

Numerische Lösung des instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Modells

Walfred Grambow, Gert Lube, Lutz Tobiska

Es wird ein Überblick über verschiedene numerische Verfahren zur Diskretisierung der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen gegeben. Dabei werden sowohl theoretische Aspekte der mathematischen Absicherung der Methoden als auch praktische Probleme der effizienten Implementierung der Verfahren diskutiert. Für spezielle Verfahren werden numerische Testresultate vorgestellt.

A review of several numerical procedures to discretize the nonstationary incompressible Navier-Stokes equations is given. We consider as well theoretical aspects of the mathematical foundation of the methods as practical problems of its efficient implementation. Numerical results are presented for a special method.

1. Vorbemerkungen zur Diskretisierung parabolischer Probleme

Als einfachstes Modellbeispiel einer parabolischen Anfangsrandwertaufgabe wird die Wärmeleitungsgleichung mit entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen betrachtet:

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f(x, t) && \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u(x, t) &= 0 && \text{für } x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Die schwache Formulierung der Aufgabe (1.1) lautet:

$$\begin{aligned} \text{Finde } u(t) \in V, \text{ so daß für alle } v \in V \\ (u'(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) &= (f(t), v) \quad t > 0, \quad \forall v \in V \\ (u(0), v) &= (u_0, v) \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (1.2)$$

wobei V den Sobolevraum $H_0^1(\Omega)$ und (\cdot, \cdot) das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ bezeichnen. Wählt man einen konformen Finite Elemente Raum V_h , d.h. $V_h \subset V$, so erhält man das (räumlich diskretisierte) semidiskrete Problem.

$$\begin{aligned} \text{Finde } u_h(t) \in V_h, \text{ so daß für alle } v_h \in V_h \\ (u_h'(t), v_h) + (\nabla u_h(t), \nabla v_h) &= (f(t), v_h) \quad t > 0 \quad \forall v_h \in V_h \\ (u_h(0), v_h) &= (u_0, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned} \quad (1.3)$$

In der Literatur angegebene Fehlerabschätzungen haben die Form:

$$\|u(t) - u_h(t)\|_0 \leq Kh^{k+1} \sup_{t \in [0, T]} |u'(t)|_{k+1}. \quad (1.4)$$

In (1.4) und im folgenden bezeichnen $\|\cdot\|_k$ und $|\cdot|_k$ die Norm bzw. Halbnorm im Sobolev-Raum $H^k(\Omega)$. Zur Ableitung der Fehlerabschätzung (1.4) wurden folgende Resultate wesentlich benutzt:

(1) Approximationseigenschaft des Finite-Element-Raumes V_h

$$\inf_{w \in V_h} \|u - w\|_0 \leq ch^{k+1} |u|_{k+1}$$

(2) Elliptische Regularitätstheorie zur $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung der Projektion von $u(t)$ auf V_h

(3) Regularitätseigenschaften der Lösung parabolischer Probleme, etwa

$$\sup_{t \in [0, T]} |u'(t)|_{k+1} \leq M.$$

Die erste Bedingung kann ohne Schwierigkeiten durch Wahl entsprechender finite Elemente erfüllt werden, für lineare Elemente gilt beispielsweise $k = 1$. Die $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung für die Projektion von $u(t)$ auf V_h nutzt im allgemeinen Dualitätsargumente, die nur für bestimmte Klassen von Gebieten theoretisch abgesichert sind. Am problematischsten sind die Forderungen an die zeitliche Regularität, wie bereits folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel: Sei Ω das eindimensionale Gebiet $(0, 1)$ und $f = 0$. Dann liefert die exakte Lösungsdarstellung von (1.1) bei

a) unstetigen Randwerten $u_0(x) = 1 - x$

$$\|u'(t)\|_0 \sim Mt^{-3/4} \quad \text{für } t \rightarrow +0$$

b) stetigen Randwerten $u_0(x) = \min(x, 1-x)$

$$\|u'(t)\|_0 \sim Mt^{-1/4} \quad \text{für } t \rightarrow +0$$

$$|u'(t)|_2 \sim Mt^{-3/4} \quad \text{für } t \rightarrow +0.$$

Am obigen Beispiel ist ersichtlich, daß die Kompatibilität der Randwerte (und im allgemeinen der rechten Seite der Differentialgleichung) die Glattheit der Lösung beeinflusst. Im Fall des einfachen Modellproblems kann bei Vorgabe der Daten (f, u_0) durch eine lokale Analyse überprüft werden, ob die gewünschte Regularität der Lösung gesichert werden kann.

Für Probleme mit dominanter Konvektion ergeben sich zusätzliche Schwierigkeiten. Die Lösung des speziellen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t - \varepsilon \Delta u + bu_x &= f(x, t) && \text{in } (0, 1) \times (0, T) \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0 && \text{für } t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für } x \in (0, 1) \end{aligned} \quad (1.5)$$

weist nämlich in Abhängigkeit vom Vorzeichen von b für kleine Werte des Parameters ε Grenzschichten (steile Gradienten der Lösung) in der Nähe von $x = 0$ bzw. $x = 1$

auf, die sich nachteilig auf die Stabilität der numerischen Lösung auswirken, falls die verwendete Netzschrittweite nicht ausreichend klein gewählt wurde. Aus Stabilitätsgründen verwendet man deshalb Verfahren vom upwind-Typ. Für das Modellproblem (1.5) wurde ein exponentiell angepaßtes Verfahren in [16] entwickelt, das gleichmäßig bezüglich des Parameters ε konvergiert. Für die im folgenden zu betrachtenden komplizierten Modelle sind das Design und die Analyse von upwind-Verfahren Gegenstand aktueller Untersuchungen.

2. Existenz und Regularität der Lösung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen

Betrachtet werden die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen im räumlich 2- bzw. 3-dimensionalen Fall. Durch Einführung dimensionsloser Größen und Wahl einer geeigneten Zeitskala kann das System der Gleichungen in der Form

$$\begin{aligned} u_t - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla p &= f & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ \nabla \cdot u &= 0 & \text{in } \Omega \times (0, T] \\ u(x, t) &= 0 & \text{für } x \in \Gamma, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & \text{für } x \in \Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

geschrieben werden, wobei $u = (u_1, \dots, u_d)$, $d = 2$ oder $d = 3$, den dimensionslosen Vektor der Geschwindigkeiten, p einen dimensionslosen Druck, f eine äußere Kraft und u_0 die zum Zeitpunkt $t = 0$ herrschende Anfangsgeschwindigkeitsverteilung bezeichnen.

Während eine große Zahl von Arbeiten sich dem stationären Fall widmet, gibt es in der Literatur vergleichsweise nur wenige Arbeiten zum instationären Fall. Die in diesem Abschnitt angegebenen Resultate basieren im wesentlichen auf den Arbeiten [7] bis [10], [19], [20].

Die schwache Formulierung der Aufgabe (2.1) lautet:

$$\begin{aligned} \text{Finde } (u(t), p(t)) \in V \times Q, \text{ so daß für alle } (v, q) \in V \times Q \\ (u'(t), v) + \nu a(u(t), v) + b(u(t), u(t), v) \\ - (p(t), \nabla \cdot v) = (f(t), v) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$(q, \nabla \cdot u(t)) = 0, \quad (u(0), v) = (u_0, v)$
wobei $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)$, $b(w, u, v) = \frac{1}{2} [(w \cdot \nabla u, v) - (w \cdot \nabla v, u)]$, $V = H_0^1(\Omega)^d$ und $Q = L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : (q, 1) = 0\}$ bezeichnen. Für theoretische Betrachtungen wird häufig noch der Raum $W = \{v \in V : \nabla \cdot v = 0\}$ der divergenzfreien Funktionen eingeführt.

