichen Stabtragwerken über Fließgelenkmodelle hat bezgl. Wirklichkeitsnähe beträchtliche Nachteile, s. z.B. [1] S. 8, 9. Die Nachteile dieser „diskretisierten“ Plastizierungsbeschreibung können durch den Übergang zu einer kontinuierlichen Plastizierungserfassung überwunden werden. Im Programmsystem STATRA sind für den statischen Fall zwei Varianten erarbeitet worden: eine Variante, in der die Stäbe in finite Elemente unterteilt werden – STATRA-FEM [2], [3] – und eine Variante, bei der innerhalb der Stäbe – wie bei der Elastizitätstheorie II. Ordnung von [4] und bei der Fließgelenkmodellierung von [1] – mit dem DGL-System gearbeitet wird [5]. Hier wird die zweite Variante beschrieben, und zwar sowohl für den Fall der Statik als auch für den Fall der Kinetik. In beiden Fällen enthalten die elastisch-plastischen Stoffgesetze die Möglichkeiten isotroper und/oder kinematischer Verfestigung. Im Fall der Kinetik ist auch ein elastisch/viskoidealplastisches Stoffgesetz abarbeitbar.

2. Voraussetzungen und Möglichkeiten

Das räumliche Stabsystem kann beliebige Topologie sowie weitgehend beliebige Belastungs- und Massenverteilung aufweisen. Die Stäbe können ideal gerade oder mit spannungslosen Quer- und Torsionsvorverformungen imperfekt-gerade sein. Die Anschlüsse der Stäbe an die Knoten sind auch mit Schnittkraftnullfeldern und Exzentrizitäten in beliebigen Richtungen möglich.

Die geometrische Nichtlinearität wird erfaßt:

- 1) durch „Gleichgewicht am verschobenen System“, und
- 2) durch die verwendeten nichtlinearen kinematischen Beziehungen, die große Verschiebungen bei kleinen

Rotationen und Verzerrungen zulassen. Die Querschnitte sind dünnwandig, offen und nichtwölbfrei. Für einzellige Hohlquerschnitte wird algorithmisch eine Näherungslösung für das elastisch-plastische Verhalten vorgeschlagen – [5], S. 71. Weiterhin gelten alle üblichen Hypothesen und Vernachlässigungen der Stabtheorie mit Wölbkrafttorsion – siehe z. B. [4].

3. Konstitutive Beziehungen

3.1. Elastisch-plastisches Materialverhalten

Es wird die klassische Plastizitätstheorie mit dem Fließflächenkonzept für ein isotropes Material angewendet. Ausgangspunkt ist das allgemeine Werkstoffgesetz des elastisch-plastischen Materials – siehe [5, S. 16]:

$$d\sigma = \left\{ D_e - D_e \frac{\partial F}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_e \left(A + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D_e \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^{-1} \right\} d\varepsilon = D_{ep} d\varepsilon \quad (3.1)$$

mit: D_e : „elastische“ Werkstoffmatrix
 F : Fließfunktion
 A : Verfestigungsparameter

Die für den Ausgangszustand geltende Mises'sche Fließbedingung

$$\frac{1}{2} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) - \frac{1}{3} \sigma_F^2(\varepsilon_P) = 0 \quad (3.2)$$

ist modifiziert durch:

- 1) kinematische Verfestigung (Prager'sche Verfestigungsregel)

$$d\alpha'_{ij} = c(\varepsilon_P) d\varepsilon_{Pij}, \quad c(\varepsilon_P) = \frac{2}{3} H(\varepsilon_P) \quad (3.3)$$

- 2) isotrope Verfestigung

$$d\sigma_F = a(\varepsilon_P) d\varepsilon_P, \quad a(\varepsilon_P) = H(\varepsilon_P) \quad (3.4)$$

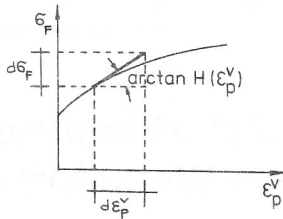


Bild 1
Verfestigungs-(Vergleichs-)kurve mit:
 $H(\epsilon_p^v)$: plastischer Tangentenmodul
 $\epsilon_p^v(\epsilon_p)$: plastische Vergleichsdehnung

Die Verfestigungs(Vergleichs-)kurve $\sigma_F(\epsilon_p^v)$ – Bild 1 – muß vorgegeben werden.

Aus dem Verfestigungsparameter A folgen die Werte

$$c(\epsilon_p^v) = \frac{2}{3} H(\epsilon_p^v)(1-m) \quad (3.5)$$

$$a(\epsilon_p^v) = H(\epsilon_p^v)m \quad (3.6)$$

wenn zusätzlich der Aufteilungsparameter m ($0 \leq m \leq 1$) vorgegeben ist.

Für den dünnwandigen Stab ergibt sich das Werkstoffgesetz (3.,1) mit der Fließbedingung für den zweiachsigen (σ, τ) -Fall

$$F = (\sigma - \sigma')^2 + 3(\tau - \tau')^2 - \sigma_F^2(\epsilon_p^v) = 0 \quad (3.7)$$

$$\text{zu: } \begin{bmatrix} d\sigma \\ d\tau \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} 1-t & -ts \\ -ts & (1-\mu)-ts^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\epsilon \\ \frac{1}{2} d\gamma \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$E_1 = \frac{E}{1-\mu^2}$$

mit: t, s : Funktionen des Gesamtspannungszustandes – [1, S. 22].

3.2. Elastisch/viskoplastisches Materialverhalten

Bei dynamischen Problemen, insbesondere bei stoßartiger Belastung, bei welcher der Einfluß der dann sehr hohen Verzerrungsgeschwindigkeit nicht vernachlässigbar ist, kommt das in Bild 2 dargestellte rheologische Modell zur Anwendung. Dieser elastisch/viskoplastische Körper hat viskose Eigenschaften nur für Spannungszustände oberhalb der Fließgrenze.

