

# Zum Konvergenzverhalten der Finite-Element-Lösungen eines Rißproblems bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung

R. Mücke

*Adaptive Lösungsstrategien führen im Gegensatz zu gleichmäßigen Verfeinerungsalgorithmen zu einem deutlich verbesserten Freiheitsgrad-Gesamtehlervhältnis. Im vorliegenden Beitrag werden die Konvergenzordnungen der Finite-Element-Lösungen bei gleichmäßiger und bei adaptiver Netzverfeinerung der h-Version untersucht. Am Beispiel einer Scheibe mit Außenriß werden die a-priori ermittelten Konvergenzordnungen numerisch überprüft.*

*An adaptive approach leads in contrast to the uniform refinement algorithm to an essentially improved convergence rate. In this paper the convergence rates of uniform and adaptive Finite-Element-Modes of the h-version are a-priori determined. The results are numerically tested in a plane crack problem.*

## 1. Einleitung

Die Methode der finiten Elemente (FEM) hat sich in den Ingenieurwissenschaften zu einem Standardverfahren zur Berechnung des Verformungs- und Spannungszustandes in realen Bauteilen entwickelt. In ihrer praktischen Anwendung werden immer kompliziertere Geometrie- und Materialeigenschaften berücksichtigt, wodurch aber auch der Berechnungsaufwand stark ansteigt. Neben den numerischen Ergebnissen selbst ist der Ingenieur auch an einer Einschätzung der Genauigkeit seiner FE-Berechnung interessiert. Um einerseits den Berechnungsaufwand gering zu halten, andererseits aber ein festgelegtes Fehlerniveau der FE-Lösung nicht zu überschreiten, muß man gezielt neue Freiheitsgrade in das Ausgangsnetz einbringen. In den letzten Jahren wurden adaptive Lösungsverfahren entwickelt, die auf eine Gleichverteilung der lokalen Fehler einer FE-Lösung führen. Die durch adaptive Lösungsverfahren (h-Version), Erhöhung des Ansatzgrades in einzelnen Elementen (p-Version) oder durch eine Kombination beider Methoden entstehen. Außerdem ist eine Verschiebung der Elementknoten denkbar, so daß mit einer festgelegten Zahl an Freiheitsgraden eine gleichmäßige lokale Fehlerverteilung erreichbar ist (r-Version). Die Methoden der h-Version der FEM werden beispielsweise in [1] diskutiert. In [2] findet man einen zusammenfassenden Überblick über den Entwicklungsstand der p- und der hp-Version. Die r-Version spielt in mathematischen Untersuchungen eine Rolle [3], hat sich aber in praxisnahen Aufgabenstellungen bisher nicht durchsetzen können.

Im vorliegenden Beitrag werden die aus der Literatur bekannten Aussagen zur Konvergenzordnung bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung auf ein Rißproblem angewendet. Dabei wird ausschließlich die h-Version der FEM betrachtet. In Abschnitt 2 werden grundlegende Aussagen zur Glattheit einer Funktion getroffen. Abschnitt 3 beschäftigt sich mit der Konvergenzordnung der FE-Lösung bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung. Im Abschnitt 4 wird die Konvergenzordnung der FE-Lösungen eines Rißproblems a-priori ermittelt und numerisch bestätigt.

## 2. Glattheit von Lösungen der linearen Elastizitätstheorie

Unter den Voraussetzungen der linearen Elastizitätstheorie wird das Verformungs- und Spannungsverhalten eines Kontinuums durch

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \underline{\underline{E}} \cdot (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla) + \underline{\underline{p}} = \underline{0} \quad \text{in } \Omega \quad (1a)$$