Zunächst wird das Regularitätsproblem betrachtet. Hierzu treffen wir folgende Annahmen zur Regularität des Gebietes Ω und der Daten f und u_0 :

(A1) Die Lösung des stationären Stokes Problems

$$-\Delta v + \nabla q = g, \quad \nabla \cdot v = 0 \text{ in } \Omega, \quad v|_{\Gamma} = 0$$

genüge für beliebiges g aus $L^2(\Omega)^d$ der Beziehung

$$\|v\|_2 + \|q\|_0 \leq c \|g\|_0.$$

(A2) Die Anfangsgeschwindigkeitsverteilung u_0 und die Kraft f genügen den Glattheitsbedingungen:

- (i) $u_0 \in V, \quad \nabla \cdot u_0 = 0$ und $f \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^d)$
- (ii) $u_0 \in H^2(\Omega)^d$ und $f_t \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)^d)$

Dabei ist $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ die Menge aller meßbaren Funktionen $f: (0, T) \rightarrow X$, $0 < T \leq \infty$, für die der Ausdruck $(\int_0^T \|f(t)\|_X^p dt)^{1/p}$ bei $1 \leq p < \infty$ bzw. $\sup_t |f(t)|$ bei $p = \infty$ endlich bleibt. Dann gilt die folgende nichtlokale Kompatibilitätsbedingung, die für hinreichend glatte Lösungen notwendig ist.

THEOREM 1: Unter den Voraussetzungen (A1), (A2) und f hinreichend glatt gilt für jede Lösung $u \in L^\infty(0, T; W)$, $p \in L^2(0, T; Q)$ der Navier-Stokes-Gleichung die Beziehung

$$\lim_{t \rightarrow +0} \|\nabla(p(t) - p_0)\|_0 = 0$$

und p_0 genügt dem überbestimmten Neumannproblem

$$\begin{aligned} \Delta p_0 &= \nabla \cdot (f(0) - u_0 \cdot \nabla u_0) \\ \nabla p_0 &= \nu \Delta u_0 + f(0) - u_0 \cdot \nabla u_0, \text{ auf } \Gamma, \end{aligned}$$

falls mindestens eine der Größen

$$\|\nabla u_t(t)\|_0, \quad \|\nu \Delta u(t) + f(t)\|_1, \quad \int_t^T \|u_t(s)\|_2^2 ds, \quad \int_t^T \|u_{tt}(s)\|_2^2 ds$$

für $t \rightarrow 0$ beschränkt bleibt.

Nach diesem Resultat erfordert also eine Glättevoraussetzung an die Lösung des instationären Navier-Stokes-Problem eine faktisch nicht nachprüfbare Kompatibilitätsbedingung. Deshalb sind Konvergenzratenabschätzungen, die von hohen Glättevoraussetzungen ausgehen, nur von eingeschränktem Interesse. Eine quantitative Analyse zur optimalen Regularität der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen ohne Kompatibilitätsvoraussetzungen ist in [20] enthalten. Dabei wurde als Maß der maximal mögliche Exponent α verwendet, für den die α -te Potenz des Stokes-Operators angewandt auf $u(t)$ in $t = 0$ noch stetig ist. Die genannte Eigenschaft gilt für alle $\alpha < \frac{5}{4}$ und ist für α -Werte oberhalb von $\frac{5}{4}$ nicht mehr erfüllt.

THEOREM 2: (lokaler Existenzsatz)

Unter den Annahmen (A1), (A2i) gibt es ein $T > 0$, so daß das Navier-Stokes-Problem eine eindeutige Lösung besitzt, für die $u \in C([0, T], W)$, $p \in L^2(0, T; Q)$, $u_t, u_{x_i} \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ und $\|u(\cdot, t) - u_0\|_1 \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$ gilt.

THEOREM 3: (globaler Existenzsatz)

Sei zusätzlich zu den Annahmen von Theorem 2 $d = 2$ oder $d = 3$ und $\|u_0\|_1, \sup_t \|f(t)\|_0$ hinreichend klein. Dann existiert die Lösung von Theorem 2 für alle Zeiten $t \geq 0$, und die Dirichlet-Norm $\sup_{t>0} \|\nabla u(\cdot, t)\|_0$ ist beschränkt.

Für die Herleitung von Schranken der Lösung wird die Annahme

(A3) Es gibt eine Konstante $M > 0$ und eine Zeit T , $0 < T \leq \infty$ mit

$$\sup_{0 < t < T} \|\nabla u(\cdot, t)\|_0 \leq M.$$

getroffen, die im zweidimensionalen Fall oder bei kleinen Daten im dreidimensionalen Fall erfüllt ist.

THEOREM 4: Für glatte Daten und bei Erfüllung der lokalen Kompatibilitätsbedingung $u_{0|\Gamma} = 0$ und $\nabla \cdot u_0 = 0$ gilt für die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung

$$\|u(t)\|_m \leq \text{const } t^{1-m/2}, \quad \|p(t)\|_{m-1} \leq \text{const } t^{1-m/2}.$$

Weitere detaillierte Abschätzungen der Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen und deren Ableitungen findet man in [7], [9], [20].

3. Diskretisierungsverfahren

3.1. Semidiskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen

Ausgehend von der schwachen Formulierung (2.2) der Navier-Stokes-Gleichungen erhält man durch eine finite-Elemente-Diskretisierung im Ort das semidiskrete Problem

$$\begin{aligned} \text{Finde } (u_h(t), p_h(t)) \in V_h \times Q_h, \text{ so daß für alle } (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \\ (u_h'(t), v_h) + \nu a_h(u_h(t), v_h) + b_h(u_h(t), u_h(t), v_h) \\ - (p_h(t), \nabla \cdot v_h) + (q_h, \nabla \cdot u_h(t)) = (f(t), v_h) \\ (u_h(0), v_h) = (u_0, v_h). \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Hierbei bezeichnen V_h und Q_h finite Elementeansätze zur räumlichen Approximation des stetigen Geschwindigkeits- bzw. Druckfeldes, die den nachfolgenden Bedingungen genügen mögen:

(B1) Jedes Element der Vernetzung enthält einen Kreis (Kugel) vom Radius $k_1 h$ und ist enthalten in einem Kreis (Kugel) vom Radius $k_2 h$.

(B2) Im Falle nichtkonformer finiter Elemente gelte entlang eines zu K_1 und K_2 gehörenden Elementrandes Γ^*

$$\int_{\Gamma^*} \{v|_{K_1} - v|_{K_2}\} ds = 0 \quad (3.1.2)$$

für alle $v \in V_h$. Ist K_1 ein Randelement, so gilt (3.1.2) sinngemäß mit $v|_{K_2} = 0$.

(B3) Die Räume V_h und Q_h genügen den Approximationseigenschaften

$$\inf_{v \in V_h} \|\nabla(u-v)\|_0 \leq \text{const } h \|u\|_2 \quad \text{für } u \in H^2(\Omega)$$

$$\inf_{q \in Q_h} \|p-q\|_0 \leq \text{const } h \|p\|_1 \quad \text{für } p \in H^1(\Omega)$$

(B4) Die diskrete Version der LBB-Bedingung sei erfüllt, d. h., es gibt ein positives α , so daß für alle h und $q_h \in Q_h$

$$\|q_h\|_0 \leq \frac{1}{\alpha} \sup_{v_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot v_h)}{|v_h|_1} \quad (3.1.3)$$

Dann gilt hinsichtlich der räumlichen Diskretisierung die folgende Fehlerabschätzung [7]:

THEOREM 5: Sei Ω ein konvexes Polygon oder Polyeder und seien die Voraussetzungen (A1), (A2), (A3),

(B1), ..., (B4) erfüllt. Dann gelten mit den Konstanten $c_1(t) \leq K \exp(Kt)$, $c_2(t) \leq K [\min(1, t)]^{-1/2} \exp(Kt)$ die Fehlerabschätzungen

$$\|(u-u_h)(t)\|_0 \leq c_1(t) h^2, \quad 0 \leq t < T$$

$$\|(p-p_h)(t)\|_0 \leq c_2(t) h, \quad 0 < t < T.$$

Von den Voraussetzungen (B1), ..., (B4) erweist sich (B4) als restriktiv. So können nicht beliebige Paare finiter Elemente zur Geschwindigkeits- und Druckapproximation verwendet werden. Mögliche Kombinationen sind z. B.:

a) Nichtkonformes P_1/P_0 Element (Crouzeix/Raviart) mit stückweise linearer Geschwindigkeits- und stückweise konstanter Druckapproximation

b) „Mini“-Element P_1^*/P_1 (Arnold/Brezzi/Fortin) mit stückweise linearer, kubisch angereicherter Geschwindigkeits- und stückweise linearer Druckapproximation

c) Quadratisches P_2/P_1 Element (Taylor/Hood) mit stückweise quadratischer Geschwindigkeits- und stückweise linearer Druckapproximation.