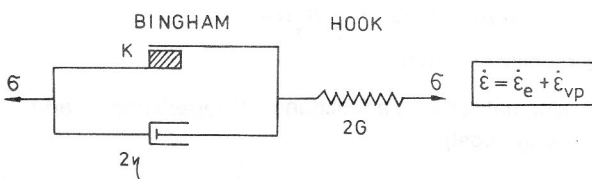


Bild 2
Modell des elastisch/viskoplastischen Körpers

Aus der Literatur – siehe z. B. [6] – sind die verallgemeinerten konstitutiven Gleichungen für den Bingham-Hook-Körper bekannt:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2G} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{ii} \delta_{ij} + \Theta < \phi \left(\frac{\sqrt{I_{D2}}}{K_F(A_{VP})} - 1 \right) > \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{I_{D2}}} \quad (3.9a)$$

$$\text{mit: } F = \frac{\sqrt{I_{D2}}}{K_F(A_{VP})} - 1 \quad (3.9b)$$

$$< \phi(F) > = \begin{cases} 0 & \text{für } F \leq 0 \\ \phi(F) & \text{für } F > 0 \end{cases} \quad (3.9c)$$

$$\Theta = \frac{K(A_{VP})}{2\eta} \quad (3.9d)$$

Mit dem oft verwendeten Potenzansatz $\phi(F) = F^\delta$ kann Gl. (3.9) für den zweiachsigen Fall des dünnwandigen Stabes aufgestellt werden. Nach Auflösung nach den Spannungsgeschwindigkeiten und numerischer Zeitintegration im Zeitinkrement Δt – siehe [5, S. 30] und [7] – folgt die inkrementelle Form des elastisch/viskoideal-plastischen Werkstoffgesetzes:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma \\ \Delta\tau \end{bmatrix} = E_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1-\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\epsilon \\ \frac{1}{2} \Delta\gamma \end{bmatrix} - E_1 \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1-\mu \end{bmatrix} \Delta\epsilon_{VP} \quad (3.10a)$$

$$\text{mit: } \Delta\epsilon_{VP} = \Delta t \left(\frac{1}{6} \dot{\epsilon}_{VP}(\sigma_n) + \frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{VP}(\sigma_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6} \dot{\epsilon}_{VP}(\sigma_{n+1}) \right) \quad (3.10b)$$

$$\dot{\epsilon}_{VP}(\sigma) = \frac{\sigma_F/\sqrt{3}}{2\eta} \left(\frac{\sqrt{I_{D2}}}{\sigma_F/\sqrt{3}} - 1 \right)^\delta \frac{1}{\sqrt{I_{D2}}} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma \\ \tau \end{bmatrix} \quad (3.10c)$$

4. Kinematische Beziehungen

Der Querschnittsbezugspunkt B (gleich Stabbezug Achse) ist beliebig – es erfolgt keine Normierung der Querschnittswerte.

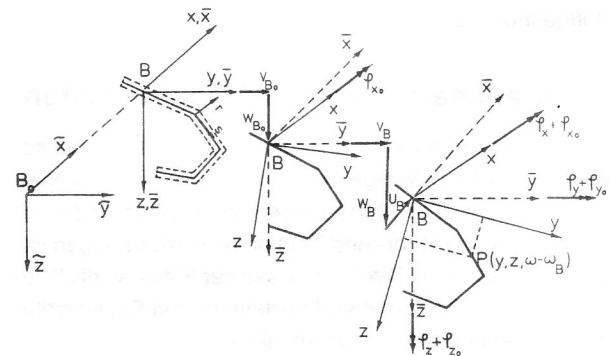


Bild 3
Unverschobener/vorverschobener/verschobener Querschnitt an der Stelle \bar{X}

Bei vorausgesetzter Kleinheit der Rotationswinkel ($\sin \varphi_x \approx \varphi_x$, $\cos \varphi_x \approx 1 - \frac{1}{2} \varphi_x^2$) ergeben sich die nichtlinearen Verzerrungs-Verschiebungs-Abhängigkeiten für den dünnwandigen Stab – [8, S. 30]

– die Längsdehnung

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(\bar{x}, y, z) = & u_B' + v_B' v_{B0}' + \frac{1}{2} v_B'^2 - (y - z(\varphi_x + \varphi_{x0})) v_B'' \\ & + w_B' w_{B0}' + \frac{1}{2} w_B'^2 - (z + y(\varphi_x + \varphi_{x0})) w_B'' \\ & + (z v_{B0}' - y w_{B0}') \varphi_x + (y^2 + z^2) (\varphi_{x0}' \varphi_x' + \frac{1}{2} \varphi_x'^2) - (\omega - \omega_B) \varphi_x'' \end{aligned} \quad (4.1)$$

– die Torsionsgleitung infolge St. Venantscher Torsion

$$\gamma_{xs}(\bar{x}, r, s) = 2r \varphi_x' \quad (4.2)$$

r: Koordinate in Dickenrichtung der Profilwand

5. Statik

5.1. Aufstellung des Dgl-systems

Die Anteile des Dgl-systems, die Gleichgewichtsbedingungen repräsentieren, werden für zwei benachbarte Punkte n und n + 1 (Zeitpunkte t und t + dt) des Belastungsprozesses aufgestellt.

$$\frac{dz_n}{dx} = \mathbf{A}(z_n) z_n + \mathbf{b}(z_n) \quad (5.1a)$$

$$\frac{d(z_n + \Delta z)}{dx} = \mathbf{A}(z_n + \Delta z)(z_n + \Delta z) + \mathbf{b}(z_n + \Delta z) \quad (5.1b)$$

Im Zeitpunkt (t + dt) werden alle Wirkungsgrößen um einen differentiellen Zuwachs Δ erweitert. Nach Subtraktion der Gl. (5.1a) von der Gl. (5.1b) erhält man das Dgl-system für die Änderungen Δz der Wirkungsgrößen.

$$\frac{d\Delta z_n}{dx} = \mathbf{A}(z_n) \Delta z + \Delta \mathbf{b}(z_n, \Delta z) \quad (5.2)$$

mit:

$$\Delta \mathbf{b}(z_n, \Delta z) = \{ \mathbf{A}(z_{n+1}) - \mathbf{A}(z_n) \} z_{n+1} + \{ \mathbf{b}(z_{n+1}) - \mathbf{b}(z_n) \} \quad (5.3)$$

Direkt in der Form (5.2) lassen sich auch die Schnittkraft-Verformungs-Beziehungen ableiten. Mit der in gl. (5.2) und (5.3) angedeuteten Aufspaltung der nichtlinearen Anteile läßt sich (später) aus der $\mathbf{A}(z_n)$ -Matrix die tangentielle Stabsteifigkeitsmatrix des Zeitpunktes t bilden.

Die Gleichgewichtsbeziehungen werden über das Prinzip der virtuellen Verbiebungen entwickelt – siehe [8]. Bei der Aufstellung der Schnittkraft-Verformungs-Beziehungen entstehen nach der Einführung der Verzerrungsincremente (analog der Gl. (4.1), (4.2)) in die Schnittkraftdefinitionen, z. B. ΔM_z , mit Berücksichtigung von (3.8),

$$\begin{aligned} -\Delta M_z = & \int_A \Delta \sigma y dA = \int_A (E_T(1-t) \Delta \varepsilon_x - E_T(-ts) \frac{1}{2} \Delta \gamma_{xs}) y dA \\ = & E_T \left\{ \int_A (1-t) y dA \Delta u_B' + \int_A (1-t) y^2 dA \Delta v_B'' + \dots \right\} \\ & + \int_A \Delta \sigma^* y dA \end{aligned} \quad (5.4)$$

eine Reihe (nichtnormierter) „elastisch-plastischer“ Querschnittssteifigkeiten. Der letzte Term in (5.4) faßt später hinzukommende „Korrekturspannungen“ zusammen – siehe Abschn. 5.2.