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } \Gamma_1 \quad (1b)$$

$$\underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} = \underline{\bar{q}} \quad \text{auf } \Gamma_2 \quad (1c)$$

beschrieben.  $\underline{u}$  ist dabei der gesuchte Verschiebungsvektor,  $\underline{\underline{\tau}}$  der Spannungstensor,  $\nabla$  der Nabla-Operator,  $\underline{\underline{E}}$  der Hookesche Tensor und  $\underline{\underline{p}}$  und  $\underline{\bar{q}}$  der gegebene Volumenkräftevektor bzw. der gegebene Randspannungsvektor.  $\underline{n}$  bezeichnet den Einheitsvektor, der normal auf dem Rand  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  des Lösungsgebietes  $\Omega$  nach außen zeigt. Die Randbedingungen auf  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  sind komponentenweise aufzufassen. Die Gln. (1) sind für ein-, zwei- und dreidimensionale Aufgaben der linearen Elastizitätstheorie gültig.

Neben dem Gleichungssystem (1) kann das lineare Elastizitätsproblem auch als Variationsaufgabe der Form

$$\delta \Pi(\underline{u}) = \delta_{\Omega} \int \bar{W}(\underline{u}, \underline{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{\underline{p}} \delta \underline{u} d\Omega - \int_{\Gamma_2} \underline{\bar{q}} \delta \underline{u} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

dargestellt werden, wobei  $\Pi(\underline{u})$  das elastische Gesamtpotential und  $W(\underline{u}, \underline{u})$  mit

$$\bar{W}(\underline{u}, \underline{u}) = \frac{1}{8} (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla) \cdot \underline{\underline{E}} \cdot (\nabla \underline{u} + \underline{u} \nabla) \quad (3)$$

die innere Energie des Systems bezeichnen. Der Definitionsbereich des Funktionals umfaßt alle Verschiebungsvektoren, deren Komponenten die kinematischen Randbedingungen (1b) erfüllen und die Existenz der in (2) auftretenden Integrale sichern.

Als Ausgangspunkt für eine FE-Diskretisierung wird häufig das Variationsproblem (2) verwendet. Die exakte Lösung  $\underline{u}$  wird dabei elementweise durch einfache Funktionen, die sogenannten Formfunktionen [5] ersetzt. Die Güte der

Approximation hängt von den Eigenschaften der Formfunktionen und den Eigenschaften der exakten Lösung des Randwertproblems ab. Dabei spielt die Glattheit der exakten Lösung eine entscheidende Rolle. Es wird sich beispielsweise eine stetige Funktion besser durch Formfunktionen approximieren lassen als eine Funktion mit starken Singularitäten.

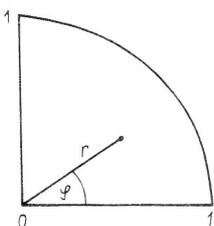
Die Glattheit einer Funktion läßt sich durch die Ordnung der Sobolev-Räume ausdrücken, zu denen die Funktion gehört. Eine Funktion  $u(x_1, x_2, x_3)$  ist Element eines Sobolev-Raumes der Ordnung  $k$ , wenn [6]

$$\|u\|_{H^k}^2 = \sum_{0 \leq l_1 + l_2 + l_3 \leq k} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^{l_1 + l_2 + l_3}}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \partial x_3^{l_3}} u \right)^2 dx_1 dx_2 dx_3 < \infty \quad (4)$$

$k$  ist dabei die Ordnung der über  $\Omega$  quadratintegrierbaren Ableitungen der Funktion  $u$ . Die Definition (4) ist für Sobolev-Räume positiv ganzzahliger Ordnung gültig. Eine Verallgemeinerung auf beliebige reelle Zahlen  $k$  ist möglich [6]. Die Sobolevschen Einbettungssätze beinhalten u. a., daß eine Funktion, die Element eines Sobolev-Raumes  $H^k(\Omega)$  ist, auch zu jedem Sobolev-Raum niedrigerer Ordnung gehört.

