

FEM-Analyse mechanischer Feinstellantriebe

W. Seifert

Der Artikel behandelt die Grundgleichungen linearer piezoelektrischer Kontinua sowie die entsprechende FEM-Formulierung des Problems. Als Anwendungsbeispiel gelingt die Berechnung axialsymmetrischer Dehnungs- und Spannungszustände in piezoelektrischen Vielschichtaktuatoren aus dünnen piezokeramischen Scheiben.

The paper presents the differential equation system and its appropriate FEM-formulation for linear piezoelectrical continua. Applying FEM, axisymmetrical states of strains and stresses are investigated in electromechanical actuators with multi-layer structure consisting of an ensemble of thin piezoceramic disks.

1. Einleitung

Das Interesse an mechanischen Feinstellantrieben (Aktuatoren) ist in den letzten Jahren in Wissenschaft und Technik ständig gestiegen. Das Hauptziel besteht darin, Stellwege von einigen nm bis über 1 mm mit großer Genauigkeit und bei möglichst geringen Anregungsspannungen reproduzierbar zu realisieren. Diesen und weiteren Forderungen, wie geringe geometrische Abmessungen bei großer konstruktiver Variabilität sowie leichte Anpassung an eine nachgeschaltete Elektronik, entsprechen weitgehend Vielschichtstrukturen piezoelektrischer Aktuatoren auf keramischer Basis. Für ihre weitere Optimierung sind sowohl neue konstruktive Lösungsvarianten als auch die Suche nach optimalen Werkstoffsystemen von Bedeutung [1].

Die vorliegende Arbeit versucht, aus der Sicht der Kontinuumsmechanik einen spezifischen Beitrag zu dieser Problematik zu leisten. Im Vordergrund steht dabei die Frage nach Betrag und Verteilung der im Ergebnis der (quasi-statischen) piezoelektrischen Erregung des Materials zu erwartenden mechanischen Feldgrößen. FEM-Analysen betreffen das mechanische Verhalten von PZT-Keramik-scheiben axialer Symmetrie als Bauelemente derartiger Aktuatoren.

2. Grundgleichungen des piezoelektrischen Kontinuums

Im Rahmen einer linearen Theorie piezoelektrischer Kontinua wird von den folgenden elastomechanischen sowie elektrischen Grundgleichungen ausgegangen (statischer Fall, keine Massenkräfte):

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} \cdot \nabla &= 0 \\ \vec{S} &= \frac{1}{2} (\nabla \circ \vec{u} + \vec{u} \circ \nabla) \\ \nabla \cdot \vec{D} &= 0 \\ \vec{E} &= -\nabla \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Dabei kennzeichnen: \vec{u} den Verschiebungsvektor, \vec{S} den Deformationstensor und $\vec{\sigma}$ den Spannungstensor, \vec{E} das elektrische Feld, φ das elektrische Potential sowie ∇ den Nabla-Operator. Die verwendeten konstitutiven Beziehun-

gen werden wesentlich durch die Kopplung der mechanischen und elektrischen Feldgrößen über den piezoelektrischen Effekt geprägt. Der direkte Effekt beschreibt das Auftreten eines zusätzlichen Beitrages zur elektrischen Polarisation \vec{P} infolge mechanischer Spannungen [2], [3]:

$$\vec{P} = \vec{d} : \vec{\sigma} + \epsilon_0 \vec{\chi} \cdot \vec{E}. \quad (2)$$

Dabei kennzeichnet \vec{d} den Tensor (3. Stufe) der Piezomoduln und $\vec{\chi}$ den Suszeptibilitätstensor. Für die dielektrische Verschiebung \vec{D} folgt mit (2):

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (\vec{I} + \vec{\chi}) \cdot \vec{E} + \vec{d} : \vec{\sigma} \\ &= \vec{\epsilon} \cdot \vec{E} + \vec{d} : \vec{\sigma}. \end{aligned} \quad (3)$$

\vec{I} ist der Einheitstensor, $\vec{\epsilon}$ der Dielektrizitätstensor und ϵ_0 die Dielektrizitätskonstante.