5.2. Abarbeitung der geometrischen und der physikalischen Nichtlinearitäten

Aus dem Dgl-system (5.2) wird durch numerische Runge-Kutta-Integration die tangentielle Stabsteifigkeitsmatrix – und in der gesamten Stabstruktur die zugehörige Systemsteifigkeitsmatrix – gebildet. Diese Steifigkeitsmatrix wird am Anfang jedes Inkrements neu aufgestellt. Innerhalb des Inkrements werden die Nichtlinearitäten durch „Korrekturlasten“ abgearbeitet. Letztere resultieren aus der iterativen Verbesserung im $\Delta \mathbf{b}$ -Vektor – Gl. (5.3) – von:

- geometrisch nichtlinearen Anteilen
- „physikalischen“ Zusatztermen, die durch numerische Querschnittsintegration (über eine orthogonale Vernetzung der Querschnitte – siehe Bild 4) aus den „Korrekturspannungen“ $\Delta \sigma^*$ (Zurückführung auf die aktuelle Fließfläche, siehe Bild 5) gewonnen werden – siehe auch Gl. (5.4).

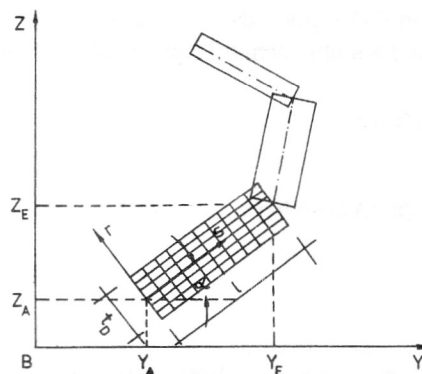


Bild 4

Orthogonale Vernetzung des polygonal approximierten dünnwandigen offenen Querschnitts

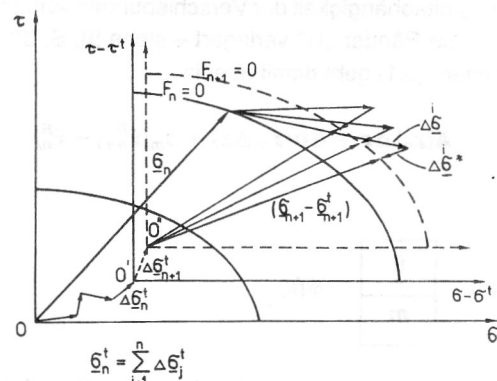


Bild 5

Iterative Spannungumlagerung eines „plastizierten“ Punktes im (n+1)-ten Inkrement

Über die Querschnittsvernetzung werden vor Beginn des Inkrements auch die aktuellen „elastisch-plastischen“ Steifigkeiten durch numerische Querschnittsintegration berechnet.

5.3. Das „statische“ Knotengleichgewicht

Die Lösung des Gleichungssystems für die Knotenverschiebungen

$$K_{t,n} \Delta v_{n+1} = \Delta P_{n+1} - \Delta \dot{F}_{n+1} \quad (5.5)$$

mit:

$K_{t,n}$: tangentielle Systemsteifigkeitsmatrix

Δv_{n+1} : inkrementelle Knotenverschiebungen

ΔP_{n+1} : inkrementelle Knotenlasten

$\Delta \dot{F}_{n+1}$: „kinematisch bestimmte“ inkrementelle Stabrandschnittkräfte

erfolgt inkremental-iterativ nach dem modifizierten Newton-Raphson-Verfahren. Die Iterationsvorschrift (Index i) im (n+1)-ten Inkrement lautet:

$$\Delta v_{n+1}^{[i+1]} = K_{t,n}^{-1} (\Delta P_{n+1} - \Delta \dot{F}_{n+1}^{[i]}) \quad (5.6)$$

6. Kinetik

6.1. Aufstellung des Dgl-systems

Im kinetischen Fall werden die Gleichgewichtsbedingungen durch die d'Alembertschen Trägheitskräfte ergänzt:

$$\frac{d\Delta z_1}{dx} = A_1(z_n) \Delta z + \Delta b_1(z_n, \Delta z) \quad (6.1a)$$

$$\frac{d\Delta z_2}{dx} = A_1(z_n) \Delta z + \Delta b_1(z_n, \Delta z) + m(\ddot{z}_{1,n+1} - \ddot{z}_{1,n}) \quad (6.1b)$$

mit:

$$z_{n+1} = \begin{matrix} z_{1n} + \Delta z_1 \\ z_{2n} + \Delta z_2 \end{matrix} \begin{matrix} \text{Verschiebungs-} \\ \text{Schnittkraft-} \end{matrix} \text{vektor} \quad (6.2)$$

Durch Einführung (nur für den Beschleunigungsvektor) der „statischen“ FEM-Verschiebungsapproximation

$$z_1(x,t) = \phi(x) v^R(e,t) \quad (6.3)$$

wird die Zeitabhängigkeit der Verschiebungen vom Stabinnern an die Ränder „R“ verlagert – siehe [8, S. 30]. Das Dgl-system (6.1) geht damit über in:

$$\frac{d\Delta z}{dx} = A(z_n) \Delta z + \Delta b(z_n, \Delta z) + b_m(\ddot{v}_{n+1}^R - \ddot{v}_n^R) \quad (6.4)$$

mit

$$b_m = \begin{matrix} 0 \\ m \end{matrix} \phi(x) \quad (6.5)$$

6.2. Stabrandkonzentrierte Massenmatrix des Einzelstabes

Die Verschiebungsansätze in der Matrix $\phi(x)$ von Gl. (6.3) bestehen aus Hermite-Polynomen 2. und 4. Ordnung sowie aus transzendenten Funktionen – siehe [2, S. 37]. Die