Um die höchste Ordnung des Sobolev-Raumes einer Funktion zu bestimmen, wird zunächst ein einfaches Beispiel betrachtet. Es soll untersucht werden, für welche Exponenten  $\beta$  die Funktion  $u(r, \varphi) = r^\beta$  im Gebiet  $[0, 1] \times [0, \pi/2]$  zum Sobolev-Raum  $H^0(\Omega)$  gehört (Bild 1). Eine Auswertung ergibt

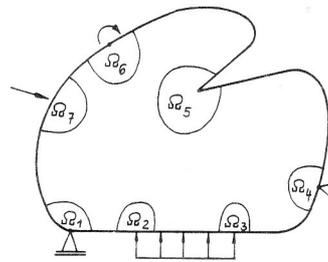
$$\|u\|_{H^0}^2 = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 r^{2\beta} r dr d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{4(\beta+1)} & \text{für } \beta > -1 \\ -\infty & \text{für } \beta \leq -1 \end{cases} \quad (5)$$



**Bild 1**  
Lösungsgebiet  $[0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

Offensichtlich liegen die Funktionen  $u(r, \varphi) = r^{-1+\epsilon}$  ( $\epsilon$  reell,  $\epsilon > 0$ ) in  $H^0(\Omega)$ , nicht aber die Funktionen  $u(r, \varphi) = r^{-1-\epsilon}$ . Mit Hilfe dieses Ergebnisses läßt sich zeigen, daß eine Funktion  $u(r, \varphi) = r^\beta$  Element aller Sobolev-Räume  $H^{\beta+1-\epsilon}$  ( $\epsilon$  reell,  $\epsilon > 0$ ) ist [4].

Die exakte Lösung des Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie gelingt nur selten. Es sind zwar Partikulärlösungen für wichtige Spannungskonzentrationsprobleme bekannt, Schwierigkeiten bereitet aber die Anpassung



**Bild 2**  
Spannungskonzentrationen

sung dieser Lösungen an die Randbedingungen des Lösungsgebietes. Um die Glattheit der Komponenten des Lösungsvektors einzuschätzen, reicht die Kenntnis einzelner Partikulärlösungen aus. So ist beispielsweise in Aufgaben der linearen ebenen Elastizitätstheorie bekannt, daß Spannungskonzentrationen in der Umgebung von Einzelkräften und Einzelmomenten auftreten, sowie an Lagerbedingungen, einspringenden Ecken und Streckenlasten (Bild 2). In hinreichender Entfernung eines kritischen Punktes ist nach dem Prinzip von St. Venant nur noch die Summenwirkung der Spannungskonzentrationen vorhanden. Innerhalb der kritischen Gebiete  $\Omega_1$  bis  $\Omega_7$  läßt sich der Verschiebungszustand  $\underline{u} = (u_1, u_2)$  durch

$$u_i(r, \varphi) = r^\beta (\ln r)^\delta f(\varphi) + w(r, \varphi) \quad (6)$$

$$\beta > 0, \quad \delta \leq 0; \quad \beta, \delta \text{ reell, } i = 1, 2$$

ausdrücken [4]. Dabei sind  $r$  und  $\varphi$  Polarkoordinaten, deren Ursprung im kritischen Punkt liegt.  $\underline{u}$  ist Element der Sobolev-Räume  $H^{\beta+1-\epsilon}$  ( $\epsilon$  reell,  $\epsilon > 0$ ). Mit  $f(\varphi)$  und  $w(r, \varphi)$  werden Funktionen bezeichnet, die gegenüber  $r^\beta (\ln r)^\delta$  glatter sind, d. h. zu einem Sobolev-Raum höherer Ordnung gehören.

Die Glattheit der Gesamtlösung wird durch die Glattheit der Partikulärlösungen in den kritischen Gebieten bestimmt. Da sich aufgrund der Linearität des Randwertproblems die einzelnen Partikulärlösungen nicht gegenseitig beeinflussen, ist die Glattheit der Gesamtlösung mit der Glattheit der Partikulärlösung im kritischen Gebiet mit der stärksten Singularität identisch.