Beim reziproken piezoelektrischen Effekt ist die mechanische Dehnung der angelegten elektrischen Feldstärke \vec{E} proportional, so daß sich für den Deformationstensor \vec{S} bei vorausgesetztem elastischen Materialverhalten die folgende Bilanz ergibt:

$$\vec{S} = \vec{s} : \vec{\sigma} + \vec{E} \cdot \vec{d}. \quad (4)$$

Dabei bezeichnet \vec{s} den Tensor (4. Stufe) der Elastizitätsmoduln.

Aus (4) folgt mit dem Tensor der Elastizitätskoeffizienten $\vec{c} = \vec{s}^{-1}$ unter Ausnutzung der Symmetrie von \vec{c} (für seine Komponenten gilt $c_{ijkl} = c_{jikl} = c_{ijlk} = c_{klij}$) für den Spannungstensor:

$$\vec{\sigma} = \vec{c} : \vec{S} - \vec{E} \cdot \vec{e} \quad (5)$$

mit dem Tensor (3. Stufe) der piezoelektrischen Spannungskoeffizienten

$$\vec{e} = \vec{d} : \vec{c}. \quad (5a)$$

Aus den Grundgleichungen (1) sowie den konstitutiven Gleichungen (3) und (5) erhält man wiederum unter Berücksichtigung der Symmetrie der Materialtensoren (es gilt $d_{ijk} = d_{ikj}$, $e_{ijk} = e_{ikj}$ sowie $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$) die folgenden Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} (\vec{c} : \vec{u} \circ \nabla) \cdot \nabla - (\nabla \varphi \cdot \vec{e}) \cdot \nabla &= 0 \\ \nabla \cdot (\vec{e} : \vec{u} \circ \nabla) - \nabla \cdot (\vec{\epsilon} \cdot \nabla \varphi) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Sie repräsentieren 4 gekoppelte partielle Differentialgleichungen zur Bestimmung des Verschiebungsvektors $\vec{u}(\vec{r})$ und des elektrischen Potentials $\varphi(\vec{r})$. Eine sachgemäße Formulierung des Feldproblems erfordert weiterhin die Berücksichtigung von Randbedingungen für die Verschiebungen sowie die äußeren Flächenlasten bzw. für das elektrische Potential sowie die Flächenladungen auf definierten Teilen der Oberfläche bzw. auf Zwischenflächen (Elektroden) [4].

Auf Grund der komplexen Struktur der Feldgleichungen (6) ist ihre Behandlung i. a. nur mit leistungsfähigen Näherungsverfahren möglich. Geschlossen-analytische Lösungen existieren nur für einfache Modellfälle. Dazu zählen die von Voigt [3] angegebenen homogenen Dehnungen im homogenen elektrischen Feld.

Vorausgesetzt sei für diesen Fall eine quaderförmige Probe mit vollständig kontaktierter Boden- und Deckfläche $z=0$ bzw. $z=h$ auf Potentialen $\varphi = \varphi_0 = 0$ bzw. $\varphi = -\varphi_h$. Wegen

$$\vec{E}_0 = E_{0z} \cdot \vec{e}_z; \quad \varphi(z) = -\frac{z}{h} \cdot \varphi_h = -E_{0z} \cdot z \quad (7)$$

entkoppeln die Feldgleichungen und das Verschiebungsfeld $\vec{u}(\vec{r})$ folgt allein aus der ersten Gleichung von (6) mit verschwindendem zweiten Term.

