

Die Berechnung dünnwandiger Ringträger mit geschlossenem Querschnitt auf der Grundlage des halbmomentenfreien Schalenmodells nach Wlassow, Teil I

Johannes Altenbach, Wolfgang Kissing, Johannes Schulz

Ausgehend von der halbmomentenfreien Schalentheorie von Wlassow werden im Teil I die allgemeinen Gleichungen für Systeme mit eben gekrümmter Stabachse abgeleitet. Diese Modellgleichungen wurden mit den in Arbeiten von Rangelov und von Hirashima/Yajima abgeleiteten Gleichungen verglichen. Alle Gleichungen wurden dazu in eine einheitliche Schreibweise in der Form von Differentialgleichungssystemen überführt. Teil II wird numerische Vergleichsrechnungen enthalten.

Following the semi-moment shelltheory of Vlasov in Part I the general equations for structures with plane curved axes are given. These equations are compared with the structural equations given in papers by Rangelov and Hirashima/Yajima. All equations are transformed in an unique form of differtial equations of first order. Part II will contain the results of numerical comparisions for the different model equations.

1. Einleitung

Träger mit einer kreisförmig oder annähernd kreisförmig gekrümmten Stabachse treten bei Baukonstruktionen und im Maschinenbau, z.B. bei Großgeräten der Fördertechnik und im Kranbau auf.

Das zugrundeliegende halbmomentenfreie Schalenmodell nach Wlassow gestattet – als verfeinertes Schalenmodell betrachtet – die Berücksichtigung der Längsverwölbungen und Konturverformungen [1].

Dieses Modell hat sich für die Berechnung geradliniger Stabschalen in zunehmendem Maße bereits bewährt, vgl. z. B. [2] bis [6].

In der vorliegenden Arbeit werden die Grundgleichungen für einen Ringträger mit dünnwandigem geschlossenem Querschnitt für das halbmomentenfreie Schalenmodell nach Wlassow in allgemeiner Form abgeleitet. Die Gleichungen werden mit der Literatur dazu bereits vorliegenden Untersuchungen anderer Autoren [7] bis [9] verglichen, und es werden die in diesen Arbeiten verwendeten Annahmen bzw. Vernachlässigungen diskutiert.

2. Voraussetzungen und Annahmen

- Es werden dünnwandige, stabförmige Konstruktionen mit geschlossenem Querschnitt und eben gekrümmter Stabachse untersucht; die Krümmung ist konstant.
- Die Querschnitte weisen gerade Konturlinien auf; die Querschnittsabmessungen sind entlang der Trägerlänge stückweise unveränderlich.
- Die Kanten sind biegesteif verbunden.
- Zur Beschreibung wird die Winkelkoordinate ϑ (Zentriwinkel), die Koordinate s in Richtung der Querschnittskontur und die Koordinate n in Richtung der Flächennormalen verwendet (s. Bild 1).
 s und n sind lokale Koordinaten für jeden Konturabschnitt; die Verschiebungen in ϑ -, s - und n -Richtung sind u , v und w .

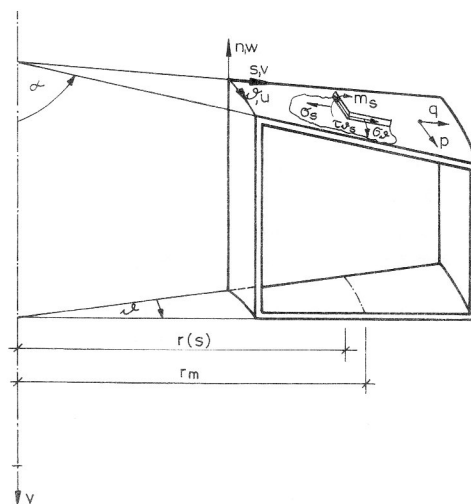


Bild 1
Ringträger-Ausschnitt

- Unter $r(s)$ wird der Abstand eines Konturpunktes zur Ringachse Y verstanden, r_m ist der konstante Abstand eines ausgezeichneten Querschnittspunktes (z. B. Schwerpunkt) zu dieser Achse.
- Die Neigung einer Querschnittskonturlinie wird durch den Winkel α zwischen der positiven Y -Achse und der positiven s -Richtung festgelegt.
- Für die Längsdehnungen der Wandelemente wird zunächst ein linearer Verlauf zwischen den Kanten angenommen.
- Die Dehnungen in s -Richtung werden vernachlässigt. ($\varepsilon_s = 0$).
- Die Schubverformungen der Wandmittelflächen werden berücksichtigt.
- Innerhalb der Wandelemente werden die Längsbiegemomente m_θ und die Torsionsmomente $m_{\theta s}$ vernachlässigt; die Normalspannungen σ_θ und die Schubspannungen $\tau_{\theta s}$ sind damit konstant und die Normalspannungen σ_s linear über die Dicke der Wandelemente verteilt.
- Als statische Belastungen können verteilte Kräfte nur in die Ebene der einzelnen Wandelemente eingeleitet werden (p, q).
- Temperaturfeldbelastungen liegen in stationärer Form vor; es wird eine gleichmäßige Temperaturverteilung über die Wanddicke δ vorausgesetzt.

Für die Verschiebungen eines Punktes der Wandmittelflächen werden die Ansätze

$$u(\vartheta, s) = \sum_{i=1}^m U_i(\vartheta) \varphi_i(s); \quad v(\vartheta, s) = \sum_{k=1}^n V_k(\vartheta) \psi_k(s); \quad w(\vartheta, s) = \sum_{k=1}^n V_k(\vartheta) \kappa_k(s); \quad (1)$$

zugrunde gelegt.

Die $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ und $\kappa_k(s)$ sind verallgemeinerte Koordinatenfunktionen. Sie beschreiben linear unabhängige, verträgliche Verschiebungszustände.

Die Funktionen $\varphi_i(s)$ und $\psi_k(s)$ sind die verallgemeinerten Koordinatenfunktionen der Verschiebungen senkrecht zur Querschnittsebene bzw. der Verschiebungen in der Querschnittsebene. Die Funktionen $\kappa_k(s)$ sind verallgemeinerte Koordinatenfunktionen der Normalverschiebungen der Wandelemente des Ringträgers; es werden nur diejenigen $\kappa_k(s)$ berücksichtigt, die den Verschiebungskordinaten $\psi_k(s)$ zugeordnet sind. – Als Beispiel sind die Funktionen $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$ und $\kappa_k(s)$ für einen doppelsymmetrischen Kastenquerschnitt dargestellt (vgl. Bild 2).