Koeffizientenmatrix m der Trägheitskräfte hat mit den Koordinaten $y_m, z_m, (\omega_m - \omega_B)$ des im allgemeinen exzentrisch liegenden Massenschwerpunktes folgenden Aufbau – siehe [5, S. 88]:

$$m = m$$

| | | | | | | |
|-------------------------|---|--------|-------------------------|-----------------------------|------------------------------|---|
| 1 | | | | z_m | $-y_m$ | $(\omega_m - \omega_B)$ |
| | 1 | | $-z_m$ | | | |
| | | 1 | y_m | | | |
| | | | $\Theta_{1,m}$ | | | |
| | | $-z_m$ | $y_m + (y_m^2 + z_m^2)$ | | | |
| z_m | | | | $\Theta_{2,m} + z_m^2$ | $-y_m z_m$ | $(\omega_m - \omega_B) z_m$ |
| $-y_m$ | | | | $-y_m z_m$ | $\Theta_{3,m} + y_m^2$ | $-(\omega_m - \omega_B) y_m$ |
| $(\omega_m - \omega_B)$ | | | | $(\omega_m - \omega_B) z_m$ | $-(\omega_m - \omega_B) y_m$ | $\Theta_{\omega,m} + (\omega_m - \omega_B)^2$ |

(6.6)

mit: m Linienmasse

$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ bzw. Θ_ω : Eigenrotations- bzw. -wölbtragheiten

Durch Anwendung der Runge-Kutta-Integration auf den Trägheitsterm b_m in Gl. (6.4) ergibt sich die „kinetische“ Leitmatrix des Stabes, aus welcher dann die vier Untermatrizen der Stabmassenmatrix folgen – siehe [5, S. 91] und [10].

6.3. Physikalische Nichtlinearität in der Kinetik

Das physikalisch nichtlineare Verhalten kann hier elastisch-plastisch – analog dem „statischen“ Fall, siehe Abschn. 5.2 – oder elastisch/viskoidealplastisch erfaßt werden. In beiden Fällen werden die Verzerrungen mit Berücksichtigung der Trägheitskräfte berechnet. Im zweiten Fall wird der noch unbekannt σ_{n+1} -Spannungszustand in Gl. (3.10b) mit den Ergebnissen des vorhergehenden Schrittes iterativ angenähert.

Durch numerische Querschnittsintegration über alle „viskoplastischen“ Punkte (mit $F(\sigma_n) > 0$) ergeben sich aus dem $D_\theta \Delta \epsilon_{vp}$ – Anteil der Gl. (3.10a) „physikalische“ Korrekturterme im Δb -Vektor des Dgl-systems analog der Statik. Die Querschnittssteifigkeiten bleiben jetzt „rein elastisch“.

6.4. Numerische Zeitintegration der „dynamischen“ Gleichgewichtsbedingungen

Das „dynamische Knotengleichgewicht ergibt sich in der inkrementellen Form (zugleich Iterationsvorschrift)

$$\Delta P_{n+1} - \Delta \dot{F}_{n+1}^{[i]} = K_{t,n} \Delta v_{n+1}^{[i]} + M \Delta \ddot{v}_{n+1}^{[i+1]} \quad (6.7)$$

i: Iterationsindex im Inkrement

Die Lösung erfolgt auch hier mit tangentialer Gesamtsteifigkeitsmatrix nach dem modifizierten Newton-Raphson-

Verfahren. Die partiellen Differentialgleichungen für die Knotenverschiebungen werden durch implizite Zeitschrittintegration nach Newmark gelöst.

$$\Delta \dot{v}_{n+1} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta v_{n+1} - \frac{\gamma}{\beta} \dot{v}_n - \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{v}_n \quad (6.8a)$$

$$\Delta \ddot{v}_{n+1} = \frac{1}{\beta \Delta t} \Delta v_{n+1} - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{v}_n - \Delta t \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{v}_n \quad (6.8b)$$

Mit der Wahl (unbedingte numerische Stabilität im linearen Fall) $2\beta = \gamma = 0.5$ ergibt sich aus Gl. (6.7) mit Gl. (6.8)

$$\begin{aligned} & (K_{t,n} + \frac{4}{\Delta t^2} M) \Delta v_{n+1}^{[1+1]} \\ & = \Delta P_{n+1} - \Delta \dot{F}_{n+1}^{[1+1]} + M \left(-\frac{4}{\Delta t} \dot{v} + 2 \ddot{v}_n \right) \end{aligned} \quad (6.9)$$

7. Beispiele zur Statik

7.1. Träger auf zwei Stützen, exzentrisch gedrückt

Der beiderseits gabelgelagerte Träger wird durch die gleichförmige Linienlast p_z und durch die exzentrisch angreifende Druckkraft N belastet. Gerechnet sind:

Variante A: geometrisch nichtlinear, elastisch-idealplastisch mit $\sigma_F = 240 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$

Variante B: geometrisch nichtlinear, elastisch-plastisch mit isotroper Verfestigung ($m = 1.0$)

Variante A wird mit dem in [8, S. 112] vorgestellten Beispiel verglichen – mit geringfügigen Abweichungen in den Profilwerten des IPB-180-Profiles.

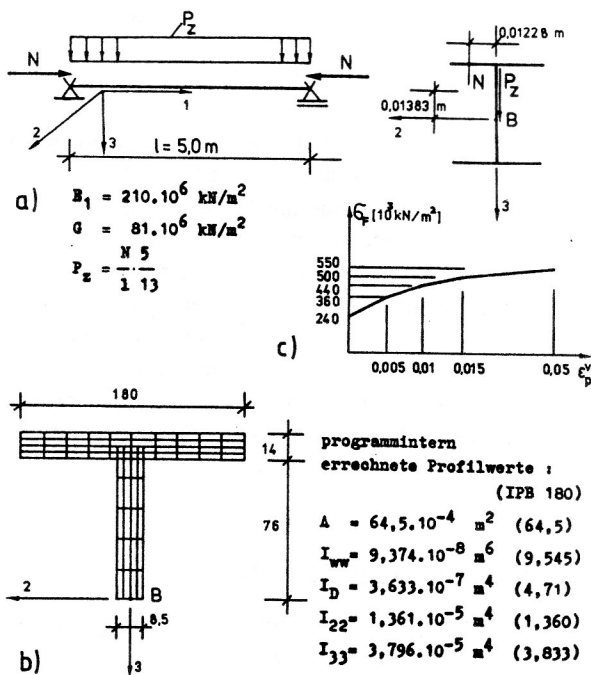
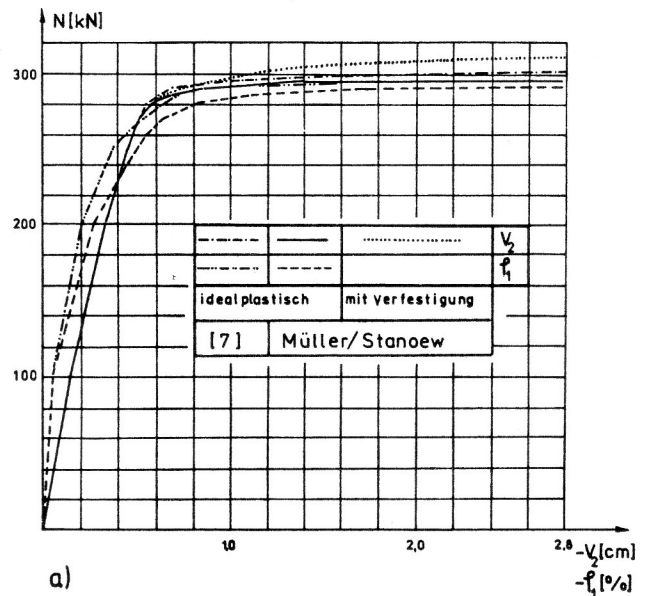
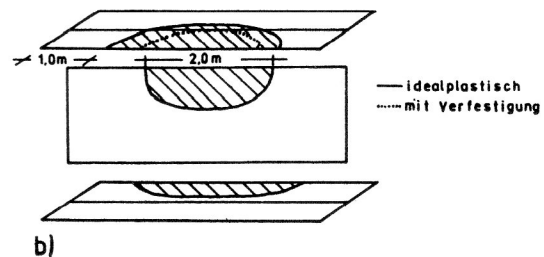