### 3. Konvergenzordnung einer FE-Lösung bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung

Damit bei fortgesetzter Netzverfeinerung die FE-Approximation  $\tilde{u}$  gegen die exakte Lösung  $u$  konvergiert, sind bestimmte Voraussetzungen an die Formfunktion notwendig. Hinreichende Bedingungen für eine Konvergenz der FE-Lösung sind, daß die Formfunktionen einen konstanten Verzerrungszustand exakt wiedergeben, Starrkörperverschiebungen keine Verzerrungen in den Elementen hervorrufen und bei Belastung kein Klaffen oder Überlappen der Elemente an ihren Rändern auftritt [5]. Die genannten Konvergenzkriterien sind erfüllt, wenn in linearen Elastizitätsproblemen die Formfunktionen eines Elementes mindestens das vollständige Polynom 1. Grades enthalten, die

Summe über die Formfunktionen im gesamten Element Eins ergibt und die Formfunktionen an den Elementrändern stetig sind. Bei fortgesetzter Netzverfeinerung wird sich unter den genannten Voraussetzungen an die Formfunktionen die FE-Approximation der exakten Lösung nähern. Die Größe des noch vorhandenen Abstandes zwischen beiden Verschiebungsvektoren wird durch den Fehlervektor  $\underline{e} = \underline{u} - \tilde{\underline{u}}$  beschrieben und über eine Norm gemessen. In der ebenen Elastizitätstheorie hat der Fehlervektor die Komponenten  $e_1 = u_1 - \tilde{u}_1$  und  $e_2 = u_2 - \tilde{u}_2$ . Häufig verwendete Normen sind die Maximumnorm

$$\|\underline{e}\|_{\infty} = \max_{i=1,2} (\max_{\Omega} |e_i|), \quad (7)$$

die Energienorm

$$\|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2 = 2W(\underline{e}, \underline{e}) \quad (8)$$

und die Sobolev-Normen

$$\begin{aligned} \|\underline{e}\|_{H^k}^2 &= \|e_1\|_{H^k}^2 + \|e_2\|_{H^k}^2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \sum_{0 \leq l_1 < l_2 \leq k} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2}} e_i \right)^2 dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (9)$$

Die Maximumnorm liefert eine Aussage über die größtmögliche Differenz zwischen den Komponenten von  $\underline{u}$  und  $\tilde{\underline{u}}$  innerhalb eines Gebietes  $\Omega$ . Beobachtet man bei fortgesetzter Netzverfeinerung ein Kleinerwerden der Maximumnorm, spricht man von gleichmäßiger Konvergenz. Bei Verwendung der Energienorm erhält man eine Aussage über die Konvergenz in der Energie.

Die Anwendung unterschiedlicher Normen in der Fehleranalyse führt auch zu einer unterschiedlichen Einschätzung des Approximationsfehlers. Für den Ingenieur sind vor allem die Maximumnorm und die Energienorm von Bedeutung. Die Maximumnorm spielt eine Rolle, weil damit für jedes Gebiet eine untere und eine obere Grenze für die Verschiebungs- und Spannungsgrößen angegeben werden können. Die Energienorm läßt sich als innere Energie der Fehlerfunktion interpretieren. Für lineare Elastizitätsprobleme gilt die Orthogonalitätsbeziehung [4]

$$\frac{1}{2} \|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2 = |W(\underline{u}, \underline{u}) - W(\tilde{\underline{u}}, \tilde{\underline{u}})| = |\pi(\underline{u}) - \pi(\tilde{\underline{u}})| \quad (10)$$

Die FEM ist ein energetisches Verfahren. Die Knotenverschiebungen der Elemente werden so bestimmt, daß der globale Fehler in der Energienorm minimiert wird. Das schließt nicht aus, daß in einzelnen Bereichen des Lösungsgebietes noch erhebliche energetische Fehler zwischen der exakten Lösung und der FE-Lösung auftreten können. Bei fortgesetzter gleichmäßiger Netzverfeinerung konvergiert die Energie der FE-Lösung gegen die Energie der exakten Lösung. Die Energienorm ist damit für die FEM die natürliche Fehlernorm.