$U_i(\vartheta)$ und $V_k(\vartheta)$ sind die zugehörigen verallgemeinerten Längs- und Querverschiebungen.

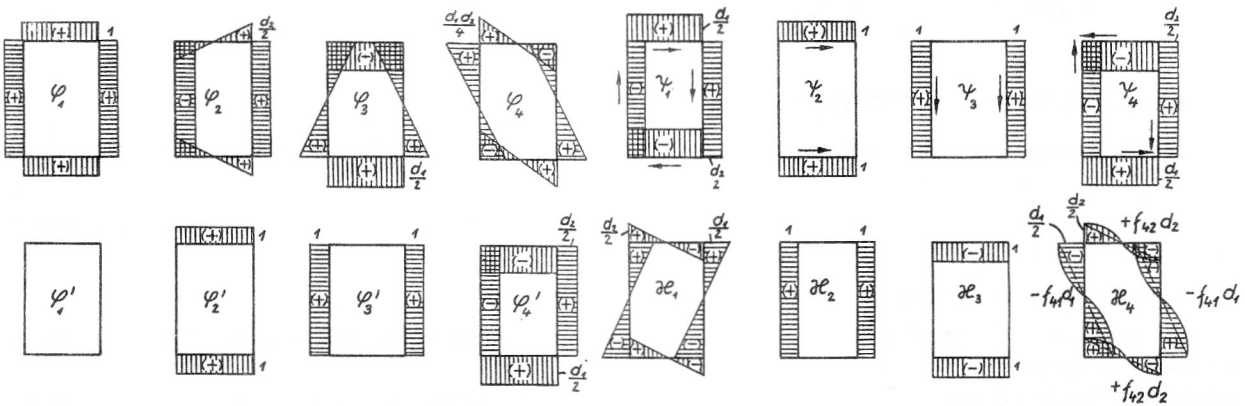


Bild 2

Darstellung der verallgemeinerten Koordinaten $\varphi_i(s)$, $\varphi'_i(s)$, $\psi_k(s)$, $\kappa_k(s)$

Die Anzahl m der Funktionen $U_i(\vartheta)$ und $\varphi_i(s)$ entspricht bei den vorausgesetzten linearen Verläufen der Längsverschiebungen zwischen den Querschnittskanten der Kantenanzahl des Querschnitts. Die Anzahl n der Funktionen $V_k(\vartheta)$ und $\psi_k(s)$ bzw. $\kappa_k(s)$ ist bei Vernachlässigung der Querdehnungen ε_s gleich dem Freiheitsgrad des Querrahmenmechanismus $n = 2m - c$, mit c als Anzahl der Querschnittswände. Der Querrahmenmechanismus wird aus dem elementaren Querrahmen, d. h. dem Abschnitt $r_m d \vartheta$ gebildet, wobei an Stelle der biegesteifen Eckverbindungen Gelenke angenommen werden.

Im Unterschied zum geraden Träger sind beim Ringträger bereits bei statischen Belastungen die Normalverschiebungen w explizit anzuschreiben, da die Dehnung ε_θ in Umfangsrichtung der nicht horizontalen Querschnittsteile auch einen Anteil infolge der Normalverschiebung erhält.

Die Dehnung ε_θ in Richtung der gekrümmten Längsachse eines unter dem Winkel α zur Y -Achse stehenden Wandabschnittes setzt sich aus drei Anteilen zusammen, den Anteilen aus der Verschiebung in Richtung der ϑ -Achse, in s -Richtung und in Richtung der Normalen n (vgl. Bild 3).

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\partial u}{r(s)\partial\vartheta} + \frac{v \sin \alpha}{r(s)} + \frac{w \cos \alpha}{r(s)} \quad (2)$$

Der dritte Summand zeigt den Einfluß der Normalverschiebung w . In den Untersuchungen von Ringträgern mit geschlossenem Querschnitt durch andere Autoren [7] bis [9] bleibt der Verformungsanteil in der Normalenrichtung unberücksichtigt, was dort zu fehlerhaften Grundgleichungen führt. Darauf wurde schon in [10] hingewiesen.

Mit Einbeziehung einer stationären Temperaturfeldbelastung ergibt sich:

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{\partial u}{r(s)\partial\vartheta} + \frac{v \sin \alpha}{r(s)} + \frac{w \cos \alpha}{r(s)} + \alpha_t T \quad (2^*)$$

Die Gleitung (vgl. Bild 4) ergibt sich entsprechend zu

$$\gamma_{\theta s} = \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u \sin \alpha}{r(s)} + \frac{\partial v}{r(s)\partial\vartheta} \quad (3)$$