Fordert man aus programmtechnischen Gründen die Verwendung von Elementepaaren, die nicht der diskreten LBB-Bedingung (B4) genügen, so ist von modifizierten Formulierungen (Stromlinien-Diffusions-Methode, Penalty-Methode, kleinste Quadrate Formulierung) der Navier-Stokes-Gleichungen auszugehen (vgl. [24], [25] und Abschnitt 3.4).

Im Fall großer Reynoldszahlen dominieren die konvektiven Terme in den Impulsbilanzgleichungen der Navier-Stokes-Gleichungen, und es entstehen die für das Modellproblem (1.5) bereits erwähnten Stabilitätsprobleme. Die Anwendung von upwind-Techniken bei der Diskretisierung beruht auf der Ersetzung der Trilinearform $b(\dots)$ in (3.1.1) durch eine (nicht notwendig Trilinear-) Form b_h^* mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (1) \quad b_h^*(w_h, v_h, v_h) &\geq 0 \quad \text{für } w_h \in W_h, v_h \in V_h \\ (2) \quad |b_h^*(u_h, v_h, w_h) - b(u_h, v_h, w_h)| \\ &\leq ch^p \|u_h\|_1 \|v_h\|_1 \|w_h\|_1 \\ &\quad \text{für } u_h, v_h, w_h \in V_h \end{aligned}$$

In [21], [23] sind für das nichtkonforme P_1/P_0 -Element eine Klasse von upwind-Verfahren entwickelt und analysiert worden.

3.2. Zeitdiskretisierungen zur Lösung des semidiskreten Problems

Die Ermittlung der Lösung des semidiskreten Problems ist gleichzusetzen mit der Ermittlung der Lösung eines hochdimensionalen gewöhnlichen DGL-Systems. Dazu machen wir für das Problem (3.1.1) die Ansätze

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) v_j; \quad v_j \in V_h \quad (3.2.1)$$

$$p_h(t) = \sum_{j=1}^M p_j(t) q_j; \quad q_j \in Q_h \quad (3.2.2)$$

wobei die v_j ; $j = 1, \dots, N$ eine Basis in V_h und die q_j ; $j = 1, \dots, M$ eine Basis in Q_h bilden. Aus (3.1.1) folgt dann

$$\sum_{j=1}^N (v_j, v_i) u_j'(t) + \sum_{j=1}^N [a_n(v_j, v_i) + b_n(u_h(t), v_j, v_i)] u_j(t) - \sum_{l=1}^N (q_l, \nabla \cdot v_i) p_l(t) = (f(t), v_i); \quad (3.2.3)$$

$i = 1, \dots, N$

$$\sum_{j=1}^N (\nabla \cdot v_j, q_m) u_j(t) = 0; \quad m = 1, \dots, N \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{j=1}^N (v_j, v_i) u_j(0) = (u_0, v_i) \quad i = 1, \dots, N$$

Zur Abkürzung werden die Matrizen D für die Massenmatrix $A(U_h(t))$ für die Steifigkeitsmatrix, B für die dem Gradienten entsprechende Matrix, und die Vektoren U_h, P_h, F_h und G_h eingeführt. Sie sind definiert durch

$$D = ((v_j, v_i)) = (d_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, N$$

$$A(U_h(t)) = (v_j a_n(v_j, v_i) + b_n(u_h(t), v_j, v_i)) = (a_{ij}(U_h(t))),$$

$$B = ((q_l, \nabla \cdot v_i)) = (b_{il}); \quad i = 1, \dots, N; \quad l = 1, \dots, M$$

$$U_h(t) = [u_1(t), \dots, u_N(t)]^T,$$

$$P_h(t) = [p_1(t), \dots, p_M(t)]^T,$$

$$F_h(t) = [(f(t), v_1), \dots, (f(t), v_N)]^T,$$

$$G_h = [(u_0, v_1), \dots, (u_0, v_N)]^T.$$

Im Falle einer upwind-Diskretisierung tritt in (3.2.3) und bei $A(U_h(t))$ an Stelle des diskretisierten Konvektionstermes $b_n(u_h(t), v_j, v_i)$ der neue Term $b_n^*(u_h(t), v_j, v_i)$.

Das DGL-System läßt sich somit in der Form

$$D U_h'(t) + A(U_h(t)) U_h(t) - B P_h(t) = F_h(t) \quad (3.2.5)$$

$$B^T U_h(t) = 0 \quad (3.2.6)$$

$$D U_h(0) = G_h$$

schreiben. Schwierigkeiten sind dabei die vom Konvektionsterm eingebrachte Nichtlinearität $A(U_h(t)) U_h(t)$ und die hohe Steifigkeit des Problems.

Zum Vorteil nutzen kann man wieder wie beim stationären Problem die schwache Besetztheit der Systemmatrizen A, B und D . Führt man ein „mass lumping“ durch oder verwendet z.B. nichtkonforme P_1/P_0 Elemente (Crouzeix/Raviart), dann ist D eine Diagonalmatrix.

Für die Behandlung der Nichtlinearität ergeben sich im Zusammenhang mit den verschiedenen numerischen Verfahren folgende Möglichkeiten (siehe [18]), wobei zur Abkürzung $U_h^n = U_h(t_n), u_h^n = u_h(t_n), P_h^n = P_h(t_n), p_h^n = p_h(t_n), F_h^n = F_h(t_n)$ und $k = t_{n+1} - t_n$ gesetzt wird.

a) Semi-implizite Diskretisierung

Ein explizites lineares Mehrschrittverfahren wird wie üblich angewandt. Der Konvektionsterm braucht nicht linearisiert zu werden. Als Beispiel erhält man mit dem Euler-Vorwärts-Verfahren

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{k} D - B \\ B^T \quad 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} U_h^{n+1} \\ P_h^{n+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} F_h^n - A(U_h^n) U_h^n + \frac{1}{k} D U_h^n \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.2.7)$$

Das Gleichungssystem ist linear. Zur Sicherung der Stabilität muß die Schrittweite k einer Bedingung der Gestalt $k \leq c(u, h, v)$ genügen, die sehr einschränkend ist. Soll der Zeiddiskretisierungsfehler die gleiche Größenordnung haben wie der Fehler bei der Raumdiskretisierung, so gilt $k = O(h^2)$. Bei Einsatz von expliziten Verfahren höherer Approximationsordnung bleibt die linke Seite von (3.2.7) bestehen. Auf Grund ihrer numerischen Instabilität sind die expliziten Formeln aber nur als Prädiktor geeignet.

b) Semi-implizite Diskretisierung

Auf (3.2.5) wird ein implizites lineares Verfahren angewandt. Zusätzlich erfolgt eine Linearisierung des Konvektionsterms.