In mathematischen Arbeiten zur Fehleranalyse von FE-Lösungen werden häufig Aussagen in der Sobolev-Norm  $H^1(\Omega)$  erhalten. Die Energienorm und die Sobolev-Norm  $H^1(\Omega)$  sind äquivalente Normen, d.h., es existieren zwei positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$ , so daß [6]

$$C_1 \|\underline{e}\|_{H^1} \leq \|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}} \leq C_2 \|\underline{e}\|_{H^1} \quad (11)$$

Es lassen sich demnach Eigenschaften einer Norm, z.B. die Konvergenzordnung, in die andere Norm übertragen. Die Energienorm und die Maximumnorm sind keine äquivalenten Normen. Eine Fehleranalyse in der Maximumnorm ist deshalb problematisch, weil die Maximumnorm dem Charakter der FEM nicht entspricht.

Die Ungleichung (12) liefert eine a-priori Aussage über das Fehlerverhalten in der Energienorm bzw. einer ihr äquivalenten Norm. Liegt die exakte Lösung eines ebenen Elastizitätsproblems in  $H^k(\Omega)$ , läßt sich für eine Folge von regulären, gleichmäßig verfeinerten FE-Netzen die Ungleichung

$$\|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2 \leq CN^{-\min(k-1, p)} \|\underline{u}\|_{H^k}^2 \quad (12)$$

angeben [4].  $N$  ist die Anzahl der Freiheitsgrade des FE-Netzes.  $p$  bezeichnet die Ordnung des höchsten vollständigen Polynoms in den verwendeten Formfunktionen. Die Konstante  $C$  ist i.a. nicht bekannt. Sie ist von der Polynomordnung der Formfunktionen, vom Lösungsgebiet, von der Glattheit der exakten Lösung und der speziellen Netztopologie abhängig. Gleichung (12) läßt sich in die Form

$$e(n) = -\alpha n + c \quad (13)$$

mit

$$e = \ln \frac{\|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2}{\|\underline{u}\|_{\underline{\epsilon}}^2} \quad n = \ln N \quad c = \ln C \frac{\|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2}{\|\underline{u}\|_{\underline{\epsilon}}^2} \quad (14)$$

$$\alpha = \min(k-1, p)$$

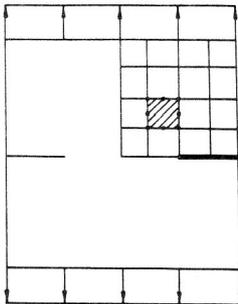
überführen, wobei der Anstieg  $\alpha$  in (13) als Konvergenzordnung der FEM bezüglich der Energienorm bezeichnet wird. Um mit möglichst wenig Freiheitsgraden eine geringe Fehlernorm zu erzielen, ist man an einer hohen Konvergenzordnung interessiert. Bei einem ungenügend glatten Lösungsvektor  $\underline{u}$ , d.h.  $k-1 < p$ , wird die Konvergenzordnung  $\alpha = \min(k-1, p)$  durch eine Erhöhung des vollständigen Polynomgrades der Formfunktionen nicht verbessert. Eine höhere Polynomordnung der Formfunktionen bewirkt über die Konstante  $C$  eine Verringerung des Gesamtfehlerlevels der Lösung. Beachtet man, daß in Aufgaben der linearen Elastizitätstheorie  $k$  i.a. zwischen 1 und 2 liegt [4], ist mit quadratischen Ansatzfunktionen bei gleichmäßiger Netzverfeinerung eine optimale Konvergenzordnung zu erreichen.