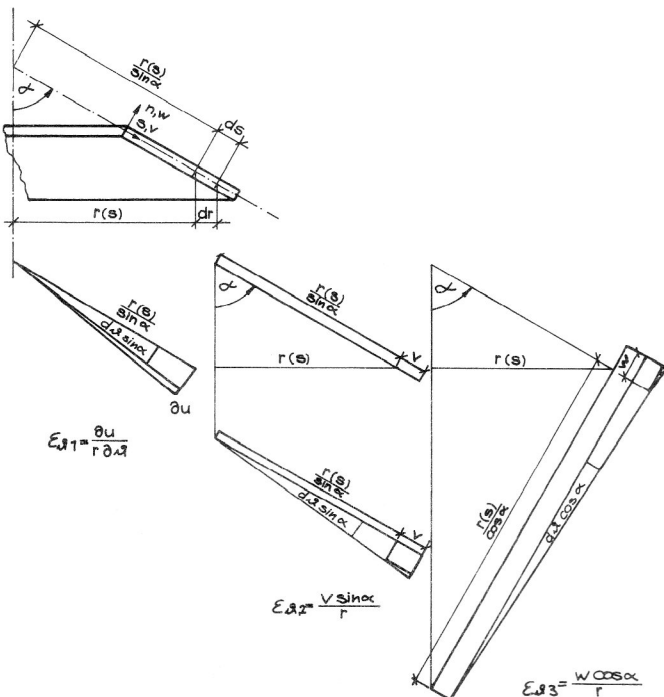


Bild 3

Die Anteile der Dehnung in Richtung der gekrümmten Längsachse

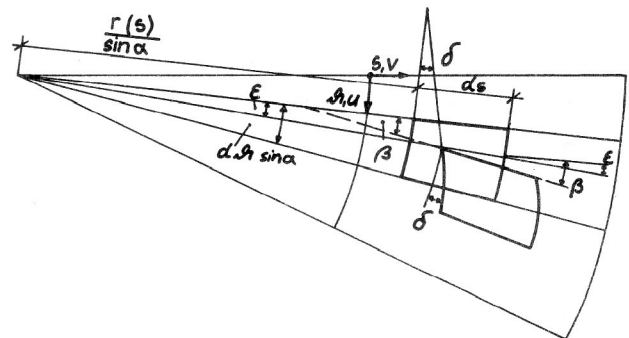


Bild 4
Anteile der Gleitung

3. Differentialgleichungssystem

Das elastische Potential für den Ringträger auf der Grundlage des halbmomentenfreien Schalenmodells ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Pi &= W_I - W_a \\ &= W_{Im} + W_{Ib} - W_a \end{aligned}$$

Dabei setzt sich beim halbmomentenfreien Schalenmodell die Formänderungsenergie W_I aus den Anteilen eines vereinfachten Membranspannungszustandes und des Querbiegespannungszustandes zusammen.

$$W_{Im} = \int_{(\vartheta)} \int_{\delta} \frac{1}{2} [\sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{\theta s} \gamma_{\theta s}] \delta \, ds \, r_m \, d\vartheta$$

$$W_{Ib} = \int_{(\vartheta)} \int_{\delta} \frac{m_s^2}{EI \cdot 2} \, ds \, r_m \, d\vartheta; \quad I = \frac{\delta^3}{12}$$

Unter Berücksichtigung von (2*) und (3) folgt dann

$$\Pi = \int_{(\vartheta)} \int_{\delta} \left\{ \left[\frac{E}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \vartheta} + \frac{v \sin \alpha}{r} + \frac{w \cos \alpha}{r} \right)^2 - E \alpha_t T \left(\frac{\partial u}{r \partial \vartheta} + \frac{v \sin \alpha}{r} + \frac{w \cos \alpha}{r} - \alpha_t T \right) \right] \right.$$

$$+ \frac{G}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u \sin \alpha}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \vartheta} \right)^2 \delta + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{EI} - \rho u - q v \} ds r d \vartheta \quad (4)$$

Mit den Verschiebungsansätzen (1) sowie einem analogen Ansatz für die Querbiegemomente

$$m_s(\vartheta, s) = \sum_{k=1}^n V_k(\vartheta) m_k(s) \quad (5)$$

ergibt sich das elastische Potential

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{(\vartheta)} \int \left\{ \left[\frac{E}{2} \left(\sum_{i=1}^m \frac{U_i \varphi_i}{r} + \sum_{k=1}^n \frac{V_k \psi_k}{r} \sin \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{V_k \chi_k}{r} \cos \alpha \right)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - E \alpha_t T \left(\sum_{i=1}^m \frac{U_i \varphi_i}{r} + \sum_{k=1}^n \frac{V_k \psi_k}{r} \sin \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{V_k \chi_k}{r} \cos \alpha - \alpha_t T \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{G}{2} \left(\sum_{i=1}^m U_i \varphi_i - \sum_{i=1}^m \frac{U_i \varphi_i}{r} \sin \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{V_k \psi_i}{r} \right)^2 \right] \delta + \frac{1}{2EI} \left(\sum_{k=1}^n V_k m_k \right)^2 - \rho \sum_{i=1}^m U_i \varphi_i - q \sum_{k=1}^n V_k \psi_k \right\} ds r d \vartheta \end{aligned} \quad (6)$$

Das Biegemoment $m_k(s)$ resultiert aus der Verschiebung $V_k = 1$ am elementaren Querrahmen.

Das Prinzip vom Minimum des elastischen Potentials führt auf das Variationsproblem

$$\Pi = \int_{(\vartheta)} F(\vartheta, U_j, U_j', V_h, V_h') d \vartheta \Rightarrow \text{Min.}$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$h = 1, \dots, n$$

Die $m+n$ Eulerschen Differentialgleichungen ergeben das Differentialgleichungssystem:

$$\frac{\gamma}{r_m^2} \sum_{i=1}^m a_{ji}^* U_i''(\vartheta) - \sum_{i=1}^m \left[b_{ji}'' + \frac{1}{r_m^2} \bar{a}_{ji}' - \frac{1}{r_m} (\bar{f}_{ji} + \bar{g}_{ji}) \right] U_i(\vartheta) - \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n \left[c_{jk} - \frac{1+\gamma}{r_m} \bar{h}_{jk}' - \frac{\gamma}{r_m} \bar{k}_{jk} \right] V_k(\vartheta) + \frac{1}{G} \hat{p}_j(\vartheta) = 0$$

$$j = 1, \dots, m \quad (7)$$

$$\frac{1}{r_m} \sum_{i=1}^m \left[e_{hi} - \frac{1+\gamma}{r_m} \bar{t}_{hi}' - \frac{\gamma}{r_m} \bar{m}_{hi} \right] U_i(\vartheta) + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n r_{hk} V_k(\vartheta) - \gamma \sum_{k=1}^n \left[s_{hk}'' + \frac{1}{r_m^2} (\bar{r}_{hk}' + \bar{t}_{hk}' + \bar{u}_{hk}' + \bar{v}_{hk}') \right] V_k(\vartheta) + \frac{1}{G} \hat{q}_h(\vartheta) = 0$$