Bild 6

- statisches System und Belastung
- Profilvernetzung
- Verfestigungskurve



a)



b)

Bild 7

- Last-Verschiebungs-Kurven für die Stabmitte
- Plastizierungsbild ($N_{kr} = 296 \text{ kN}$)

Bei Variante A ergibt sich eine um 2.3 % niedrigere Traglast als die in [8] angegebene, bei Variante B ist die Traglast um 5 % höher als bei Variante A. Das Bild der Plastizierungsausbreitung in beiden Varianten (bei $N_{kr} = 296 \text{ kN}$) belegt die qualitative richtige Erfassung des Verfestigungsverhaltens.

7.2. Räumliches 3-Stab-System, Traglastermittlung

Dieses Beispiel demonstriert die Vielfalt der Möglichkeiten des Statik-Bausteins.

Stützknoten sind 1 – starr eingespannt, und 4 – Gabelagerung. Stab 12 hat die drei möglichen Vorverschiebungen symmetrisch bezüglich der Stabmitte. Stab 32 ist am Knoten 2 exzentrisch angeschlossen. Stab 43 hat im Anschluß an Knoten 3 zwei Biegemomentennullfelder. Die Belastung wird einparametrig bis zum Systemversagen gesteigert. Die Rechnung ist geometrisch nichtlinear, mit zwei Varianten der physikalischen Nichtlinearität:

Variante A: elastisch-idealplastisch mit $\sigma_F = 240 \cdot 10^3 \text{ kN/m}^2$

Variante B: mit kinematischer und isotroper Verfestigung zu gleichen Teilen ($m = 0.5$)

Im Bild 9a sind die Last-Verschiebungs-Kurven für zwei ausgezeichnete Verschiebungskomponenten der Knoten 2 und 3 dargestellt. Bei proportionaler Steigerung der glei-

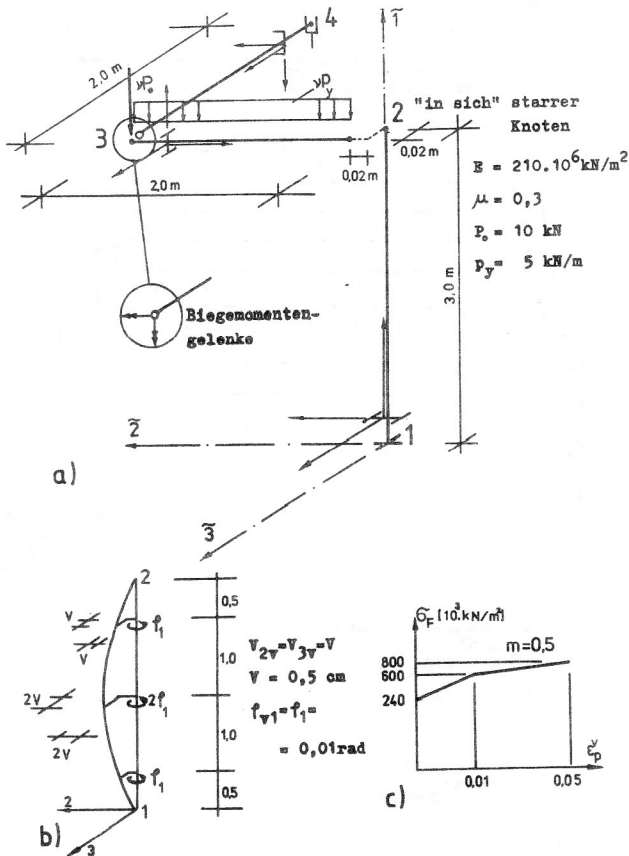


Bild 8
 a) statisches System und Belastung
 b) vorgegebene Imperfektionen – Stab 12
 c) Verfestigungskurve $\sigma_F(\epsilon_p^v)$ – Variante B

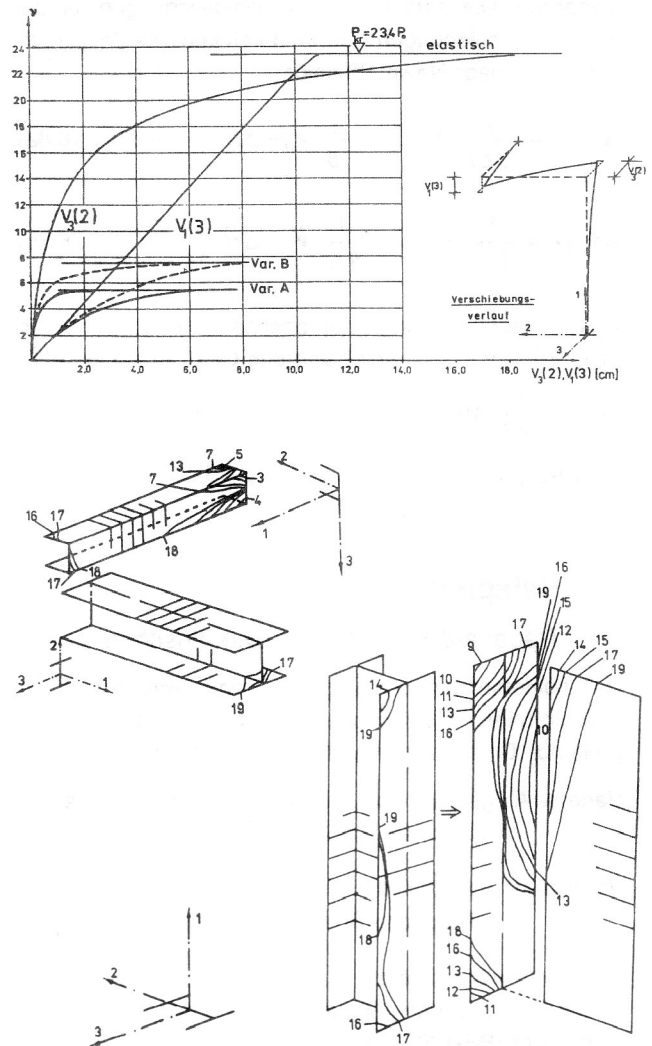


Bild 9
 a) Last-Verschiebungskurven – Vergleich mit der „elastischen“ Knicklast
 b) Plastifizierungsentwicklung – Variante A