Als Beispiel diene das Euler-Rückwärts-Verfahren.

$$\left[\begin{array}{cc} \frac{1}{k} D + A(U_h^n) & -B \\ B^T & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} U_h^{n+1} \\ P_h^{n+1} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} F_h^{n+1} + \frac{1}{k} D U_h^n \\ 0 \end{array} \right] \quad (3.2.8)$$

Das Gleichungssystem ist linear. Bei Einsatz eines Verfahrens höherer Ordnung ändert sich die linke Seite von (3.2.8) nur insofern, als daß vor den Matrizen A und B vom Verfahren abhängige Konstanten auftreten. Nach [18] ist dieses Schema jedoch nicht unbedingt stabil.

c) Implizite Diskretisierung

Im Gegensatz zu b) wird der Konvektionsterm nicht linearisiert.

$$\frac{1}{k} D U_h^{n+1} + A(U_h^{n+1}) U_h^{n+1} - B P_h^{n+1} = F_h^{n+1} + \frac{1}{k} D U_h^n \quad (3.2.9)$$

$$B^T U_h^{n+1} = 0$$

Man erhält ein nichtlineares Gleichungssystem. Bei einem Verfahren höherer Ordnung treten analog zu b) bei den Matrizen A und B verfahrensabhängige Konstanten auf. Die Behandlung der Nichtlinearität kann mit einem Multigridalgorithmus erfolgen, was sich auf Grund der hohen Dimension der Gleichungssysteme in allen Fällen ohnehin empfiehlt. Die alleinige Anwendung eines Multigridalgorithmus auf nichtlineare Gleichungssysteme bedingt ein FAS (Full Approximation Scheme). Bei nichtlinearen Problemen ist die Multigridkonvergenzrate erfahrungsgemäß nicht so gut wie bei linearen Problemen. Deshalb kann es nützlich sein, Multigrid mit einem anderen Verfahren, z. B. Newton, welches das Gleichungssystem (3.2.9) über mehrere lineare Gleichungssysteme iterativ löst, zu kombinieren. Bei der Verwendung des Newton-Verfahrens muß $A(U_h^{n+1})$ nach den u_i^n stetig differenzierbar sein, weshalb bei Benutzung einer Upwinddiskretisierung ein gewichtetes Upwind (siehe [23]) mit einer differenzierbaren Kennfunktion verwendet werden muß. Bezeichnet man mit $U_h^{n+1,p}$ die p -te Näherung von U_h^{n+1} beim Newton-Verfahren und mit δU_h den Zuwachs bei einem Iterationsschritt, also $U_h^{n+1,p+1} = U_h^{n+1,p} + \delta U_h$, so ist für (3.2.9) das lineare Gleichungssystem

$$\left[\begin{array}{c} \frac{1}{k} D + A(U_h^{n+1,p}) + \{[\text{grad}_U A(U_h^{n+1,p})] U_h^{n+1,p}\}^T - B \\ B^T \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \begin{pmatrix} \delta U_h \\ P_h^{n+1} \end{pmatrix} \\ & = \begin{pmatrix} F_h^{n+1} + \frac{1}{k} D U_h^n - \frac{1}{k} D U_h^{n+1,p} - A(U_h^{n+1,p}) U_h^{n+1,p} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

für $p = 1, \dots$ zu lösen.

Interessiert nicht der stationäre Endzustand, sondern eine gute Approximation der Lösung des semidiskreten Problems für jeden Zeitpunkt des betrachteten Zeitintervalls $[0, T]$, so kommt im Fall hoher Reynoldszahlen nur eine implizite Diskretisierung und im Fall hinreichend kleiner Reynoldszahlen auch eine semi-implizite Diskretisierung in Frage. Im ersten Fall muß das ausgewählte Verfahren stark A-stabil sein. Wie aus numerischen Experimenten hervorgeht, reichen einfache A-stabile Verfahren, wie z. B. Crank-Nicolson nicht aus [19]. Nun hat aber gerade das Crank-Nicolson-Verfahren die vorteilhafte Eigenschaft, tatsächlich vorhandene Schwingungen in der Lösung des semidiskreten Problems nicht zu dämpfen, was bei vielen A-stabilen Verfahren geschieht.

Als Kompromiß bietet sich z. B. das gemittelte Verfahren aus Euler-vorwärts und Euler-rückwärts an. Der Mittlungsparameter sei θ . Bei $\theta = 0$ erhält man das Euler-vorwärts-, bei $\theta = 1$ das Euler-rückwärts- und bei $\theta = 0.5$ das Crank-Nicolson-Verfahren. Wählt man $\theta = 0.5 + \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon \ll 0.5$, so ist das Verfahren stark A-stabil. Da θ in der Nähe von 0.5 liegt, bleibt die Dämpfung realer Schwingungen erträglich und weicht um so weniger vom Faktor 1 ab, je kleiner ε wird. Bei der impliziten Variante erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} D U_h^{n+1} + (0.5 + \varepsilon) A(U_h^{n+1}) U_h^{n+1} - B P_h^{n+1} \\ & = (0.5 - \varepsilon) F_h^n + (0.5 + \varepsilon) F_h^{n+1} \\ & - (0.5 - \varepsilon) A(U_h^n) U_h^n + \frac{1}{k} D U_h^n \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

$$B^T U_h^{n+1} = 0$$

Das Verfahren hat aber nur die Approximationsordnung $O(k)$. Lineare Mehrschrittverfahren höherer Approximationsordnung zu verwenden, bringt keinen Gewinn, da A-stabile lineare Mehrschrittverfahren höchstens die Konvergenzordnung 2 besitzen (siehe [1]).

Weitere Möglichkeiten sind M-zyklische Verfahren oder Block-implizite Verfahren, wo A-stabile Verfahren höherer Konvergenzordnung nachgewiesen sind. Neben der Tatsache, daß solche Verfahren schwerer zu implementieren sind, ist die Eigenschaft fehlender Schwingungsdämpfung wie beim Crank-Nicolson-Verfahren völlig ungeklärt.

Werden die Verfahren bei hohen Reynoldszahlen instabil, kann eine Upwind-Technik benutzt werden.

3.3. Zeit-Splitting-Verfahren

Eine weitere Möglichkeit, die theoretisch noch nicht abgesichert ist, aber in praktischen Rechnungen in der Literatur zu brauchbaren Ergebnissen führt, ist das Operator-Splitting. Die Matrix A wird dazu in zwei Teile zerlegt.

$$A(U_h(t)) = \nu A_0 + A_K(U_h(t)), \quad (3.3.1)$$

wobei $A_0 = (a_h(v_j, v_i))$ und $A_K(U_h(t)) = (b_h(u_h(t), v_j, v_i))$ ist. A_0 ergibt sich damit aus dem Laplace-Operator und A_K aus dem Konvektionsterm.

In [2] wird folgende Idee untersucht. Für die Lösung U_h^{n+1} im Zeitpunkt t_{n+1} wird das Minimumproblem

$$\min_{w_h \in V_h} \left\{ \int_{\Omega} |u_h^{n+1} - w_h|^2 dx \right\}: \quad u_h^{n+1} \in V_h$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} D U_h^{n+1} + \nu A_0 U_h^{n+1} + A_K(W_h) W_h - B P_h^{n+1} = F_h^{n+1} + \frac{1}{k} D U_h^n \\ & B^T U_h^{n+1} = 0 \end{aligned}$$

behandelt, wobei $w_h = \sum_{j=1}^N w_j v_j$ und $W_h = [w_1, \dots, w_N]^T$ gilt.

Die Lösung mittels einer vorkonditionierten konjugierten Gradientenmethode führt auf 3 Stokes-Probleme. Nach [18] hat das Verfahren gute Stabilitätseigenschaften. Die Rechenzeit ist jedoch zu hoch. Ein weniger aufwendiges Verfahren wurde von Glowinski [3] angegeben, welches einen Parameter θ für Zwischenschritte benutzt.

$$\frac{1}{k\theta} D(U_h^{n+\theta} - U_h^n) + A_0 U_h^{n+\theta} + A_K(U_h^n) U_h^n - B P_h^{n+\theta} = F_h^{n+\theta};$$

$$B^T U_h^{n+\theta} = 0$$

$$\frac{1}{(1-2\theta)k} (U_h^{n+1-\theta} - U_h^{n+\theta}) + A_0 U_h^{n+\theta}$$

$$+ A_K(U_h^{n+1-\theta}) U_h^{n+1-\theta} - B P_h^{n+1-\theta} = F_h^{n+1-\theta};$$

$$B^T U_h^{n+1-\theta} = 0$$

$$\frac{1}{k\theta} D(U_h^{n+1} - U_h^{n+1-\theta}) + A_0 U_h^{n+1}$$

$$+ A_K(U_h^{n+1-\theta}) U_h^{n+1-\theta} - B P_h^{n+1} = F_h^{n+1};$$

$$B^T U_h^{n+1} = 0$$

Das erste und letzte Gleichungssystem stellen Stokes-Probleme dar. Das mittlere Gleichungssystem steht für ein Euler-Problem. Es ist mit obigem Minimumproblem behandelbar oder mit einem anderen Verfahren lösbar.