Die durch \vec{E}_0 in jedem Volumenelement induzierten konstanten piezoelektrischen Zusatzdehnungen \tilde{S}^p ergeben sich aus (5) durch Ausklammern von \tilde{c} :

$$\tilde{\sigma} = \tilde{c} : \{ \tilde{S} - \tilde{s} : (\vec{E}_0 \cdot \vec{e}) \} = \tilde{c} : \{ \tilde{S} - \tilde{S}^p \} \quad (8)$$

Die Forderung nach Kräftefreiheit an der Oberfläche ($\tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = 0$) liefert schließlich unter Berücksichtigung der Symmetrie der Materialtensoren homogene Verzerrungen in der Form:

$$\tilde{S}^{\text{hom}} = \tilde{s} : (\vec{E}_0 \cdot \vec{e}) = \vec{E}_0 \cdot \vec{e} : \tilde{s} = \vec{E}_0 \cdot \vec{d} \quad (9)$$

Diese geometriunabhängigen Dehnungen, die im Rahmen der verwendeten linearen Theorie nicht mit mechanischen Spannungen verbunden sind, werden als Referenzzustand für die nachfolgenden FEM-Analysen dienen.

3. FEM-Formulierung

Die Ableitung der FEM-Basisgleichungen zur Behandlung piezoelektrischer Kontinua ist ausführlich in [7], [5], [6] diskutiert. Ausgangspunkt ist eine dem elektro-mechanischen Anfangs-Randwertproblem äquivalente Variationsformulierung, die auf einem Netz finiter Elemente numerisch umgesetzt wird. In jedem Element erfolgt dabei ein Approximationsansatz derart, daß der Verschiebungsvektor sowie das elektrische Potential innerhalb des Elementes als eindeutige Funktionen der Verschiebungen bzw. des Potentials der zum Element gehörigen Knotenpunkte angesetzt werden. Dieses Vorgehen führt schließlich auf das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\varphi} \\ K_{\varphi u} & K_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ Q \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Dabei kennzeichnen $[K_{uu}], [K_{\varphi\varphi}], [K_{u\varphi}] = [K_{\varphi u}]^T$ die sogenannten globalen mechanischen, dielektrischen und piezoelektrischen Steifigkeitsmatrizen der FEM-Diskretisierung. Als zu bestimmende Freiheitsgrade treten die Knotenpunktverschiebungen $\{U\}$ sowie die Knotenpotentiale $\{\phi\}$ aller Knotenpunkte des FEM-Netzes auf; die rechte Seite des Gleichungssystems wird durch Knotenkräfte $\{F\}$ infolge vorgegebener mechanischer Flächenlasten \vec{p} bzw. durch Knotenladungen $\{Q\}$ als Folge von Flächenladungen q determiniert [7].

Die Auflösung des Gleichungssystems erfolgt wegen der Problemgröße i. a. durch den folgenden Iterationsprozeß:

$$\begin{aligned} [K_{\varphi\varphi}] \{\phi\} = \{Q\} \rightarrow \{\phi\} \rightarrow [K_{uu}] \{U\} = \{F\} - [K_{u\varphi}] \{\phi\} \downarrow \\ \uparrow [K_{\varphi u}] \{\phi\} = \{Q\} - [K_{\varphi u}] \{U\} \leftarrow \end{aligned} \quad (11)$$

Bei der Berechnung der Knotenpotentiale ist zu beachten, daß die vorgegebene Elektrodenkonfiguration Potentialgleichheit auf solchen Knotenpunkten erfordert, die zu den jeweiligen Elektroden gehören. Diese Forderung wird durch eine „Kondensation“ der entsprechenden Freiheitsgrade im zu lösenden Gleichungssystem erreicht.

Der Vorteil des Iterationszyklus (11) besteht vor allem in seiner speicherplatzsparenden Konzeption sowie darin, daß in ihm auf FEM-Standardprogramme zurückgegriffen werden kann: eingebettet sind ein hinsichtlich der Knotenkräfte modifiziertes linear-elastisches FEM-Programm sowie ein FEM-Solver zur Lösung der verallgemeinerten Poisson-Gleichung

$$\tilde{\varepsilon} : \nabla \circ \nabla \varphi = q. \quad (12)$$

Auf den Modellcharakter derartiger Rechnungen sei nachdrücklich hingewiesen. Aus makroskopischer Sicht zeigen Keramiken zwar ein charakteristisches Sprödbbruchverhalten, so daß ihr globales Materialverhalten – ähnlich wie beim Werkstoff Glas – weitgehend durch Stoffgesetze der linearen Elastizitätstheorie charakterisiert werden kann. Andererseits zeigen Keramiken aber ein ausgesprochen statistisches Festigkeitsverhalten trotz genauer Einhaltung der technologischen Parameter beim Herstellungsprozeß. Dies ist zweifellos eine Folge der mikroskopischen bzw. mesoskopischen Struktur dieser Materialien, die i. a. amorphen Charakter trägt und aus kontinuumstheoretischer Sicht eher als nichtzusammenhängend bezeichnet werden muß.

