

# Numerische Testung iterativer Lösungen für elastische Kontaktaufgaben mit Reibung

Janos Egert, Johannes Altenbach

*In der Arbeit werden zwei unterschiedliche Iterationsstrategien für zwei verschiedene 2D-Kontaktelemente numerisch getestet. Als Lösungsalgorithmus werden sowohl die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix als auch die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix angewendet. Bei beiden Iterationsmethoden werden Linien- und Schicht-Kontaktelemente benutzt. Für 2D-Modelle, ebener elastischer Stempel auf ebener elastischer Unterlage und elastischer Zylinder auf starrer ebener Unterlage (die klassische Hertz'sche Aufgabe), werden die numerischen Ergebnisse ausführlich dargestellt. Die eigenen Ergebnisse werden bewertet und mit numerischen Lösungen anderer Autoren bzw. mit der exakten Lösung verglichen. Kriterien für eine Bewertung der getesteten Algorithmen sind die Anzahl der erforderlichen Iterationsschritte, der Rechenzeitaufwand und die Konvergenzeigenschaften.*

*The paper demonstrates iterative solutions with constant and with variable stiffness matrix for two different types of finite contact elements. The results are compared with published analytical and numerical solutions. Criteria for an evaluation are the number of iteration steps, the computer time and the convergence.*

## 0. Einleitung

In einer früheren Arbeit [1] haben wir den Aufbau zweier verschiedener Kontaktelemente und zwei mögliche Iterationsstrategien zur Lösung elastischer Kontaktaufgaben theoretisch beschrieben.

Unter Kontaktelementen versteht man fiktive finite Elemente mit besonderen Materialeigenschaften, die die Kontaktbedingungen zwischen den sich berührenden Körpern simulieren müssen. Diese speziellen finiten Elemente dürfen die Festigkeitsverhältnisse der Körper nicht beeinflussen, sie sollen lediglich die mathematische Behandlung des Problems erleichtern. Die Kontaktelemente können in folgende zwei Gruppen eingereiht werden:

- Flächen-/Linien-Kontaktelemente,
- Schicht-Kontaktelemente.

Flächen-/Linien-Kontaktelemente werden unter anderem in den Arbeiten von R. E. Goodmann [2], J. G. Crose [3] und H. Feldmann [4], Schicht-Kontaktelemente zum Beispiel bei J. T. Stadter [5], J. Padovan [6] und G. N. Pande [7] angewendet. Diese Arbeiten enthalten jedoch keine genaueren Bewertungen der verschiedenen Elementtypen und somit auch keine Empfehlungen, in welchen Fällen der Einsatz von Flächen-/Linien- oder von Schicht-Kontaktelementen zweckmäßig ist. Die vorliegende Arbeit will auf der Grundlage numerischer Beispiele für 2D-Aufgaben mithelfen, diese Lücke zu schließen.

Als Iterationsverfahren wurden in [1] die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix und die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix vorgeschlagen. Bei beiden Iterationsmethoden werden die Steifigkeiten bzw. die Materialeigenschaften der Kontaktelemente so modifiziert, daß die Kontaktbedingungen befriedigt werden. Beide Iterationslösungen enthalten für jedes Belastungsincrement zwei Iterationsschleifen, eine für den Normalkontakt und eine andere für den Reibkontakt. Bei der Normalkontaktschleife werden die Größe und die Form des tatsächlichen Kontaktbereiches und die Verteilung der Normalkräfte, bei der Reibkontaktschleife aber der Haft- und der Gleitbereich so-

wie die Gleitungen und die Verteilung der tangentialen Kräfte berechnet.

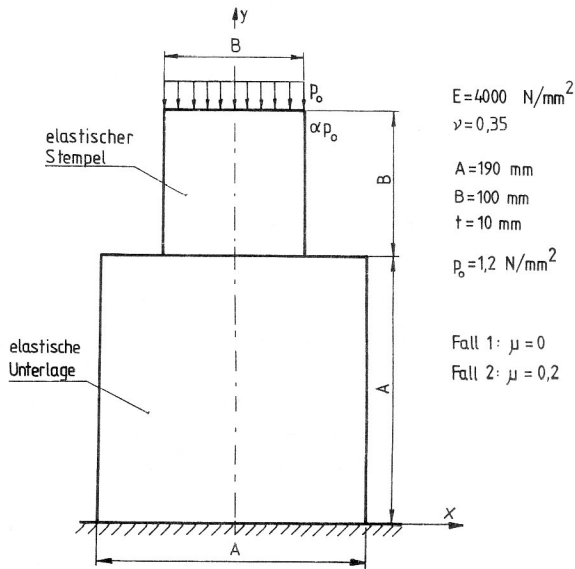
Die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix wird in der Literatur vorwiegend benutzt, u. a. B. Fredriksson [8] und H. Feldmann [4]. Die Grundidee der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix stammt von Ju. B. Gnutschij [9]. Die Erweiterung der Methode auf den inkrementellen Fall erfolgte in [1]. Die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix erfordert für jeden Iterationsschritt eine Matrixinversion, weil sich die Steifigkeiten der Kontaktelemente ändern. Die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix erfordert nur dann eine Matrixinversion, wenn im angenommenen Kontaktgebiet sich Bindungen lösen oder Neukopplungen auftreten. Die Änderung der Steifigkeiten erscheint sonst nur auf der rechten Seite des zu lösenden Gleichungssystems. Bei numerischen Berechnungen wird daher – wegen der geringeren Zahl der Matrixinversionen – erwartet, daß die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix zu einem geringeren Rechenzeitaufwand führt.