Im Gegensatz zur gleichmäßigen Netzverfeinerung werden in adaptiven Lösungsverfahren die neu hinzukommenden Freiheitsgrade in der Umgebung kritischer Punkte konzentriert. Dadurch hat die Glattheit der exakten Lösung auf das Konvergenzverhalten der FE-Lösungen keinen Einfluß, und die Konvergenzordnung wird ausschließlich vom Grad des höchsten vollständigen Polynoms der Formfunktion bestimmt. Für die Konvergenzordnung der Energienorm bei adaptiver Netzverfeinerung ergibt sich damit

$$\|\underline{e}\|_{\underline{\epsilon}}^2 \leq CN^{-p} \quad (15)$$

## 4. Ein Außenrißproblem

An einem Rißproblem Mode I sollen die Konvergenzordnungen der h-Version der FEM für die gleichmäßige und die adaptive Netzverfeinerung untersucht werden.



Quadrat: 2x2  
 Rißlänge: 0,5  
 Streckenlast: 1  
 Elastizitätsmodul: 1  
 Querkontraktionszahl: 0,3

**Bild 3**  
 Rißproblem Mode I (ebener Verzerrungszustand)

Das Rißproblem (Bild 3) wird als ebener Verzerrungszustand modelliert. Die analytische Lösung des Randwertproblems beinhaltet an der Rißspitze eine Singularität. Legt man in die Rißspitze ein Polarkoordinatensystem, läßt sich für eine hinreichend kleine Umgebung das Verschiebungsverhalten in der Form

$$u_1 = \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \left( \frac{4}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ 1 - 2\nu + \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + O(r^{\frac{3}{2}}) \quad (16)$$

$$u_2 = \frac{2K_I(1+\nu)}{E} \left( \frac{4}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left[ 2 - 2\nu + \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] + O(r^{\frac{3}{2}})$$

angeben. Die Energienorm für das gesamte Lösungsgebiet beträgt  $\|u\|_E^2 = 1.46844$  [4]. Für die Ordnung der Sobolev-Räume, zu denen die Komponenten des Lösungsvektors gehören, ergibt sich aus Gl. (6)  $k = \frac{3}{2} - \varepsilon$  ( $\varepsilon$  reell,  $\varepsilon > 0$ ). A-priori erhält man aus Gl. (12) die Konvergenzordnung in der Energienorm für die gleichmäßige Netzverfeinerung  $\alpha = \min\left(\frac{1}{2}, \rho\right)$  und aus Gl. (15) für die adaptive Netzverfeinerung  $\alpha = \rho$ . Da in den Konvergenzkriterien Formfunktionen mindestens 1. Ordnung gefordert sind, ist die Konvergenzordnung bei gleichmäßiger Netzverfeinerung unabhängig von  $\rho$  und beträgt  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Die numerischen Ergebnisse wurden mit Hilfe des Programmsystems COSAR ermittelt. Aufgrund der Symmetrie wird nur ein Viertel des Lösungsgebietes berechnet (Abb. 3). Für die Vernetzung werden Elemente der Serendipity-Klasse mit quadratischen Randverschiebungsansätzen verwendet. Jede Komponente des Verschiebungsvektors läßt sich als Linearkombination der Terme

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, x^2y, xy^2 \quad (17)$$

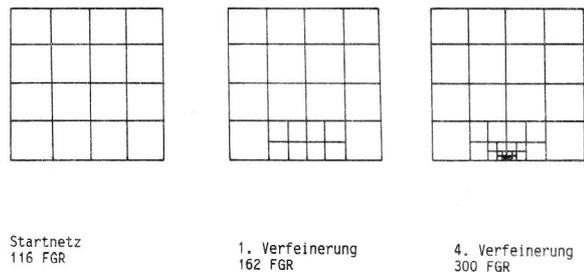
darstellen. In (17) ist das vollständige Polynom 2. Ordnung enthalten.

Lokale Netzverfeinerungen werden mit Übergangselementen realisiert. Die Ansatzfunktionen der Übergangselemente wurden mit der Methode der gemischten Interpolation hergeleitet [7]. Sie lassen sich ebenfalls als Linearkombinationen der Terme (17) darstellen und ermöglichen wahlweise an jedem Elementrand einen kompatiblen Übergang zu ein oder zwei Nachbarelementen. Durch den Anschluß zweier Nachbarelemente an einer Seite entstehen auch im Inneren der Übergangselemente Spannungssprünge, die in den Fehlerindikator einbezogen werden. Der Vorteil kompatibler Übergangselemente besteht darin, daß die bei einer sonst benötigten Zwangskopplung einzelner Freiheitsgrade entstehenden Spannungssoszillationen nicht auftreten.