4. FEM-Untersuchungen piezokeramischer Aktuatorelemente

Betrachtet werden Vielschichtaktuatoren, die technologisch als Stapel von 30 bis 50 untereinander verklebten piezokeramischen Kreisscheiben hergestellt werden. Die Boden- und Deckflächen jeder Scheibe sind dabei partiell mit Elektroden kontaktiert. Verwendet werden technologisch relevante Abmessungen. Alle Rechnungen wurden für PZT-Keramik durchgeführt, die in z-Richtung gepolt ist und eine hexagonale Anisotropie aufweist. Da die Mate-

rialtensoren bei dieser Symmetrie invariant gegen beliebige Drehungen um die Symmetrieachse (z-Achse) sind, konnte ein axialsymmetrisches FEM-Programm verwendet werden. Die Gleichungen (3) und (5) haben dann in der üblichen computerorientierten Matrixschreibweise die folgende Struktur:

$$\begin{Bmatrix} D_r \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_r \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{15} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2c_{44} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} S_{rr} \\ S_{\varphi\varphi} \\ S_{zz} \\ S_{rz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 & e_{31} \\ 0 & e_{31} \\ 0 & e_{33} \\ e_{15} & 0 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} E_r \\ E_z \end{Bmatrix}$$

Für die Materialkoeffizienten ϵ_{ij} , c_{ij} sowie e_{ij} wurden folgende repräsentative Literaturwerte für PZT-Keramik verwendet [5]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}/\epsilon_0 &= 805, & \epsilon_{33}/\epsilon_0 &= 660, \\ c_{11} &= 132 \text{ GPa}, & c_{33} &= 115 \text{ GPa}, & c_{44} &= 26 \text{ GPa}, \\ c_{12} &= 71 \text{ GPa}, & c_{13} &= 73 \text{ GPa}, \\ e_{31} &= -4.1 \text{ Cm}^{-2}, & e_{33} &= 14.1 \text{ Cm}^{-2}, & e_{15} &= 10.5 \text{ Cm}^{-2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow d_{31} = -118 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}, \quad d_{33} = 273 \cdot 10^{-12} \text{ m/V}.$$

(14)

Mit diesen Materialparametern berechnet man z. B. bei einer angelegten Feldstärke von $E_{oz} = 2 \text{ kV/mm}$ homogene Dehnungen (9) der Größe:

$$S_{rr}^{\text{hom}} = S_{\varphi\varphi}^{\text{hom}} = -2.36 \cdot 10^{-4}, \quad S_{zz}^{\text{hom}} = 5.46 \cdot 10^{-4} \quad (15)$$

Zu beachten ist, daß positive Verzerrungen S_{zz}^{hom} nur dann auftreten, wenn die Richtung der elektrischen Feldstärke mit der Polarisationsrichtung der Keramik übereinstimmt.

4.1. Die einzelne piezokeramische Scheibe

Untersucht werden soll zunächst das mechanische Verhalten einer einzelnen, mechanisch unbelasteten Keramikscheibe. Das verwendete axialsymmetrische Modell geht von konzentrischen Elektroden (Radius R_E) aus, mit denen die Scheibe vom Radius R teilweise kontaktiert ist (vgl. Bild 1). Die Dicke d der Scheiben soll generell 0.5 mm betragen. Als Materialkenngrößen werden die in (14) angegebenen verwendet. Der Betrag der elektrischen Feldstärke sei 2 kV/mm; Feldstärkerichtung und Polarisationsrichtung der Keramik sollen übereinstimmen.