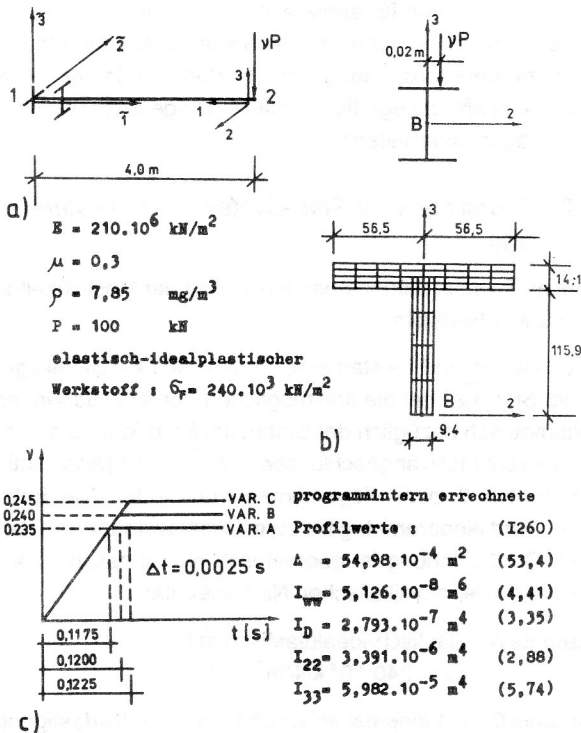


Bild 10
 a) statisches System und Belastung
 b) Profilnetzung
 c) Last-Zeit-Funktionen

chen Lastkonstellation ist das System zum Vergleich bis zum „elastischen“ Stabilitätsversagen gerechnet worden. Es ist der deutliche Einfluß der Verfestigung auf die Traglast erkennbar (allerdings mit einer fiktiv überhöhten Verfestigungskurve – siehe Bild 8c). Die Differenz zwischen „elastischer“ Grenzlasterlast und Systemversagenslast vermittelt den Eindruck von den vorhandenen Tragreserven. Im Tragwerk findet noch lange vor Erreichen der „elastischen“ Knicklast eine solche Plastifizierungsausbreitung statt – siehe Bild 9b – die schnell zum Totalverlust der Systemsteifigkeit und entsprechend zum Systemversagen führt.

8. Beispiele zur Kinetik

8.1. Ebener Kragstab, räumliche Schwingung, elastisch-plastisches Stoffverhalten

Der Kragstab mit stabverteilter Profileigenmasse wird durch die exzentrisch angreifende Einzelast vP zu Quer- und Torsionsschwingungen angeregt. Bei Varianten B und C wird die Lastauftragung um ein Zeitinkrement gegenüber A bzw. B verlängert. Bezüglich der Querschwingung $v_3(t)$

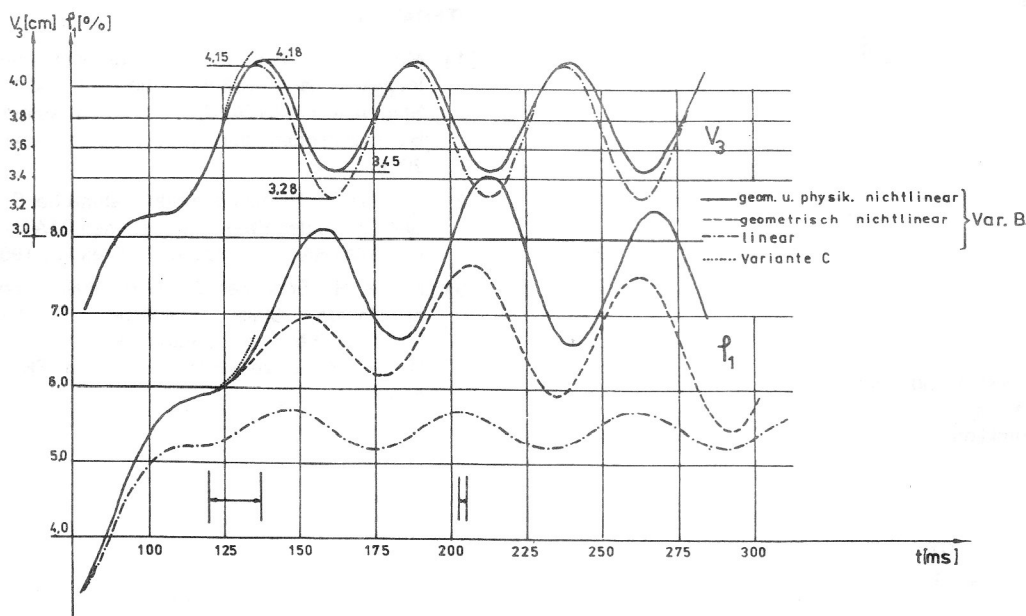
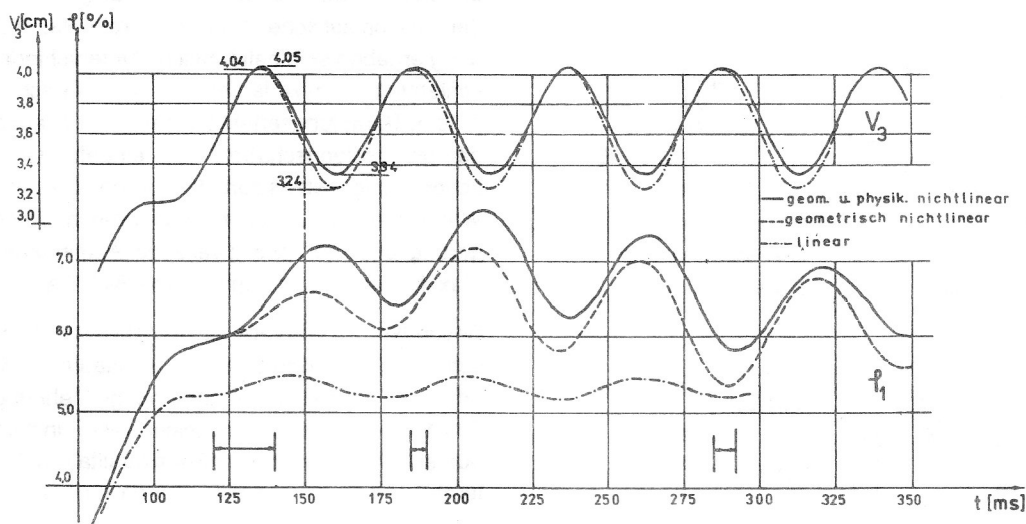