$$h = 1, \dots, n$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a_{ji}^* &= \oint \frac{\varphi_i \varphi_j}{\beta} \delta ds; & \bar{a}_{ji} &= \oint \frac{\varphi_i \varphi_j}{\beta} \sin^2 \alpha \delta ds; & b_{ji}^* &= \oint \varphi_j' \varphi_i' \beta \delta ds; \\ c_{jk} &= \oint \varphi_j' \psi_k \delta ds; & \bar{f}_{jk} &= \oint \varphi_j \varphi_i' \cdot \sin \alpha \delta ds; & \bar{g}_{jk} &= \oint \varphi_j' \varphi_i \cdot \sin \alpha \delta ds; \\ e_{hi} &= \oint \psi_h \varphi_i' \delta ds; & r_{hk} &= \oint \frac{\psi_h \psi_k}{\beta} \delta ds; & \bar{h}_{jk} &= \oint \frac{\varphi_i \psi_k}{\beta} \sin \alpha \delta ds; \\ \bar{k}_{jk} &= \oint \frac{\varphi_i \chi_k}{\beta} \cos \alpha \delta ds; & \bar{t}_{hi} &= \oint \frac{\psi_h \varphi_i}{\beta} \sin \alpha \delta ds; & \bar{m}_{hi} &= \oint \frac{\chi_h \varphi_i}{\beta} \cos \alpha \delta ds; \\ \bar{r}_{hk} &= \oint \frac{\psi_h \psi_k}{\beta} \sin^2 \alpha \delta ds; & \bar{t}_{hk} &= \oint \frac{\psi_h \chi_k}{\beta} \sin \alpha \cos \alpha \delta ds; & \bar{u}_{hk} &= \oint \frac{\chi_h \psi_k}{\beta} \sin \alpha \cos \alpha \delta ds; \\ \bar{v}_{hk} &= \oint \frac{\chi_h \chi_k}{\beta} \cos^2 \alpha \delta ds; & s_{hk}^* &= \frac{1}{E} \oint \frac{m_h m_k}{EI} \beta ds; & \rho_j^* &= \oint p \varphi_j \beta ds; & \hat{p}_j &= \rho_j^* - \frac{E \alpha_t}{r_m} \oint \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \varphi_j \delta ds; \\ q_h^* &= \oint q \psi_h \beta ds; & \hat{q}_h &= q_h^* + \frac{E \alpha_t}{r_m} \oint T \psi_h \sin \alpha \delta ds + \frac{E \alpha_t}{r_m} \oint T \chi_h \cos \alpha \delta ds; \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei sind a_{ji}^* , b_{ji}^* usw. verallgemeinerte Querschnittswerte, \hat{p}_j und \hat{q}_h verallgemeinerte Belastungen.

Mit $\beta(s) = r(s)/r_m$ wird eine dimensionslose Hilfsfunktion definiert.

Die Ableitungen $F_{U_j'}$ und $F_{V_h'}$ entsprechen den als verallgemeinerte Längskraft $P_j(\vartheta)$ bzw. als verallgemeinerte Querkraft $Q_h(\vartheta)$ definierten Funktionen:

$$F_{U_j'}(\vartheta) = P_j(\vartheta) = \int_A \sigma_{\vartheta} \varphi_j dA \quad \text{bzw.} \quad F_{V_h'}(\vartheta) = Q_h(\vartheta) = \int_A \tau_{\vartheta s} \psi_h dA \quad (9)$$

Die verallgemeinerte Längskraft $P_l(\vartheta)$ ergibt sich gemäß (9) unter Berücksichtigung von (8) zu:

$$P_l(\vartheta) = E \left[\frac{1}{r_m} \sum_{i=1}^m a_{ji} U_i + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n (\bar{h}_{jk}^* + \bar{k}_{jk}^*) V_k \right] - E \alpha_t \phi T \varphi_l \delta ds = \bar{P}_l - I_\eta \quad (10a)$$

Die verallgemeinerte Querkraft $Q_h(\vartheta)$ ergibt sich gemäß (9) unter Berücksichtigung von (8) zu:

$$Q_h(\vartheta) = G \left[\sum_{i=1}^m (\epsilon_{ni} - \frac{1}{r_m} \bar{t}_{ni}^*) U_i + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n r_{hk}^* V_k \right] \quad (10b)$$

Die Spannungen folgen aus den Verzerrungen gemäß (2) und (3) und den Produktansätzen (1) und (5)

$$\sigma_\vartheta(\vartheta, s) = E \left[\frac{1}{r_m} \sum_{i=1}^m \frac{U_i \varphi_i}{\beta} + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n \frac{V_k \psi_k}{\beta} \sin \alpha + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n \frac{V_k \chi_k}{\beta} \cos \alpha \right] - E \alpha_t T \quad (11a)$$

$$\sigma_{sm} = 0$$

$$\sigma_{sbmax}(\vartheta) = \pm \frac{\delta}{2I} \sum_{k=1}^n V_k m_k$$

$$\tau_{\vartheta s}(\vartheta, s) = G \left[\sum_{i=1}^m U_i \varphi_i' - \frac{1}{r_m} \sum_{i=1}^m \frac{U_i \varphi_i}{\beta} - \sin \alpha + \frac{1}{r_m} \sum_{k=1}^n \frac{V_k \psi_k}{\beta} \right] \quad (11b)$$

Der Grenzübergang $r_m \rightarrow \infty$, $r_m d\vartheta \rightarrow dz$, $\beta \rightarrow 1$ führt zu den entsprechenden Gleichungen des prismatischen Trägers mit gerader Längsachse. (vgl. [3])

Das Differentialgleichungssystem (7) kann in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung für die Verformungen und Schnittkräfte überführt werden. Das Dgl.-System (7*) erhält man aus (7) nach Einführung der Matrixschreibweise:

$$\underline{u}^T = [U_1 \ U_2 \ \dots \ U_m], \quad \underline{v}^T = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_n], \quad \underline{Ad}^* = [a_{ji}^*]$$

$$\underline{B}^{**} = [b_{ji}^{**}], \quad \underline{C} = [c_{jk}], \quad \underline{F} = [f_{ji}], \quad \underline{G} = \underline{F}^T, \quad \underline{E} = C^T$$

$$\underline{R}^* = [r_{hk}^*], \quad \underline{H}^* = [\bar{h}_{jk}^*], \quad \underline{K}^* = [\bar{k}_{jk}^*], \quad \underline{L}^* = \underline{H}^{*T}, \quad \underline{M}^* = \underline{K}^{*T}$$

$$\underline{A}^* = [\bar{a}_{ji}^*], \quad \underline{R}^* = [\bar{r}_{hk}^*], \quad \underline{T}^* = [\bar{t}_{jk}^*], \quad \underline{U}^* = \underline{T}^{*T}, \quad \underline{V}^* = [\bar{v}_{hk}^*],$$

$$\underline{s}^{**} = [s_{hk}^{**}], \quad \underline{\hat{p}} = [\hat{p}_1 \ \hat{p}_2 \ \dots \ \hat{p}_m]^T, \quad \underline{\hat{q}} = [\hat{q}_1 \ \hat{q}_2 \ \dots \ \hat{q}_n]^T$$