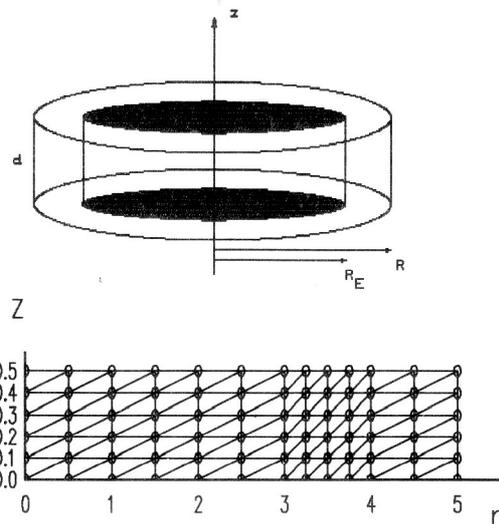


Bild 1: Geometrie der piezokeramischen Scheibe (Beispiel $R = 5 \text{ mm}$, $R_E = 3.5 \text{ mm}$, $d = .5 \text{ mm}$) und FEM-Vernetzung (120 axialsymmetrische 3-Knoten-Dreieckselemente, 78 Knotenpunkte mit je 3 Freiheitsgraden: Verschiebungskomponenten u_r , u_z sowie elektrisches Potential φ)

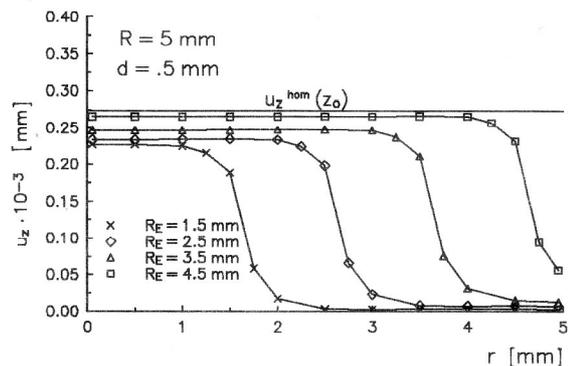


Bild 2: Verschiebungsprofile $u_z(r)$ an der Oberfläche $z_0 = .5$ für verschiedene Parameter R_E

Die einfache Vernetzung der Scheibe (Bild 1) umfaßt 120 axialsymmetrische 3-Knoten-Ringelemente mit linearen Verschiebungsansätzen in jedem Element. Durch den zusätzlichen Parameter $R_E \leq R$ wird das aus (9) resultierende homogene Verschiebungsfeld $u^{\text{hom}}(r, z)$ mit

$$u_r^{\text{hom}}(r) = S_{rr}^{\text{hom}} \cdot r, \quad u_z^{\text{hom}}(z) = S_{zz}^{\text{hom}} \cdot z \quad (16)$$

modifiziert; Bild 2 zeigt Oberflächenprofile $u_z(r, z_0 = .5)$ für $R = 5 \text{ mm}$. Deutlich wird, daß im Bereich $r \leq R_E$ als Folge des dort homogenen elektrischen Feldes ein zu (16) bzw. (9) vergleichbarer Zustand erhalten bleibt. Zum Einfluß des elektrischen Randfeldes auf das Dehnungsverhalten der Scheibe wurden weitere Rechnungen mit variierten Parametern R , R_E durchgeführt. Bild 3 zeigt für kleine Scheibenradien $R \rightarrow 0$ ein Übergangsgebiet hin zum homogenen Zustand (9), während sich für Radien $R > 5 \text{ mm}$ nahezu übereinstimmende Verschiebungs- und Dehnungsfelder für gleiche relative Elektrodenradien $r_E = R_E/R$ ergeben. Eine Auswertung für die Dehnung $S_{zz}^{(R_E)}$ im Bereich