Auch hier ist eine Upwind-Diskretisierung zur Stabilisierung des Verfahrens bei höheren Reynoldszahlen anwendbar.

3.4. Raum-Zeit-Diskretisierungen der Navier-Stokes-Gleichungen

Als Alternative zum Semidiskretisierungskonzept werden vor allem von Hughes bzw. Johnson und ihren Mitarbeitern ([12], [13], [6], [11], [22]) FEM mit Raum-Zeit-Elementen empfohlen. Die räumlich stetige, jedoch an den Zeitebenen $t = t_i$ ggf. unstetig verheftete Ansatzfunktionen erhält man ein implizites Nichtstandard-Zeitintegrationsverfahren für jede Zeitschicht (t_i, t_{i+1}) .

Sei vereinfachend $T_h = (K_j)$ eine reguläre Finite-Elemente-Diskretisierung des Gebietes. Wir definieren Zeit-

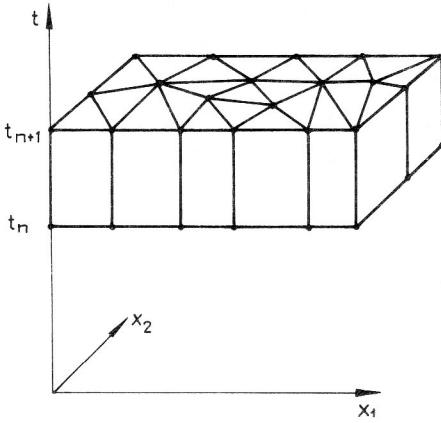


Bild 1
Raum-Zeit-Element-Diskretisierung

ebenen über $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = T$ durch $I_n = (t_n, t_{n+1})$, Zeitschichten $S_n = \Omega \times I_n$ (vgl. Bild 1) und erhalten die Zerlegung $K_h = (K_j^n)$, $K_j^n = K_j \times I_n$ von $\Omega \times (0, T)$. Weiter sei mit $k \in N$, $l, r, s \in N_0$

$$V_h = \prod_{n=0}^N V_h^n, \quad Q_h = \prod_{n=0}^N Q_h^n$$

Dabei sei V_h^n bzw. Q_h^n die Menge aller Funktionen aus $H^1(S_n)$, deren Einschränkungen auf jedes Element K_j^n Produkte von Polynomen in x bzw. t vom Grade k bzw. l (bzgl. V_h^n) und r bzw. s (bzgl. Q_h^n) sind. Zusätzlich mögen die Funktionen von V_h^n auf dem Randteil $\partial\Omega \times I_n$ verschwinden.

Als Alternative zur Verwendung von diskreten Räumen, die der LBB-Bedingung (B. 4) – vgl. Abschn. 3.1 – genügen, wird hier das Galerkin-Least-squares-Konzept (vgl. [11]) betrachtet, das zugleich auch zur Behandlung konvektionsdominanter Probleme geeignet ist:

Finde $\hat{u}_n = (u_n, p_n) \in V_h \times Q_h$ für $n = 0, 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} & \nu(\nabla u_h, \nabla v_h)_{S_n} + \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} + u_h \cdot \nabla u_h, v \right)_{S_n} \\ & - (p_h, \operatorname{div} v)_{S_n} + (r u_h, v)_{S_n} + \\ & \sum_{j=1}^J \delta_j^n \left(\frac{\partial u_h}{\partial t} - \nu \Delta u_h + u_h \cdot \nabla u_h + \nabla p_h - f, \right. \\ & \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + u_h \cdot \nabla v + \nabla q \right)_{K_j^n} + \\ & (\operatorname{div} u_h, q)_{S_n} + \sum_{j=1}^J (\gamma_j^n \operatorname{div} u_h, \operatorname{div} v)_{K_j^n} + \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

$$(u_{h,+}^n - u_{h,-}^n, v_+^n)_{\Omega} = (f, v)_{S_n}, \quad \forall v = (v, q) \in V_h \times Q_h^n$$

Der Fall $\delta_j^n = \gamma_j^n = 0 \quad \forall K_j^n \in K_h$ entspricht dem Galerkin-Verfahren mit in t unstetiger Raum-Zeit-Diskretisierung. Die Einarbeitung des Integrals $(u_{h,+}^n - u_{h,-}^n, v_+^n)_{\Omega}$ mit

$$v_{\pm}^n = \lim_{s \rightarrow \pm 0} v(x, t_n + s) \quad (3.4.3)$$

in das diskrete Problem (3.4.2) entspricht einer „schwachen“ Auferlegung einer Anfangsbedingung bei $t = t_n$ (vgl. [15]), so daß eine Information über die Lösung von Zeitschicht S_{n-1} zu S_n (im Sinne des time-marching) ausgehend von der Anfangsbedingung

$$(u_{-}^0, v_{+}^0)_{\Omega} = (u_0, v_{+}^0)_{\Omega} \quad \forall v \in V_h^0. \quad (3.4.4)$$

transportiert wird. Der mit r behaftete Term in der 1. Zeile von (3.4.2) sichert die Nichtnegativität des Terms $(u_h \cdot \nabla u_h, u_h)_{S_n}$ für nicht diskret-divergenzfreie Ansatzfunktionen. Dabei hängt r von $\operatorname{div} u_h$ ab.

Die 2. und 3. Zeile von (3.4.2) enthalten Least-squares-Formen für $\delta_j^n, \gamma_j^n > 0$ der Impuls- bzw. Kontinuitätsgleichung in (2.1). (3.4.2) ist in dem Sinne zu (2.1) konsistent, daß für solche Lösungen $\hat{u} = (u, p)$, die (2.1) im L_2 -Sinn erfüllen, die Least-squares-Anteile in (3.4.2) gerade verschwinden. Bei stückweise linearer Geschwindigkeitsinterpolation (bzw. bei Vernachlässigung von Δv) reduziert sich (3.4.2) auf die Stromlinien-Diffusions-FEM (vgl. [6], [12], [13]).

Ein wichtiger Effekt der mit δ_j^n behafteten Least-squares-Terme ist, daß für $\delta_j^n > 0$ die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung (B. 4) nicht erfüllt werden muß. Insbesondere sind dann beliebige $\{V_h^n, Q_h^n\}$ -Kopplungen (z. B. von gleicher Ordnung ($k = r, l = s$)) möglich. Die in [13] vorgeschlagene Verwendung exakt divergenzfreier Geschwindigkeitsansätze ist problematisch, da sie z. B. keine stückweise lineare Geschwindigkeitsapproximation erlaubt oder aber den Übergang von der Formulierung des Navier-Stokes-Problems in ursprünglichen Variablen u, p zu Stromfunktions-Formulierungen erfordert. Im Spezialfall stückweise linearer Elemente ($k = l = r = s = 1$) wird in [6] die Existenz diskreter Lösungen behauptet und für glatte, laminare Lösungen von (2.1) mit

$$\begin{aligned} & \max \{ \|u\|_{W^{1,\infty}(S^N)}; \|u\|_{W^{2,4}(S^N)}; \|p\|_{W^{2,2}(S^N)} \} \\ & = \alpha < \infty \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

folgende Konvergenzaussage für $\hat{e} = \hat{u} - \hat{u}_h = (e_u, e_p)$ auf $S^N = \bigcup_{n=1}^N S_n$ gezeigt

$$\begin{aligned} & (\nu \|\nabla e_u\|_{L^2(S^N)} + \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_j \delta_j^n \left\| \frac{\partial e_u}{\partial t} \cdot e_u \cdot \nabla e_u + \nabla p \right\|_{L^2(K_j^n)}^2 + \\ & + \sum_{n=0}^{N-1} \sum_j \gamma_j^n \|\operatorname{div} e_u\|_{L^2(K_j^n)}^2)^{1/2} \leq C_1(\alpha) h^{3/2} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

$$\|\nabla e_p\|_{L^2(S^N)} \leq C_2(\alpha) h^{1/2}. \quad (3.4.7)$$

Ferner werden Integrale über den Fehler e_u an den Zeitebenen $t = t_i$ kontrolliert.