Der adaptive Lösungsprozeß wird durch den Fehlerindikator [8]

$$\lambda_0^2 = \Omega_0 \int_{\Omega_0} r \cdot rd\Omega + \Gamma_0 \int_{\Gamma_n} J \cdot Jd\Gamma + 2\Gamma_0 \int_{\Gamma_i} J \cdot Jd\Gamma + 2\Gamma_0 \int_{\Gamma_2} J \cdot Jd\Gamma \quad (18)$$

gesteuert.  $r$  ist dabei das Residuum der Differentialgleichung und  $J$  der Randspannungssprung an FE-Oberflä-



**Bild 4**  
 Diskretisierung bei adaptiver Netzverfeinerung

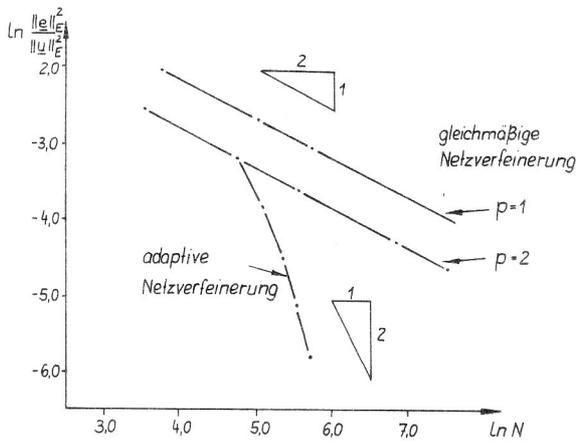
**Tabelle 1: Numerische Ergebnisse**

Netz	N	$\ e\ _E^2 / \ u\ _E^2$
4 x 4 Elemente	116	$4.34 \cdot 10^{-2}$
6 x 6 Elemente	246	$2.93 \cdot 10^{-2}$
8 x 8 Elemente	424	$2.20 \cdot 10^{-2}$
12 x 12 Elemente	924	$1.46 \cdot 10^{-2}$
16 x 16 Elemente	1616	$1.10 \cdot 10^{-2}$

gleichmäßige Netzverfeinerung

Netz	N	$\ e\ _E^2 / \ u\ _E^2$
Startnetz	116	$4.34 \cdot 10^{-2}$
Netz 2	162	$2.25 \cdot 10^{-2}$
Netz 3	208	$1.15 \cdot 10^{-2}$
Netz 4	254	$0.60 \cdot 10^{-2}$
Netz 5	300	$0.31 \cdot 10^{-2}$

adaptive Netzverfeinerung



**Bild 5**  
Konvergenzordnung bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung

chen. Das Integral über die Randspannungssprünge erstreckt sich über die Oberflächen benachbarter Elemente  $\Gamma_n$ , den Spannungssprung innerhalb der Übergangselemente  $\Gamma_i$  sowie den Spannungssprung an den Strukturoberflächen  $\Gamma$ .  $\Omega_e$  ist in Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie der Flächeninhalt des Finiten Elementes und  $\Gamma_e$  die Bogenlänge der Elementseite, über die zu integrieren ist.

Für die Steuerung des adaptiven Lösungsprozesses wurde das Element mit dem maximalen Fehlerindikator  $\lambda_{max}$  ermittelt. Verfeinert wurden alle diejenigen Elemente, deren Fehlerindikator größer  $\frac{1}{2} \lambda_{max}$  war. Die Netzfolge des adaptiven Verfahrens ist in Bild 4 dargestellt. In Tabelle 1 sind die numerischen Ergebnisse bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung gegenübergestellt. Vergleicht man das Verhältnis zwischen der Zahl der Freiheitsgrade und dem relativen Fehler  $\frac{\|e\|_E^2}{\|u\|_E^2}$ , wird die deutliche Überlegenheit adaptiver Verfahren sichtbar.