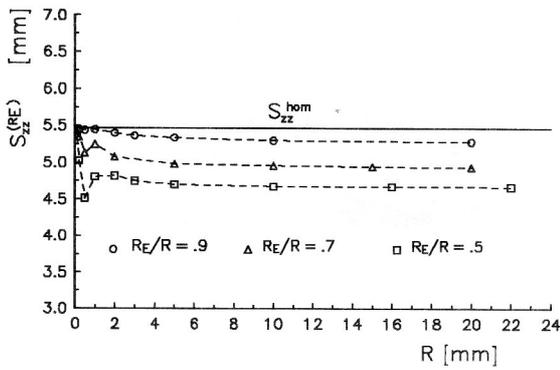


Bild 3: Dehnungen $S_{zz}^{(R_E)}$ im Bereich $r < R_E$ in Abhängigkeit vom Scheibenradius R

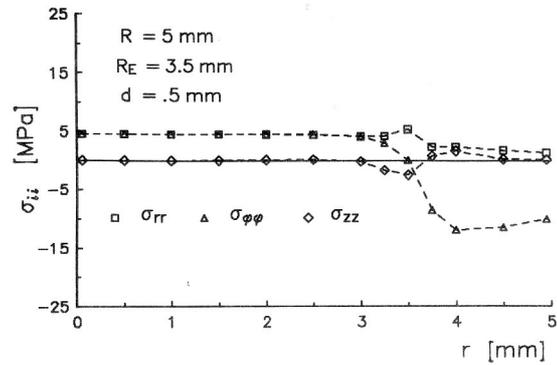


Bild 5: Spannungsverteilung in der einzelnen freien Scheibe entlang $z_0 = .2$ für $r_E = .7$

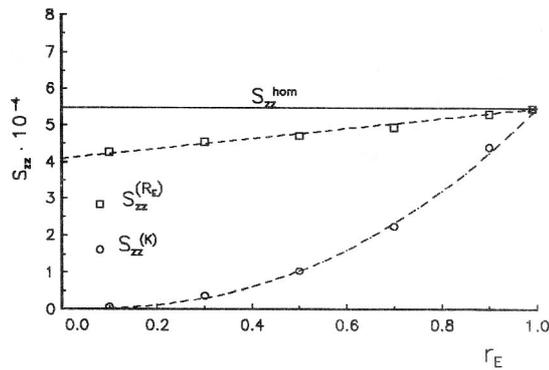


Bild 4: Dehnungen $S_{zz}^{(R_E)}$ bzw. $S_{zz}^{(K)}$ in Abhängigkeit vom relativen Elektrodenradius $r_E = R_E/R$

$r < R_E$ liefert für $R > 5$ mm die im Bild 4 dargestellte lineare Abhängigkeit von r_E . Sie kann durch folgende Geradengleichung beschrieben werden:

$$S_{zz}^{(R_E)} = S_{zz}^{hom} \cdot \left\{ 1 - c_o^{FEM} \cdot (1 - r_E) \right\}, \quad c_o^{FEM} = .252. \quad (17)$$

Der Koeffizient c_o^{FEM} ist nur abhängig von den Materialkoeffizienten (14). Da das elektrische Feld im Elektrodenbereich $r < R_E$ homogen ist, beschreibt (17) wegen (9) letztlich den effektiv im Elektrodenbereich $r < R_E$ wirksamen Piezomodul $d_{33}^{(R_E)}$:

$$d_{33}^{(R_E)} = d_{33} \cdot \left\{ 1 - c_o^{FEM} \cdot (1 - r_E) \right\}. \quad (18)$$

Das in der Scheibe induzierte mechanische Spannungsfeld ist über den gesamten Scheibenquerschnitt von einer quasizweidimensionalen Struktur geprägt: σ_{zz} und σ_{rr} sind vernachlässigbar klein und nur die ebenen Normalspannungskomponenten σ_{rr} und $\sigma_{\phi\phi}$ dominieren. Letztere erfüllen die Rand- bzw. Kopplungsbedingungen

$$\sigma_{rr}(r=R) = 0 \quad \text{sowie} \quad \sigma_{rr}(r=0) = \sigma_{\phi\phi}(r=0). \quad (19)$$