Offenbar wird in (3.4.5) vorausgesetzt, daß die Größe α nicht von ν abhängt, was im allgemeinen Fall natürlich nicht gilt. Obwohl die Abschätzungen (3.4.6), (3.4.7) auch für den Grenzfall $\nu = 0$, d. h. für das inkompressible Euler-Modell gelten, deckt die Konvergenzanalyse die praktisch interessanten Fälle ohne Voraussetzung (3.4.5) nicht ab. Ausgewählte Testrechnungen im räumlich zweidimensionalen Fall ($d = 2$) findet man z. B. in [6], [12], [22]. Sie erlauben aber noch keinen Schluß über die Robustheit der Methode bei praktisch interessanten Innen- und Außenströmungsproblemen, insbesondere für $d = 3$.

4. Numerisches Testbeispiel

Mit numerischen Testreihen für die Modellgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \varepsilon \Delta u + b \nabla u = f \quad \text{in } Q \quad (4.1)$$

wurden zunächst Vor- und Nachteile von

a) Einschritt-Verfahren (θ -Methode – vgl. Abschn. 3.2) zur Zeitdiskretisierung bzw.

b) Raum-Zeit-Diskretisierungsverfahren

ermittelt, um eine geeignete Diskretisierungsstrategie für das Navier-Stokes-Problem (2.1) auszuwählen.

Für (4.1) sind die Verfahren a) und b) theoretisch (d. h. Existenz, Eindeutigkeit, Stabilität und Konvergenz) gesichert und als etwa gleichwertig anzusehen (vgl. [26] bzw. [11], [14], [15]).

Unter Verwendung stückweise linearer Ansatzfunktionen (bei a) zur Semidiskretisierung in x , bei b) Raum-Zeit-Elemente) wurde einheitlich das Galerkin/least-squares-Konzept (hier identisch mit Stromlinien-Diffusion-FEM $\hat{=}$ SDFEM) benutzt (vgl. [14]).

Die Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Beide Zugänge erscheinen prinzipiell als geeignet für die Lösung derartiger konvektionsdominanter Transportprobleme. Bei Problemen mit hinreichend glatten Daten erhält man gemittelt nahezu optimale L^2 -Konvergenzraten der Ordnung 2, bei unstetigen Daten aber nur die Ordnung 0.5.
- Bei den Einschrittverfahren ist die Wahl $\theta \geq 1/2$ aus Stabilitätsgründen notwendig. Für $\theta = 1/2$ (Crank-Nicolson) ergeben sich jeweils die genauesten Lösungen bei diesen Testrechnungen.
- Bei genügend glatten Lösungen ist das Verfahren a) bezüglich der upwind-Parameter δ_j^n robust. Die genauesten Lösungen findet man für Werte von δ_j^n nahe bei 0 (d. h. ohne upwinding bezüglich der Ortskoordinaten). Verfahren b) erfordert auch bei glatten Lösungen positive upwind-Parameterwerte.
- In Problemen mit glatten Lösungen tritt infolge der numerischen Diffusion ein Amplitudenverlust ein. Bei Raum-Zeit-Elementen ist die numerische Diffusion deutlich stärker als etwa beim Crank-Nicolson-Verfahren.
- Als wesentlicher Nachteil der Raum-Zeit-Diskretisierung ist der deutlich größere Aufwand gegenüber der Semidiskretisierung anzusehen. So ist bei linearen Elementen in t die Zahl der Freiheitsgrade im Modellproblem (4.1) doppelt so hoch wie bei Einschrittverfahren.

Im Ergebnis der Untersuchungen zum Problem (4.1) wurde (wesentlich bedingt durch obige Aufwandsüberlegungen mit Blick auf den 3D-Fall) zur Diskretisierung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen (2.1) das Verfahren der Semidiskretisierung mit räumlicher FEM-Verzerrung und Zeitintegration mittels implizitem Euler-Verfahren (vgl. Abschnitt 3.2) verwendet [17]. Es lag das FORTRAN-Programm NAVSTO (vgl. [4]) mit nichtkonformer stückweise linearer Geschwindigkeitsapproximation und stückweise konstanter Druckapproximation zugrunde

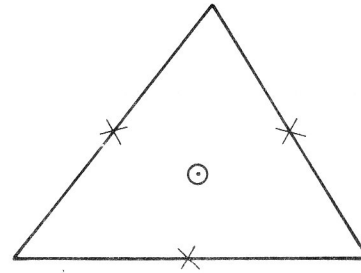


Bild 2
Freiheitsgrade für Geschwindigkeit (x) und Druck (o)

(vgl. Bild 2). Diese Diskretisierung genügt der diskreten Babuška-Brezzi-Bedingung (B. 4). Im konvektionsdominanten Fall ($Re = \nu^{-1} \gg 1$) werden die konvektiven Terme in (2.1) mittels einer gewichteten upwind-Technik [21], [23] approximiert (vgl. auch Abschn. 3.1).

Die semidiskretisierte Form von (2.1) lautet:

$$\begin{aligned} \text{Finde } (u_h(t), p_h(t)) \in V_h \times Q_h, \text{ so daß } \forall (v_h, q_h) \in V_h \times Q_h \\ (u_h'(t), v_h) + \nu a_h(u_h(t), v_h) + b_h^*(u_h(t), u_h(t), v_h) - \\ - (p_h(t), \text{div}_h v_h) + (q_h, \text{div}_h u_h(t)) = (f(t), v_h) \quad (4.2) \\ u_h(0, v_h) = (u_0, v_h) \end{aligned}$$

Dabei sind a_h bzw. div_h geeignete Erweiterungen der Bilinearform a bzw. des Divergenzoperators div aufgrund der unstetigen Geschwindigkeits-Ansatzfunktionen. Die upwind-Diskretisierung b_h^* von $b(u, v, w)$ genügt den im Abschnitt 3.1 für konvektionsdominante Fälle geforderten Bedingungen und trägt der Stärke des Flusses des Strömungsfeldes durch innere Kanten einer zur ursprünglichen Triangulierung von Ω dualen Vernetzung Rechnung. Detaillierte Hinweise findet man dazu in [21], [23].

Die Zeitableitung wird mittels impliziter Euler-Regel diskretisiert. Durch die L^2 -Orthogonalität der Geschwindigkeits-Ansatzfunktionen ist speziell die Massematrix D eine Diagonalmatrix. Die entstehenden nichtlinearen Gleichungssysteme werden mittels FAS-Multigrid-Technik gelöst (vgl. [5]). Mathematische Konvergenzuntersuchungen zum zugehörigen stationären Problem findet man in [21], [23].

Als Testproblem wurde eine Kanalströmung mit eingebautem Zylinderhindernis berechnet (vgl. Bild 3).

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + u \nabla u + \nabla p = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \text{div } u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (4.3) \end{aligned}$$

$$u = g(x), \quad (x, t) \in \partial \Omega \times (0, T),$$

$$u = u^0(x) \quad (x, t) \in \Omega \times \{0\}$$

mit

$$g(x) = \begin{cases} 0 & , x_2 = 0 \text{ bzw. } x_2 = H \\ g_0 x_2 (H - x_2) & , x_1 = 0 \text{ bzw. } x_1 = L \end{cases}$$

und $L = 20$, $H = 10$, $R = 3$, $g_0 = 1$ und $\nu = 10^{-i}$, $i = 1, 2, 3$.