Dieses Differentialgleichungssystem läßt sich unter Verwendung des Zustandsvektors

$$\underline{y}^T = [\underline{u}^T \ \underline{v}^T \ \underline{P}^T \ \underline{Q}^T \ 1] \quad \text{mit} \quad t = r_m \vartheta, \quad ()' = \frac{d}{dt}$$

in der Form

$$\underline{y}' = \underline{\Omega}^* \underline{y} \quad (12)$$

schreiben; die Systemmatrix $\underline{\Omega}^*$ enthält die Zuordnung der Querschnittswerte und Belastungen (8).

Das Differentialgleichungssystem (7*) bietet gute Voraussetzungen für eine numerische Lösung.

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{P}(t) \\ \underline{Q}(t) \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{r_m} \underline{A}^{*-1} (\underline{H}^* + \underline{K}^*) & +\frac{1}{E} \underline{A}^{*-1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{r_m} \underline{R}^{*k-1} (r_m \underline{C}^T - \underline{H}^{*T}) & 0 & 0 & +\frac{1}{G} \underline{R}^{*-1} & 0 \\ +G \left[\underline{B}^{**} - \frac{1}{r_m} \underline{A}^* - \frac{1}{r_m} (\underline{E} + \underline{E}^T) - (\underline{C} - \frac{1}{r_m} \underline{H}^*) \underline{R}^{*k-1} \cdot (\underline{C} - \frac{1}{r_m} \underline{H}^*)^T \right] & 0 & 0 & +(\underline{C} - \frac{1}{r_m} \underline{H}^*) \underline{R}^{*k-1} & -\underline{\hat{p}}(t) \\ 0 & +\frac{E}{r_m} \left[-(\underline{H}^* + \underline{K}^*)^T \underline{A}^{*-1} (\underline{H}^* + \underline{K}^*) + \underline{R}^* + \underline{T}^* + \underline{T}^{*T} + \underline{V}^* + r_m \underline{s}^{**} \right] & +\frac{1}{r_m} (\underline{H}^* + \underline{K}^*)^T \underline{A}^{*-1} & 0 & -\underline{\hat{q}}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{P}(t) \\ \underline{Q}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7^*)$$

4. Vergleich mit den Lösungen von Hirashima/Yajima und Rangelow

4.1. Die Lösung von Hirashima/Yajima

Die Autoren gehen von der Theorie von W. S. Wlassow aus, wie sie in [1], Teil dünnwandige Stabschalen mit geschlossenem Profil, dargestellt ist [7]. Für den kreisbogenförmig gekrümmten Träger geben sie auf der Grundlage einer Gleichgewichtsbeurteilung am Kreisringelement folgende Grundgleichungen an:

$$\oint \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \varphi_j dA - \oint \tau_{R\phi} \varphi_j' dA + \oint \frac{2\tau_{R\phi}}{R} \varphi_j dA + \oint p \varphi_j ds = 0 \quad (13a)$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\oint \frac{\partial \tau_{R\phi}}{\partial z} \psi_h dA - \oint \frac{\sigma_z}{R} \psi_h dA - \sum V_k \oint \frac{M_h M_k}{EI} ds + \oint q \psi_h ds = 0 \quad (13b)$$

$$k = 1, \dots, n$$

Für die Verzerrungen bzw. Spannungen werden die Produktansätze für den geraden Träger verwendet:

$$\sigma(z, s) = E \sum_{i=1}^m U_i'(z) \varphi_i(s)$$

$$\tau(z, s) = G \left[\sum_{i=1}^m U_i(z) \varphi_i'(s) + \sum_{k=1}^n V_k(z) \psi_k(s) \right] \quad (14)$$

Diese Produktansätze in die Grundgleichungen eingesetzt, ergeben das folgende System von $m + n$ linearen Differentialgleichungen für die gesuchten Funktionen $U_i(z)$ und $V_k(z)$:

$$\gamma \sum_{i=1}^m a_{ji} U_i'' - \sum_{i=1}^m \left(b_{ji} - \frac{2}{R} f_{ji} \right) U_i - \sum_{k=1}^n \left(c_{jk} - \frac{2}{R} d_{jk} \right) V_k + \frac{1}{G} p_j = 0 \quad (15a)$$

$$j = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^n r_{hk} V_k'' + \sum_{k=1}^n \left(c_{hi} - \frac{\gamma}{R} d_{hi} \right) U_i - \gamma \sum_{k=1}^n s_{hk} V_k + \frac{1}{G} q_h = 0 \quad (15b)$$

$$h = 1, \dots, n$$

mit $\gamma = \frac{E}{G}$ und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} &= \oint \varphi_j \varphi_i dA & c_{hi} &= \oint \psi_h \varphi_i' dA \\ b_{ji} &= \oint \varphi_j' \varphi_i' dA & r_{hk} &= \oint \psi_h \psi_k dA \\ c_{jk} &= \oint \varphi_j' \psi_k dA & d_{hi} &= \oint \psi_h \varphi_i dA \\ f_{ji} &= \oint \varphi_j \varphi_i' dA & s_{hk} &= \frac{1}{E} \oint \frac{M_h M_k}{EI} ds \\ d_{jk} &= \oint \varphi_j \psi_k dA & p_j &= \oint p \varphi_j dA \\ & & q_h &= \oint q \psi_h dA \end{aligned} \quad (16)$$

Für die Schnittkräfte werden ebenso wie für die Verzerrungen bzw. Spannungen auch die Ansätze für den geraden Träger verwendet.