Bild 5 zeigt am Beispiel $r_E = .7$ ($R = 5$ mm, $R_E = 3.5$ mm) für den Schnitt $z_0 = .2$ die charakteristischen Merkmale der Spannungsverteilung in der Scheibe: einen zweidimensional-hydrostatischen Zugspannungszustand im Bereich $r < R_E$ sowie den Zug-Druck-Wechsel der Normalspan-

nung $\sigma_{\phi\phi}$ im Bereich $r = R_E$. Auf Grund der kompakten Struktur dieses Spannungszustandes (mit Werten für die normalen Spannungskomponenten σ_{rr} und $\sigma_{\phi\phi}$ unterhalb der für Keramiken üblichen Bruchspannungen) ist die bruchmechanische Gefährdung des Bauteils gering. Allerdings werden im hier zugrunde gelegten kontinuumstheoretischen Modell all jene Beiträge zum realen Spannungsfeld nicht erfaßt, die auf Grund der heterogenen Mikrostruktur der Keramik zusätzlich auftreten und zu lokalen Spannungsüberhöhungen führen können.

4.2. Die piezokeramische Scheibe als Aktuatorelement

Die Modellierung eines kompletten Aktuators mit allen Details würde eine dreidimensionale FEM-Rechnung erfordern, deren Aufwand erheblich wäre. Vernachlässigt man jedoch 3D-Effekte (z. B. die Kontaktierung der Scheiben u. a. m.) und sieht vom Einfluß der dünnen Klebeschichten zwischen den Scheiben ab, dann kann im Rahmen der hier verwendeten axialsymmetrischen Modellierung näherungsweise davon ausgegangen werden, daß sich die Scheiben als Aktuatorelemente im wesentlichen alle gleich verhalten. Durch die starre Verbindung zwischen ihnen wird im Stapel bei piezoelektrischer Erregung im gesamten Bereich $0 < r < R$ ein Verschiebungsprofil u_z „aufgeprägt“, das auf Linien $z = z_0$ näherungsweise konstant ist. Das Problem wird somit auf die Untersuchung einer einzelnen mechanisch „geklemmten“ Scheibe reduziert, wobei die Struktur des Verschiebungsfeldes teilweise vorgegeben wird. Im Rahmen der FEM geschieht dies durch eine sogenannte „Kondensation“ von Verschiebungsfreiheitsgraden. Das globale lineare Gleichungssystem wird dabei durch Zeilen- bzw. Spaltenaddition derart modifiziert, daß im Ergebnis der Rechnung gleiche Komponenten u_z an vorgegebenen Knotenpunkten auftreten. Ihr Beitrag hängt für hinreichend große Radien R (analog zu 4.1.) wiederum nur vom relativen Elektrodenradius r_E ab.

Die Auswertung diesbezüglicher FEM-Rechnungen liefert den im Bild 4 dargestellten nichtlinearen Verlauf der Dehnung $S_{zz}^{(K)}$ bei „kondensierter“ Verschiebungskomponente u_z an den Deckflächen der piezokeramischen Scheibe. Eine nichtlineare Regressionsanalyse der Kurve ergab mit

einem Korrelationskoeffizienten $> .99$ den folgenden analytischen Zusammenhang:

$$S_{zz}^{(K)} = S_{zz}^{\text{hom}} \cdot r_E \cdot \exp(c_1^{\text{FEM}}), \quad c_1^{\text{FEM}} = 2.40 \quad (20)$$

Die Scheibe verhält sich als Aktuatorelement mithin so, als würde nur ein „effektiver“ Piezomodul

$$d_{33}^{(K)} = d_{33} \cdot r_E \cdot \exp(c_1^{\text{FEM}}) \quad (21)$$

wirksam sein. Der Koeffizient c_1^{FEM} ist wie c_0^{FEM} in 4.1. nur materialabhängig.