Für die Werte $\nu = 10^{-2}$ bzw. $\nu = 10^{-3}$ wurden auf einem Netz mit 512 Dreiecken (2304 Freiheitsgrade) Anlaufrech-

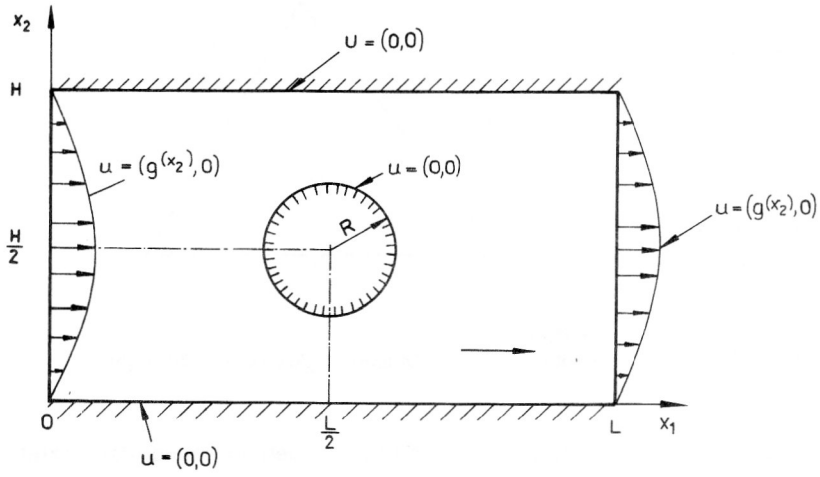
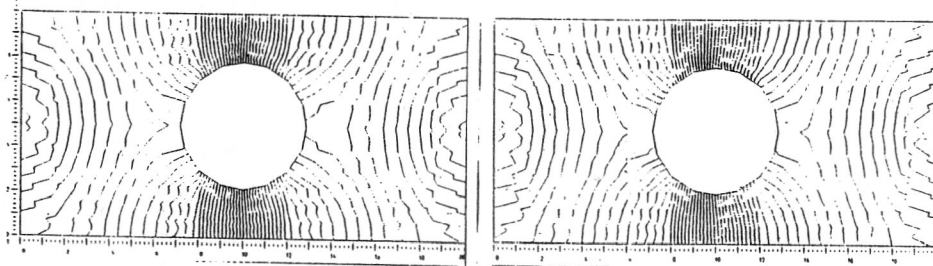
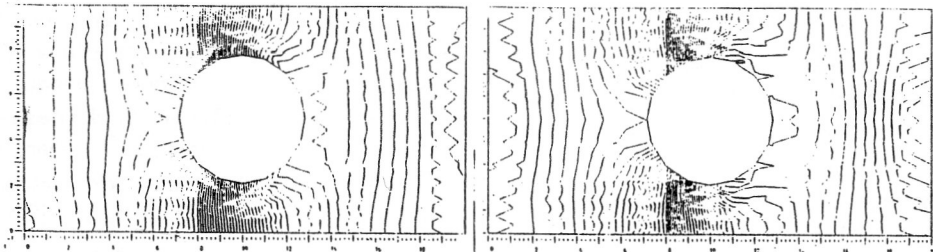


Bild 3
Testproblem für das Navier-Stokes-Problem



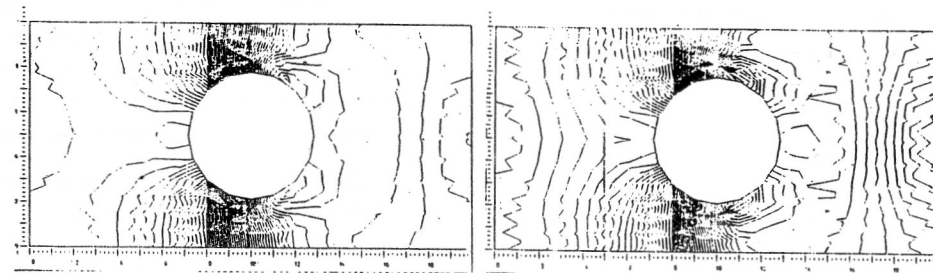
4 a) $N_t = 1$

5 a) $N_t = 1$



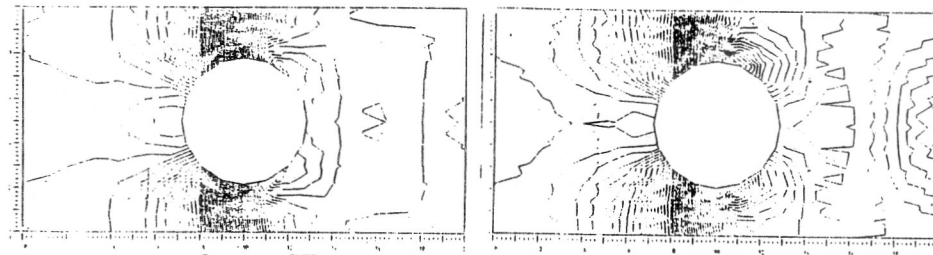
4 b) $N_t = 3$

5 b) $N_t = 3$



4 c) $N_t = 5$

5 c) $N_t = 5$



4 d) $N_t = 7$

5 d) $N_t = 7$

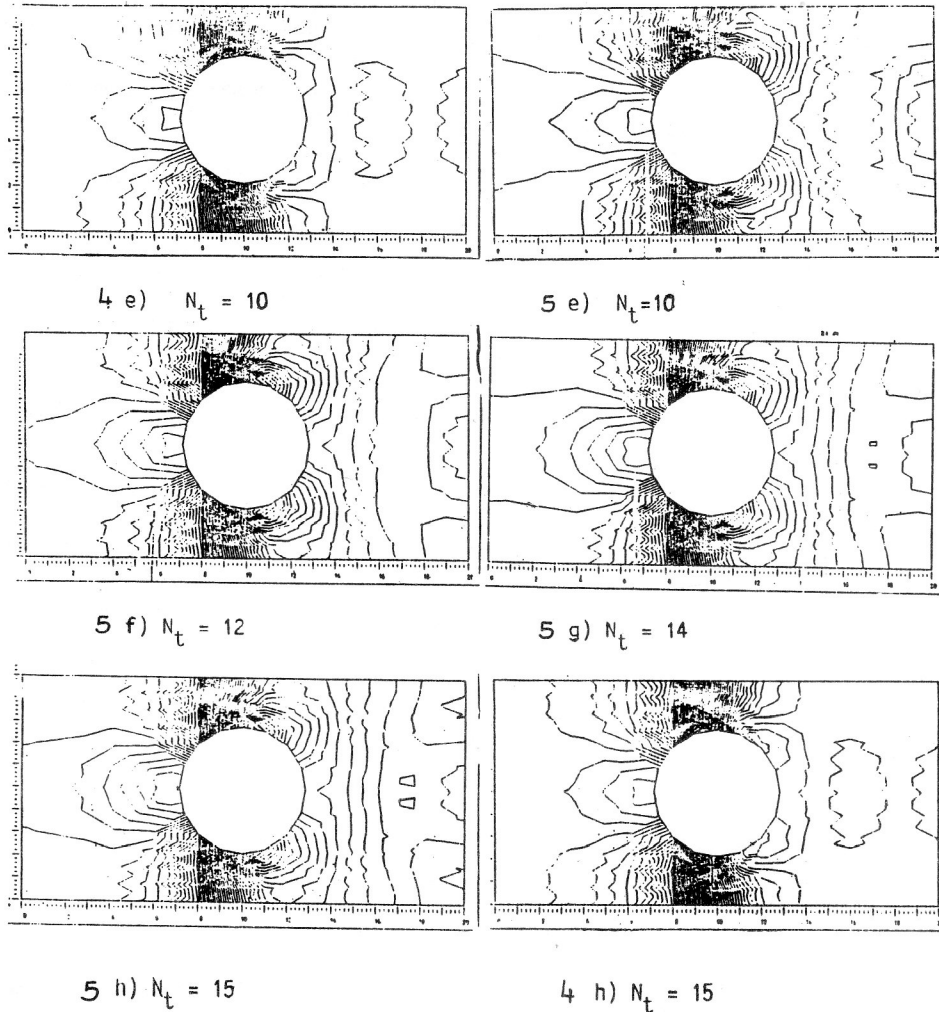


Bild 4 und Bild 5

Isobarenfeld für Zylinderumströmung

Lösung nach Zeitschritt N_t für $\nu = 10^{-2}$ bzw. $\nu = 10^{-3}$

nungen mit $u^0 = 0$ durchgeführt. Bei $\nu = 10^{-2}$ ändert sich nach 10 Zeitschritten ($\Delta t = 1$) die Lösung im Geschwindigkeitsfeld und Druckfeld nicht mehr, sie stimmt mit der nach dem stationären Berechnungsprogramm NAVSTO ermittelten stationären Lösung des Problems überein. Die Lösung ist symmetrisch, die Ablösegebiete hinter dem Zylinder sind deutlich ausgeprägt (vgl. Bild 4).