Bild 11

- a) Schwingungskomponenten $v_3(t)$, $\varphi_1(t)$ am Knoten 2 – Variante A
- b) Schwingungskomponenten $v_3(t)$, $\varphi_1(t)$ am Knoten 2 – Varianten B und C

werden zwei Effekte registriert: eine geringe Phasenverschiebung und eine Abminderung der Max-Min-Amplitudendifferenz gegenüber dem elastischen Fall – 11.25 % in Variante A und 16.09 % in Variante B. Von der Torsionsschwingung des freien Stabendes – $\varphi_1(t)$ – wird festgestellt, daß sie eine bedeutend größere Sensibilität bezüglich der geometrischen und der physikalischen Nichtlinearität aufweist. Der Effekt der Periodenverlängerung ist hier etwas deutlicher als bei der Querschwingung ausgeprägt.

Bei der weiteren Laststeigerung – Variante C – wird im 55. Inkrement ($t = 0.1375$ s) schlagartig ein Verzerrungszustand im plastizierten Bereich um die Einspannstelle (bis $X = 1.40$ m vom Knoten 1) erreicht, der quasi ins Unendliche wächst – $\varepsilon > 20$ %: die Rechnung bricht ab, das Sy-

stem ist nun kinetisch instabil. Folglich befinden sich die Lastgrößen in Varianten A und B in unmittelbarer Nähe der kritischen Kipplast.

8.2. Ebener Kragstab, räumliche Schwingung, viskoplastisches Stoffverhalten

Am freien Kragende des Stabes mit verteilter Profileigenmasse wird die exzentrische Einzellast νP stoßartig aufgetragen. Der Viskositätskoeffizient η – siehe Gl. (3.10c) – wird aus der in [5] angegebenen experimentellen Kurve für den einachsigen Fall

$$\dot{\varepsilon} = 40.4 \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right)^5, \quad \sigma_0 = \sigma_F = 210\,000 \text{ kN/m}^2$$

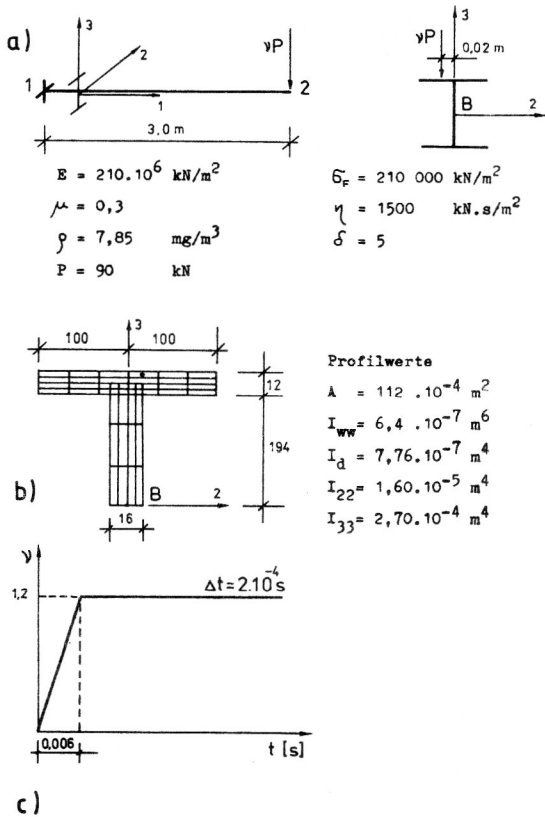


Bild 12

- a) statisches System und Belastung
 b) Profilnetzung
 c) Last-Zeit-Funktion

ermittelt. Es wird geometrisch linear gerechnet. zwischen der „viskoplastischen“ und der „rein elastischen“ Rechnung ergeben sich beträchtliche Unterschiede in den Verschiebungs-Zeit-Verläufen. Es wird ein schwach ausgeprägter Dämpfungseffekt beobachtet, der auf die Materialdämpfungseigenschaften des eingeführten viskoplastischen Stoffgesetzes zurückzuführen ist. Ebenfalls auf das Werkstoffgesetz sind zurückzuführen die Periodenverlängerung und die etwa zweifache Abminderung der Min-Max-Amplitudendifferenz – siehe Bild 13a.

Besonders ausgeprägt ist die Abweichung vom „elastischen“ Fall bei den Spannungsverläufen – Bild 13b. Die erhaltene dynamische Spannungs-Dehnungs-Kurve – Bild 13c – für den gekennzeichneten Punkt im Einspannquerschnitt stimmt in ihrer Form qualitativ mit den in der Literatur – z. B. [6] – angegebenen für weichen Stahl gut überein.

LITERATUR

- [1] Müller, H.; Hedeler, D.: Statik räumlicher und ebener Stabtragwerke nach Fließgelenktheorie I. und II. Ordnung. In: Stabtragwerke (STATRA), Programmsystem, Beiträge (8). Berlin Bauinformation, 1987 (Bauforschung – Baupraxis: 203)
- [2] Wasilew, T.: Nichtlineare Statik räumlicher Stabtragwerke – Beiträge zu den Programmsystemen STATRA (Baustein 8) und STATRA-FEM. Diss. A, TU Dresden, 1983.
- [3] Müller, H.; Schiefner, R.: Geometrisch und physikalisch nichtlineare Statik räumlicher Stabtragwerke mit STATRA-FEM. In: „Stabtragwerke III“, Studientexte S. 37 – 47 des Weiterbildungszentrums FKW der TU Dresden, 1987, Heft 2.