$$P_j(z) = \oint \varphi_j dA = E \sum_{i=1}^m a_{ji} U_i' \quad (17)$$

$$Q_h(z) = \oint \tau \psi_h dA = G \left[\sum_{k=1}^n c_{hi} U_i + \sum_{k=1}^n r_{hk} V_k \right]$$

Aus dem Dargestellten ist das Wesentliche dieses Lösungsvorschlages zur Berechnung gekrümmter Träger mit dünnwandigem geschlossenem Querschnitt im Vergleich zum Lösungsvorschlag nach Pkt. 2 und 3 zu erkennen:

- 1) Beim Aufstellen der Gleichgewichtsbeziehungen wird ausschließlich der horizontale Kreisring betrachtet. Die Besonderheiten bei den vertikalen Mantelabschnitten und die Möglichkeit schräg geneigter Oberflächen werden nicht berücksichtigt. Demzufolge enthalten der 3. Summand der Gl. (13a) und der 2. Summand der Gl. (13b) nicht den Faktor $\sin \alpha$; für die horizontalen Ringquerschnittswände (Gurte) ist $\sin \alpha = 1$, für vertikale Ringquerschnittswände ist $\sin \alpha = 0$, so daß die Überlagerung der vertikalen Anteile der verallgemeinerten Koordinaten φ und ψ Null ergibt, was jedoch nicht erkennbar ist, wenn der Faktor $\sin \alpha$ fehlt. – Die Herkunft des Faktors 2 in Gl. (13a) wird nicht erklärt.

- 2) Die Verzerrungen werden entsprechend dem geraden Träger und nicht entsprechend den Verhältnissen beim Ringträger angesetzt. Das betrifft vertikale und auch horizontale Ringträgererteile.
- 3) Es wird ausschließlich mit einem konstanten mittleren Radius gerechnet. Die Autoren beziehen sich demzufolge auf Träger mit geringer Krümmung oder Träger mit im Verhältnis zum Krümmungsradius geringer Flanschbreite, so daß
- $$\frac{r(s)}{r_m} \approx 1 \quad \text{ist.} \quad (18)$$
- 4) Da sowohl für die Schnittkräfte als auch für die Spannungen die Ansätze für den geraden Träger verwendet werden, werden die Ergebnisse um so genauer sein, je geringer die Krümmung des Trägers ist.
- 5) Eine etwaige Temperaturbelastung wird nicht erfaßt.

Aus dem Vorstehenden ist zu entnehmen, daß der Vorschlag von M. Hirashima und S. Yajima nur auf schwach gekrümmte Ringträger angewendet werden sollte.

Der Krümmungsradius des Trägers im Beispiel beträgt 350 m, das Verhältnis Flanschbreite/Krümmungsradius beträgt $160/35000 = 1/219$.

Zum weitergehenden Vergleich wird das von M. Hirashima und S. Yajima angegebene Differentialgleichungssystem in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt.

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{\bar{p}}(t) \\ \underline{q}(t) \\ 1 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{E} \underline{A}^{-1} & 0 & 0 \\ -\underline{R}^{-1} \underline{C}^T & 0 & 0 & \frac{1}{G} \underline{R}^{-1} & 0 \\ \underline{G} \left[\underline{B} - \frac{2}{R} \underline{F} - \right. \\ \left. - (\underline{C} - \frac{2}{R} \underline{D}) \underline{R}^{-1} \underline{C}^T \right] & 0 & 0 & (\underline{C} - \frac{2}{R} \underline{D}) \underline{R}^{-1} & -\underline{p}(t) \\ 0 & E \underline{S} & \frac{1}{R} \underline{D}^T \underline{A}^{-1} & 0 & -\underline{q}(t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{\bar{p}}(t) \\ \underline{q}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (15^*)$$

4.2. Die Lösung von Rangelow

Der Autor geht ebenfalls von der Methode zur Berechnung prismatischer Schalen unter Berücksichtigung der Schubverzerrungen von W. S. Wlassow aus, wie sie z. B. in [1] dargestellt ist [9]. Als Ziel der Arbeit wird genannt, eine Näherungslösung für eine nach einer beliebigen ebenen Kurve gekrümmte Schale anzugeben. Rangelow bezieht sich auf Schalen mittlerer Länge mit kleiner Krümmung.

Die von Rangelow angegebenen Gleichgewichtsbeziehungen lauten:

$$\int_s p^* ds dT \varphi_j(s) - \int_s \tau \delta dT \varphi_j'(s) ds = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (19a)$$

$$\int_s q^* ds dT \psi_h(s) - \int_s M(t, s) dT \Theta_h(s) = 0 \quad h = 1, \dots, n \quad (19b)$$

$$dT = R(t, s) d\alpha \quad \Theta_h(s) = \frac{M_h(s) ds}{EI(s)}$$

$$dt = R_t d\alpha \quad M(t, s) = \sum_{k=1}^n V_k(t) M_k(s)$$

$$p^* = \kappa \delta \left(\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} + \frac{\tau}{R_t} \cos \beta \right) + p \quad (20)$$

$$q^* = \kappa \delta \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\sigma_t}{R_t} \cos \beta \right) + q$$

$$\kappa = \frac{R_t}{R(t, s)}; \quad t = R_t \alpha$$

R_t Radius des inneren Ringrandes ($s = 0$), nicht von s abhängig
 $R(t, s)$ Radius des Ringes, von s abhängig
 α Zentriwinkel
 β Winkel zwischen dem Ringsegment und der Horizontalen

p^*, q^* in die Gl. (19a), (19b) eingesetzt ergibt:

$$\int_s \kappa \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} dT \varphi_j(s) \delta ds + \int_s \kappa \frac{\tau}{R_t} \cos \beta dT \varphi_j(s) \delta ds + \int_s p dT \varphi_j(s) ds - \int_s \tau dT \varphi_j'(s) \delta ds = 0$$

$$j = 1, \dots, m \quad (21a)$$

$$\int_s \kappa \frac{\partial \sigma_t}{\partial t} dT \psi_h(s) \delta ds - \int_s \kappa \frac{\sigma_t}{R_t} \cos \beta dT \psi_h(s) \delta ds + \int_s q dT \psi_h(s) ds - \sum_{k=1}^n V_k \int_s \frac{M_k(s) M_h(s)}{EI(s)} dT ds$$

$$h = 1, \dots, n \quad (21b)$$

Die Spannungen ergeben sich bei Rangelow wie folgt:

$$\sigma(t, s) = E \left\{ \kappa \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{v \cos \beta}{R_t} \right) \right\} \quad (22)$$

$$\tau(t, s) = G \left\{ \kappa \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u \cos \beta}{R_t} \right) \right\} \quad (23)$$

Aus den obigen Gleichungen ist zu erkennen, daß Rangelow die beim Ringträger bzw. gekrümmten Träger auftretenden Verschiebungen in der Normalenrichtung (w -Verschiebungen) nicht erfaßt. Bei der Normalspannung $\sigma(t, s)$ bzw. der Dehnung fehlt deshalb der Anteil aus der Verformung in w -Richtung (vgl. Gl. (2)).