Bei $\nu = 10^{-3}$ bildet sich ebenfalls eine symmetrische Lösung mit Ablösegebieten hinter dem Zylinder aus. Interessant ist im Druckbild die Ausbildung geschlossener Isobaren hinter dem Zylinder nach 6–8 Zeitschritten, die dann wieder verschwinden und sich nach 13–15 Zeitschritten in ähnlicher Weise, jedoch weiter stromabwärts bilden. Offenbar kann sich bei $\nu = 10^{-3}$ schon keine stationäre Lösung mehr ausbilden (vgl. Bild 5). Im Geschwindigkeitsfeld sind keine derartigen Effekte sichtbar, da die Auflösung der Strömungsstrukturen im berechneten Fall zu grob war.

Für $\nu = 10^{-3}$ wurde auch für eine feinere Vernetzung mit 2048 Dreiecken (9218 Freiheitsgrade) eine derartige Anlaufrechnung gestartet, die jedoch nach wenigen Zeitschritten aus Zeitgründen abgebrochen wurde. Die Ablösegebiete hinter dem Zylinder sind jedoch im Unterschied zur Grobrechnung schon besser dargestellt.

Mit Testrechnungen für $\nu = 10^{-1}$, $\nu = 10^{-2}$ auf dem großen Netz wurde – ausgehend von einer ausiterierten stationären Lösung als Startlösung $u = u^0(x)$ – untersucht, ob sich eventuell Asymmetrien im Strömungsbild ausbilden. Dies war nicht der Fall. Vermutlich liegt das daran, daß das Verhältnis R/H bzw. R/L zu groß und damit die Wechselwirkung der Lösung mit der Kanalwand bzw. den wesentlichen Randbedingungen am Kanalaustritt zu stark ist.

Zielrichtung weiterer Arbeiten sollte u. a. sein

- den Berechnungsaufwand je implizitem Zeitschritt spürbar zu senken (z. B. durch Linearisierung durch sukzessive Approximation in einem äußeren Zyklus und effektive Lösung der linearen Gleichungssysteme mittels Multigridtechnik in einem inneren Zyklus [5])
- durch Übergang zum Crank-Nicolson-Verfahren bzw. durch Kombination mit Defektkorrektur-Verfahren eine höhere Genauigkeit zu erzielen
- Komplexitäts- und Effektivitätsvergleiche zu anderen Element-Paaren, die der Babuška-Brezzi-Bedingung genügen oder durch Galerkin/least-squares-Technik stabilisiert werden, durchzuführen.

Literatur

- [1] Albrecht, P.: Die numerische Behandlung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Berlin, 1979.
- [2] Bristeau, M. O., Glowinski, R., Periaux, J., Pironneau, O., Perrier, P.: On the numerical solution of nonlinear problems of fluid mech. by least squares. *Comp. Meth. in Appl. Mech.* 17/18 March 1979.
- [3] Bristeau, M. O., Glowinski, R., Periaux, J.: Numerical methods for the Navier-Stokes equations. *Comp. Phys. report* 6, 73 – 187, 1987.
- [4] Goering, H. u. a.: Forschungsbericht, TU Magdeburg, Sektion Mathematik 1989.
- [5] Grambow, W., Risch, U., Schieweck, F.: Experiences with the multigrid method applied to high Reynolds number, steady, incompressible flow, TU Magdeburg, Sektion Mathematik, Preprint 6 – 90, 1990.
- [6] Hansbo, P., Szepessy, A.: A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations, Chalmers Univ. Göteborg 1989, Preprint.
- [7] Heywood, J. G., Rannacher, R.: Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem, I. Regularity of solutions and second order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Num. Anal.* 19(1982), 275 – 311.
- [8] Heywood, J. G., Rannacher, R.: Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem, II. Stability of solutions and error estimates uniform in time. *SIAM J. Numer. Anal.* 23(1986), 750 – 777.
- [9] Heywood, J. G., Rannacher, R.: Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem, III. Smoothing property and higher order error estimates for spatial discretization. *SIAM J. Numer. Anal.* 25(1988), 489 – 512.
- [10] Heywood, J. G., Rannacher, R.: Finite Element Approximation of the nonstationary Navier-Stokes Problem, IV. Error analysis for second order time discretization. *SIAM J. Numer. Anal.* (erscheint).
- [11] Hughes, T. J. R., Franca, L. P., Hulbert, G. M.: A new finite element formulation for computational fluid dynamics – VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 73(1989), 173 – 189.
- [12] Johnson, C.: Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987.
- [13] Johnson, C., Saranen, J.: Streamline diffusion methods for the incompressible Euler- and Navier-Stokes equations, *Math. Comput.* 47(1986)175, 1 – 18.
- [14] Lube, G., Weiß, D.: Finite element methods of Galerkin/least-squares type for singularly perturbed parabolic equations, TU Magdeburg, Preprint 1991.
- [15] Nävert, U.: A finite element method for convection diffusion problems, Ph.D. Thesis, Chalmers Univ. Göteborg 1982.
- [16] NG-Stynes, M. J., E. O’Riordan, M. Stynes: Numerical methods for time-dependent convection-diffusion equations, *Journal Comp. Appl. Math* 21(1988), 289 – 310.
- [17] Ohlhoff, A.: Implementierung eines upwind-Verfahrens für die instationäre Navier-Stokes-Gleichung, TU Magdeburg, Sektion Mathematik, Praktikumsarbeit 1990.
- [18] Pironneau, O.: Finite Element Methods for Fluids. Masson, 1989.
- [19] Rannacher, R.: On the numerical analysis of the nonstationary Navier-Stokes equations. In: *The Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Methods.* (ed. by J. G. Heywood, K. Masuda, R. Rautmann, V. A. Solonnikov) Proceedings, Oberwolfach 1988, Lect. Notes in Math. 1431, Springer-Verlag 1990.
- [20] Rautmann, R.: On optimum regularity of Navier-Stokes solutions at time $t = 0$, *Math. Z.* 184(1983), 141 – 149.
- [21] Schieweck, F., Tobiska, L.: A nonconforming finite element method of upstream type applied to the stationary Navier-Stokes equations, *M²AN* 23(1989)4, 627 – 647.
- [22] Shakib, F.: Finite element analysis of the compressible Euler- and Navier-Stokes equations, Ph.D. Thesis, Stanford Univ., Stanford 1989.
- [23] Thiele, A., Tobiska, L.: A weighted upwind finite element method for solving the stationary Navier-Stokes equations, *Wiss. Z. TU Magdeburg* 33(1989)6, 13 – 20.
- [24] Tobiska, L., Lube, G.: A modified streamline diffusion method for solving the stationary Navier-Stokes equation, *Numer. Math.* 59(1991), 13 – 29.
- [25] Tobiska, L., Verfürth, R.: Analysis of a streamline diffusion finite element method for Stokes and Navier-Stokes equation (in Vorbereitung).
- [26] Walter, A. R.: Ein Finite-Element-Verfahren zur numerischen Berechnung von Erhaltungsgleichungen, Technischer Report TR 89-3, K. Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin 1989.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Lutz Tobiska
Dr. rer. nat. habil. Gert Lube
Dr. rer. nat. Walfred Grambow
TU „Otto von Guericke“
Institut für Analysis
PSF 4120
O-3010 Magdeburg