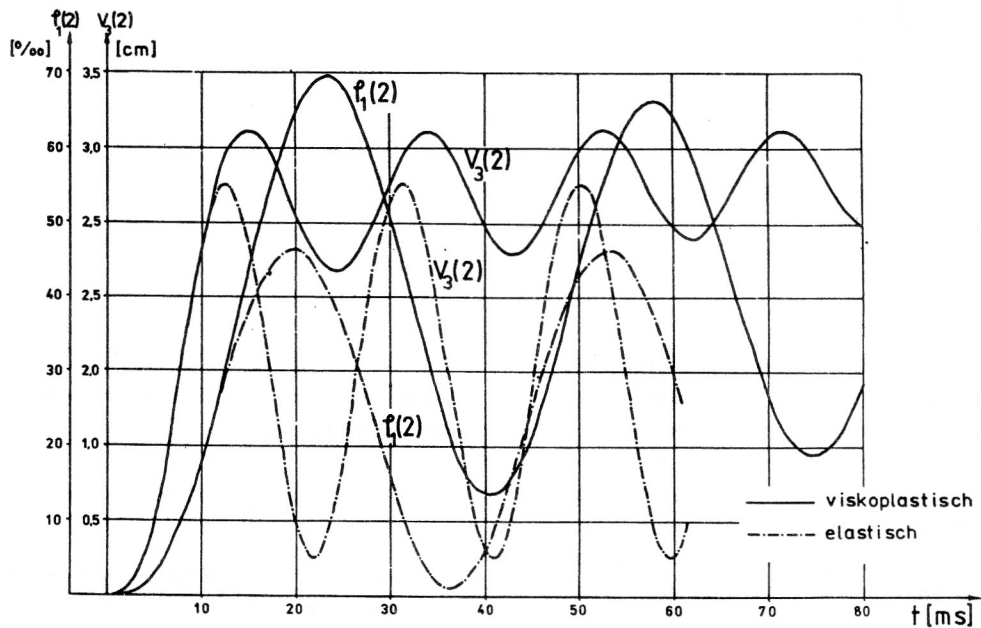


Bild 13a

Durchbiegung $v_3(t)$ und Torsionsverdrehung $\varphi_1(t)$ am Knoten 2

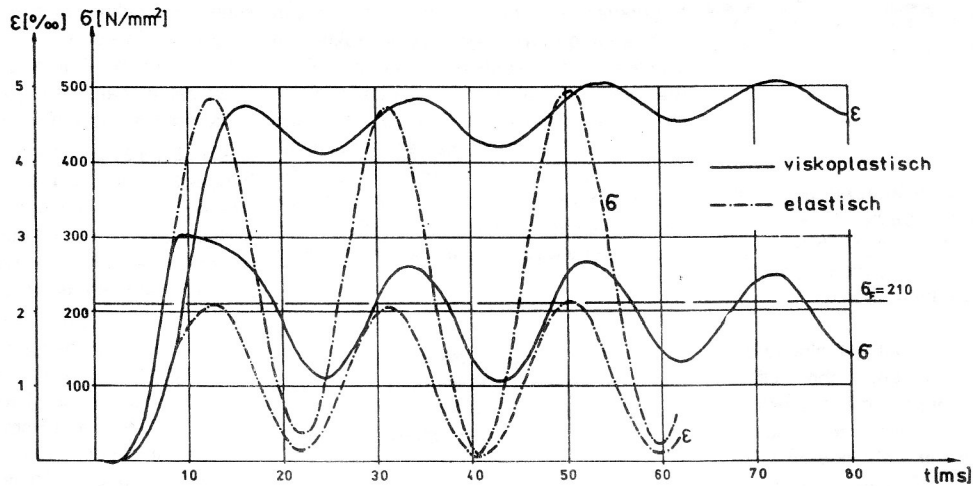


Bild 13b
 Normalspannungs- und Dehnungs-Zeit-Funktionen an der Einspannstelle im gekennzeichneten „Querschnittspunkt“ – vgl. Bild 12 b)

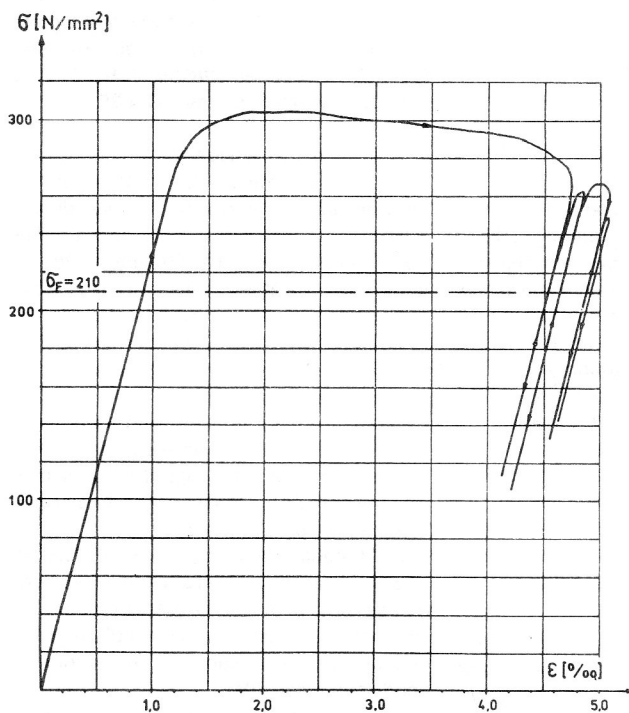


Bild 13c
 Dynamische Spannungs-Dehnungs-Kurve an der Einspannstelle im gekennzeichneten „Querschnittspunkt“ – vgl. Bild 12 b)

- [4] Müller, H.; Jäger, W.: Statik räumlicher Stabtragwerke nach Elastizitätstheorie II. Ordnung. In: Stabtragwerke (STATRA), Programmsystem, Beiträge (4). Berlin, Bauinformation, 1982 (Bauforschung – Baupraxis: 95).
- [5] Stanoew, E.: Studie zur geometrisch und physikalisch nicht-linearen Statik und Kinetik räumlicher Stabtragwerke aus homogenem Werkstoff mit kontinuierlicher Plastizierung. Diss. A, TU Dresden, 1989.
- [6] Perzyna, P.: Fundamental Problems in Viscoplasticity. In: Adv. Appl. Mech. 9(1966), S. 243 – 377.
- [7] Argyris, J. H.; Vaz, L. E.; Willam, K. J.: Improved Solution Methods for Inelastic Rate Problems. In: Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 16(1978), S. 231 – 277.
- [8] Heil, W.: Traglastermittlung von räumlichen belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz. Diss. A, Uni – Karlsruhe (TH), 1979.
- [9] Müller, H.; Graf, W.: Lineare Kinetik von Stabtragwerken. In: Stabtragwerke (STATRA), Programmsystem, Beiträge (6). Berlin, Bauinformation, 1984 (Bauforschung – Baupraxis: 139).
- [10] Müller, H.; Wille, T.: Massen- und Dämpfungsmatrizen „allgemeiner“ Stäbe. In: XI. IKM-Kongreß: Berichte, H. 1, S. 57 – 60, Weimar, HAB, 1987.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. H. Müller
 Dr.-Ing. E. Stanoew
 Technische Universität Dresden
 Sektion Bauingenieurwesen
 Mommsenstraße 13
 O-8027 Dresden