Mit den Produktansätzen nach Wlassow [1] gibt Rangelow die Spannungen wie folgt an:

$$\sigma(t, s) = E \kappa \left[\sum_{i=1}^m U_i'(t) \varphi_i(s) + \frac{1}{R_t} \sum_{k=1}^n V_k(t) \psi_k(s) \cos \beta \right] \quad (24)$$

$$\tau(t, s) = G \kappa \left\{ \sum_{i=1}^m U_i'(t) \left[\frac{\varphi_i'(s)}{\kappa} - \frac{\varphi_i(s)}{R_t} \cos \beta \right] + \sum_{k=1}^n V_k'(t) \psi_k(s) \right\} \quad (25)$$

und erhält das Differentialgleichungssystem (26)

$$\gamma \sum_{i=1}^m a_{ji}(t) U_i''(t) - \sum_{i=1}^m [a_{ji}^\beta(t) + b_{ji}(t) - e_{ji}(t)] U_i(t) - \sum_{k=1}^n [c_{jk} - (1 + \gamma) f_{jk}(t)] V_k'(t) + \frac{1}{G} p_j(t) = 0$$

$$(j = 1, \dots, m) \quad (26a)$$

$$\sum_{i=1}^m [c_{hi}(t) - (1 + \gamma) f_{hi}(t)] U_i'(t) + \sum_{k=1}^n r_{hk}(t) V_k''(t) - \gamma \sum_{k=1}^n [r_{hk}^\beta(t) + s_{hk}(t)] \cdot V_k(t) + \frac{1}{G} q_h(t) = 0$$

$$(h = 1, \dots, n) \quad (26b)$$

$$a_{ji}(t) = \int_A \kappa \varphi_j(s) \varphi_i(s) dA; \quad a_{ji}^\beta(t) = \frac{1}{R_t^2} \int_A \kappa \varphi_j(s) \varphi_i(s) \cos^2 \beta dA;$$

$$b_{ji}(t) = \int_A \frac{1}{\kappa} \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) dA; \quad c_{jk} = \int_A \varphi_j'(s) \psi_k(s) dA;$$

$$e_{ji}(t) = \frac{1}{R_t} \int_A [\varphi_j(s) \varphi_i'(s) + \varphi_j'(s) \varphi_i(s)] \cos \beta dA; \quad f_{jk}(t) = \frac{1}{R_t} \int_A \kappa \varphi_j(s) \psi_k(s) \cos \beta dA;$$

$$c_{hi} = \int_A \psi_h(s) \varphi_i'(s) dA; \quad f_{hi}(t) = \frac{1}{R_t} \int_A \kappa \psi_h(s) \varphi_i(s) \cos \beta dA;$$

$$r_{hk}(t) = \int_A \kappa \psi_h(s) \psi_k(s) dA; \quad r_{hk}^\beta(t) = \frac{1}{R_t^2} \int_A \kappa \psi_h(s) \psi_k(s) \cos^2 \beta dA;$$

$$s_{hk}(t) = \frac{1}{E} \int_s \frac{1}{\kappa} \frac{M_h(s) M_k(s)}{EI(s)} ds; \quad p_j(t) = \int_s \frac{p}{\kappa} \varphi_j(s) ds;$$

$$q_h(t) = \int_s \frac{q}{\kappa} \psi_h(s) ds \quad (27)$$

Zum weitergehenden Vergleich wird das von Rangelow angegebene Differentialgleichungssystem ebenfalls in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt.

Dabei werden zur besseren Vergleichsmöglichkeit die von Rangelow angegebenen Koeffizienten durch die analogen Koeffizienten aus Gl. (8) ausgedrückt. Es ist jedoch zu beachten, daß die Koeffizienten nicht völlig identisch sind, da an Stelle von $\kappa = R_t/R(t, s)$ in der vorliegenden Arbeit der Ausdruck $1/\beta$ verwendet wird und außerdem der konstante Krümmungsradius R_t nicht Bestandteil der Koeffizienten ist.

Ferner gilt $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, und man erhält die folgenden Ersetzungen nach Tabelle 1.

Tabelle 1
Ersetzung der Koeffizienten

Koeffizienten nach Rangelow (Gl. 27)	Koeffizienten nach Gl. (8)
a_{jj}	a_{jj}^*
a_{ji}^β	\bar{a}_{ji}^*
b_{jj}	b_{jj}^{**}
c_{jk}	c_{jk}
e_{jj}	$\bar{f}_{jj} + \bar{g}_{jj}$
f_{jk}	\bar{h}_{jk}^*
c_{hi}	e_{hi}
f_{hi}	\bar{l}_{hi}^*
r_{hk}	r_{hk}^*
r_{hk}^β	\bar{r}_{hk}^*
s_{hk}	s_{hk}^{**}
Belastungsglieder:	
p_j	p_j^{**}
q_h	q_h^{**}