Durch die mechanische „Klemmung“ der Scheibe als Aktuatorelement kommt es im Vergleich zur freien Scheibe (vgl. Abschnitt 4.1.) zu einer wesentlichen Umverteilung des Spannungsfeldes zugunsten der Normalspannung σ_{zz} . Bild 6 zeigt wiederum am Beispiel $r_E = .7$ für den Schnitt $z = .2$ die Charakteristika der Spannungsverteilung; wesentliche Merkmale sind jetzt ausgeprägte Druck-Zug-Bereiche im Profil der normalen Spannungskomponente σ_{zz} , während die Normalspannungen σ_{rr} und $\sigma_{\varphi\varphi}$ in abgeschwächter Form das in 4.1. skizzierte Verhalten zeigen. Für die Interpretation dieses Spannungsfeldes gelten die gleichen Aussagen wie im Abschnitt 4.1. (bezüglich weiterer Details siehe auch [8]).

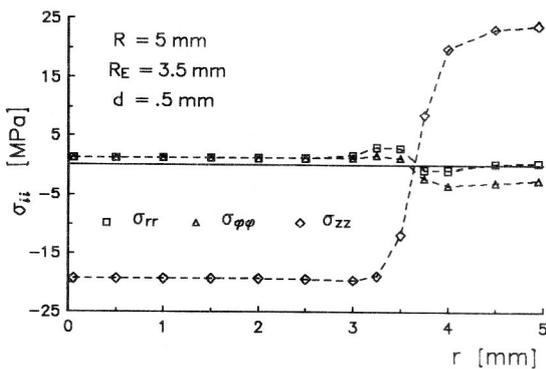


Bild 6: Spannungsverteilung in der mechanisch geklemmten Scheibe entlang $z_0 = .2$ für $r_E = .7$

5. Zusammenfassung

Die FEM-Analysen bestätigen, daß mit dem homogenen Dehnungszustand (9) offensichtlich ein Zustand vorliegt, der durch einen optimalen piezoelektrischen Dehnungseffekt bei geringster innerer mechanischer Belastung der Keramikscheibe charakterisiert wird. Die Effektivität von dieser Geometrie abweichender Scheiben wird wesentlich durch den relativen Elektrodenradius $r_E = R_E/R$ bestimmt.

Qualitative Aussagen zum Verhalten von Aktuatoren aus Stapeln von piezokeramischen Platten sind insofern möglich, als – wiederum ausgehend vom homogenen Zustand (9) – das Dehnungsverhalten der Plattenelemente durch vergleichbare Beziehungen (18) bzw. (21) mit anderen Koeffizienten c_i^{FEM} beschrieben werden kann. Deutliche Abweichungen sind aber im Spannungsfeld zu erwarten, da durch die dreidimensionale Geometrie der Platten im Bereich der Plattenecken größere Spannungsspitzen auftreten, die zu einer experimentell beobachteten Erhöhung der bruchmechanischen Belastung führen.

LITERATUR

- [1] Helke, G.; v. Cieminski, J.; Beige, H.: Hermsdorfer Technische Mitteilungen 76/1989, 2412 – 2417.
- [2] Cady, W. G.: Piezoelectricity. McGraw Hill, New York 1946.
- [3] Voigt, W.: Lehrbuch der Kristallphysik. Teubner Leipzig und Berlin 1910.
- [4] Tiersten, H. F.: media. Proc. IEEE (Letters). Vol. 55 (1967), 1523 – 1524.
- [5] Boucher, D.; Lagier, M.; Maerfeld, C.: IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics Vol. SU-28 (1981) 5, 318 – 330.
- [6] Allik, H.; Hughes, T. J. R.: Int. J. Num. Meth. Engng. 2 (1970), 151 – 157.
- [7] Seifert, W.; Braune, R.: Wiss. Z. Univ. Halle XXXX'91 M, H. 2, 45 – 54.
- [8] Seifert, W.: FMC-Reihe. Inst. für Mechanik, Chemnitz 1991 (im Druck).

Anschrift des Autors:

Dr. rer. nat. W. Seifert
 Fachbereich Physik der Martin-Luther-Universität Halle
 Postfach
 O-4010 Halle