Stellt man die Ergebnisse der Tabelle 1 doppellogarithmisch dar, ergibt sich nach Gl. (13) eine Gerade (Bild 5). Die Konvergenzordnungen der FE-Lösungen lassen sich aus dem Anstieg ablesen. Sie stimmen mit der a-priori ermittelten Konvergenzordnung gut überein.

In [4] wird die Konvergenzordnung des Außenrißproblems bei einer Vernetzung mit linearen Dreieckelementen untersucht. Bild 5 zeigt, daß bei gleichmäßiger Netzverfeinerung im betrachteten Beispiel die Konvergenzordnung unabhängig von der Ordnung der Formfunktionen ist. Das Gesamtfehlerniveau wird in Gl. (12) durch die Konstante C bestimmt und ist für quadratische Formfunktionen geringer als bei linearen Ansätzen.

## 5. Zusammenfassung

Die Konvergenzordnung der FEM ist bei gleichmäßiger Netzverfeinerung von der Glattheit der exakten Lösung oder der Ordnung der Formfunktionen abhängig (Gl. 12). Die Glattheit einer Funktion wird mittels der Anzahl k ihrer über dem Lösungsgebiet quadratintegrierbaren Ableitungen bestimmt. Eine Verallgemeinerung auf beliebige reelle

k ist möglich. aus der Kenntnis einzelner Partikulärlösungen kann die Glattheit des Lösungsvektors a-priori ermittelt werden.

Adaptive Lösungsverfahren konzentrieren Freiheitsgrade in die Umgebung der Singularitäten. Dadurch wird der Einfluß der Singularitäten auf die Konvergenzordnung der FE-Lösungen ausgeschaltet. Die Konvergenzordnung adaptiver Verfahren der h-Version ist nur von der Ordnung der verwendeten Ansatzfunktionen abhängig.

Am Beispiel eines Außenrißproblems wurde die a-priori ermittelte Konvergenzordnung bei gleichmäßiger und adaptiver Netzverfeinerung numerisch überprüft. Ein Vergleich mit einer in [4] dargestellten Berechnung zeigt, daß die Konvergenzordnung bei gleichmäßiger Netzverfeinerung unabhängig von der Ordnung der Formfunktionen ist. Mit höhergradigen Formfunktionen läßt sich ein niedrigeres Gesamtfehlerniveau erreichen.

## LITERATUR

- [1] Rank, E.: A posteriori-Fehlerschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegral-element-Methoden. Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I, Techn. Universität München, 1985.
- [2] Babuska, I.; Suri, M.: The p- and hp-Version of the Finite Element Method; An Overview. Institute for Physical Science and Technology, BN-1101, May 1989.
- [3] Diaz, A. R.; Kikuchi, N.; Taylor, J. E.: A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods. Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng., 29 – 45, 1983.
- [4] Babuska, I.; Szabo, B.: On the Rates of Convergence of the Finite Element Method. Int. J. Num. Meth. Eng., 323 – 341, 1982.
- [5] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Fachbuchverlag Leipzig, 1987.
- [6] Oden, J. T.; Reddy, J. N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics. Springer-Verlag, 1976.
- [7] Scholz, E.; Altenbach, J.: Kompatible Übergangselemente für lokale Netzverfeinerungen bei 2D- und 3D-Finite-Element-Modellen. Techn. Mechanik 72 – 78, 1985/2.
- [8] Altenbach, J.; Mücke, R.: Testung von Fehlerindikatoren für Finite-Element-Lösungen der linearen Elastizitätstheorie. Techn. Mechanik, 49 – 54, 1990/1.

### Anschrift des Verfassers:

Dipl.-Ing. R. Mücke  
Technische Universität „Otto von Guericke“  
Institut für Festkörpermechanik  
Universitätsplatz 2  
O-3010 Magdeburg