Das DGl.-System für den Vorschlag von R. P. Rangelow erhält die Form (26*)

$$\begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{p}(t) \\ \underline{q}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\frac{1}{r_m} \bar{A}^{*-1} \bar{H}^* & +\frac{1}{E} \bar{A}^{*-1} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\frac{1}{r_m} \bar{R}^{*-1} (r_m \underline{C}^T - \bar{H}^{*T}) & \underline{0} & \underline{0} & +\frac{1}{G} \bar{R}^{*-1} & \underline{0} \\ +G [\bar{B}^{**} + \frac{1}{r_m^2} \bar{A}^* - & \underline{0} & \underline{0} & +(\underline{C} - \frac{1}{r_m} \bar{H}^*) \bar{R}^{*-1} & -\underline{p}(t) \\ -\frac{1}{r_m} (E + E^T) - & & & & \\ -(\underline{C} - \frac{1}{r_m} \bar{H}^*) \bar{R}^{*-1} & & & & \\ \cdot (\underline{C} - \frac{1}{r_m} \bar{H}^*)^T & & & & \\ \underline{0} & +\frac{E}{r_m^2} [-\bar{H}^{*T} \bar{A}^{*-1} \bar{H}^* & +\frac{1}{r_m} \bar{H}^{*T} \bar{A}^{*-1} & \underline{0} & -\underline{q}(t) \\ +\bar{R}^* + r_m^2 \underline{S}^{**}] & & & & \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{u}(t) \\ \underline{v}(t) \\ \underline{p}(t) \\ \underline{q}(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (26^*)$$

Das Wesentliche des Lösungsvorschlages von Rangelow zur Berechnung gekrümmter Träger mit dünnwandigem geschlossenem Querschnitt im Vergleich zum Lösungsvorschlag nach Abschnitt 3 besteht somit in folgendem:

- 1) Rangelow gibt bereits unter Verwendung des halbmomentenfreien Schalenmodells von Wlassow, wie es z. B. in [1] dargestellt ist, eine Berechnungsmethode für den kreisförmig gekrümmten Träger bzw. eine Näherung für den kreisbogenähnlich gekrümmten Träger an. Die Neigung der Oberflächen des Trägers zur Horizontalen wird ebenfalls einbezogen.
- 2) Rangelow erfaßt jedoch nicht die Verschiebungen in der Normalenrichtung. Bei der Normalspannung $\sigma(t, s)$ bzw. der Dehnung fehlt dieser Anteil. In die Grundgleichungen gehen somit die entsprechenden Arbeitsanteile nicht ein. – Aus dem DGL.-System (26*) ist im Vergleich zu (7*) das Fehlen derjenigen Querschnittswert-Matrizen zu erkennen, die durch die w-Verformungen bedingt sind: \underline{K} , \underline{K}^T , \underline{T} , \underline{T}^T , \underline{V} .
- 3) Eine etwaige Temperaturbelastung wird nicht erfaßt.

5. Zusammenfassung

Ausgehend von der halbmomentenfreien Schalentheorie von Wlassow wurden im Teil I des vorliegenden Beitrages die allgemeinen Gleichungen für Systeme mit eben gekrümmter Achse abgeleitet und die Ergebnisse gleichfalls in allgemeiner Form mit Arbeiten von Hirashima/Yajima und Rangelow verglichen.

Für alle Lösungen wurde dazu eine einheitliche Schreibweise in Form von DGL.-Systemen 1. Ordnung für die verallgemeinerten Zustandsgrößen gewählt.

Die in den Arbeiten von Hirashima/Yajima und Rangelow enthaltenen Vereinfachungen und Vernachlässigungen wurden diskutiert. Es wurde darauf hingewiesen, daß die daraus folgenden Gleichungen zu erheblichen Abweichungen führen können. Dies wird im Teil II des Beitrages am Beispiel eines Ringträgers mit Kastenquerschnitt sowohl in allgemeiner Form als auch zahlenmäßig nachgewiesen.

Literatur

- [1] Wlassow, W. S.: Dünnwandige elastische Stäbe. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.
- [2] Kissing, W.: Verallgemeinerte Stabmodelle zur Behandlung dünnwandiger geschlossener Konstruktionen unter Einbeziehung von stationären Temperaturlastfällen. Diss. B. TH Magdeburg, 1982.
- [3] Altenbach, J.; Kissing, W.: Berechnungsmodelle und -methoden für dünnwandige geschlossene Stabschalen. X. ikm Weimar (1984) H.3, S. 8 – 12.
- [4] Altenbach, J.; Kissing, W.: Numerische Berechnung konischer dünnwandig geschlossener Konstruktionen. Schiffbau Forschung, Rostock, 24 (1975) 1, S. 33 – 39.
- [5] Altenbach, J.; Kissing, W.: Statische und dynamische Analyse für prismatische und nicht prismatische Kastenträger. Technische Mechanik 7 (1986) H.1, S. 37 – 41.
- [6] Kissing, W.; Reckziegel, P.: Nichtprismatische dünnwandige Konstruktionen und ihre rechnergestützte Untersuchung mit der halbmomentenfreien Schalentheorie. Schiffbau Forschung, Rostock, 28 (1989) 4, S. 203 – 208.
- [7] Hirashima, M.; Yajima, S.: Baustatischer Beitrag zu elastischen, dünnwandigen Stäben, Bulletin of Science and Engineering Research Laboratory, Waseda University, No. 45 (1969), S. 121 – 133.
- [8] Grünberg, N. J.: Anwendung der Variationsmethode nach Prof. W. S. Wlassow bei der Berechnung kantiger Schalen mit kreisförmiger Achse. In: Experimentelle und theoretische Untersuchungen dünnwandiger räumlicher Konstruktionen, S. 102 – 130, Staatlicher Verlag für Bauwesen und Architektur, Moskau 1952.
- [9] Rangelow, R. P.: Anwendung der Variationsmethode von W. S. Wlassow bei der Festigkeitsuntersuchung von kantigen Schalen mit einer geschlossenen Querschnittskontur, gebildet durch eine beliebige ebene Kurve. Diss. TU für Bauwesen, Sofia 1965.
- [10] Altenbach, J.; Horeschi, H.: Kritische Betrachtungen zu einer Arbeit von Rangelow. Unveröffentlichte Arbeit.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. J. Altenbach
Fakultät Maschinenbau
WB Festkörpermechanik
Technische Universität „Otto von Guericke“
PSF 4120
O-3010 Magdeburg

Prof. Dr.-Ing. habil. W. Kissing
Fakultät Maschinenbau
Technische Hochschule Wismar
PSF
O-2400 Wismar

Dr.-Ing. J. Schulz
Bauakademie
Institut für Konstruktiven Ingenieurbau
Plauener Straße 163
O-1092 Berlin