Die in [1] dargestellten Kontaktelemente und Lösungsalgorithmen wurden in das an der Universität Miskolc entwickelte universelle FEM-Programmsystem FEM-3D [10], [11] eingebaut. Die effektive Anwendung dieser Iterationsmethoden setzte die Benutzung der Substrukturtechnik voraus. Dabei wurden nur jene Knotenpunkte zu externen Knoten gewählt, die in dem möglichen Kontaktgebiet liegen.

In dieser Arbeit werden numerische Ergebnisse für die 2D-Beispiele ebener elastischer Stempel auf ebener elastischer Unterlage und unendlich langer ebener Zylinder auf starrer ebener Unterlage dargestellt. Bei den numerischen Ergebnissen wird die Genauigkeit der Näherung durch den Vergleich mit numerischen Lösungen anderer Autoren bzw. mit bekannter exakter Lösung überprüft. Die Abhängigkeit der Konvergenzeigenschaften von den Anfangswerten der Steifigkeiten der Kontaktelemente wird durch die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte und die erforderliche Rechenzeit analysiert.

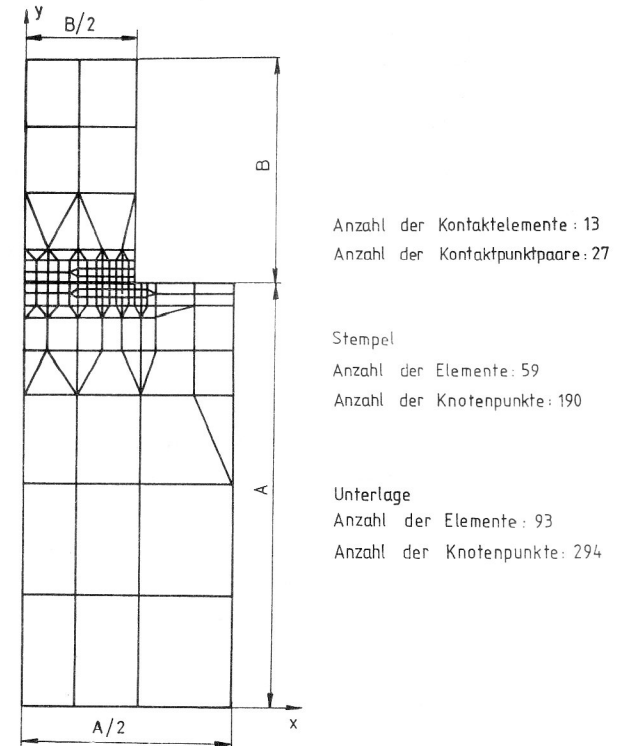
# 1. Elastischer Stempel – elastische Unterlage

Ein elastischer ebener Stempel sei durch eine konstante normale Flächenlast  $p_0$  nach Bild 1 gegen eine elastische Unterlage gedrückt. Der Stempel und die Unterlage haben gleiche Materialeigenschaften. Zwischen dem Stempel und der Unterlage wurde ein Anfangsspiel von 0,001 mm vorausgesetzt. Die Annahme dieses gleichmäßigen Anfangsspieltes ist völlig willkürlich, sie beeinflusst nicht die Lösung. Man braucht sie nur deshalb, weil Schicht-Kontaktelemente nur unter der Voraussetzung der Existenz eines Anfangsspieltes eingesetzt werden können.



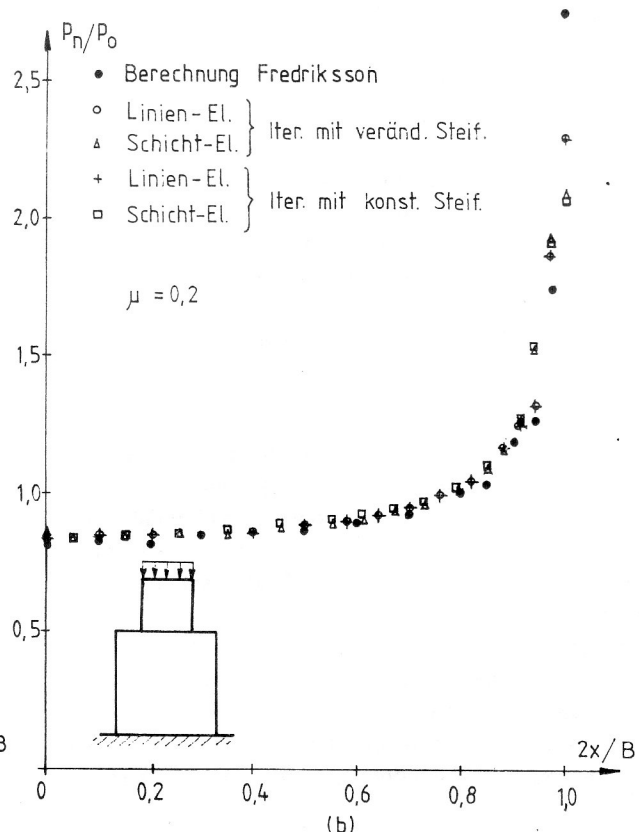
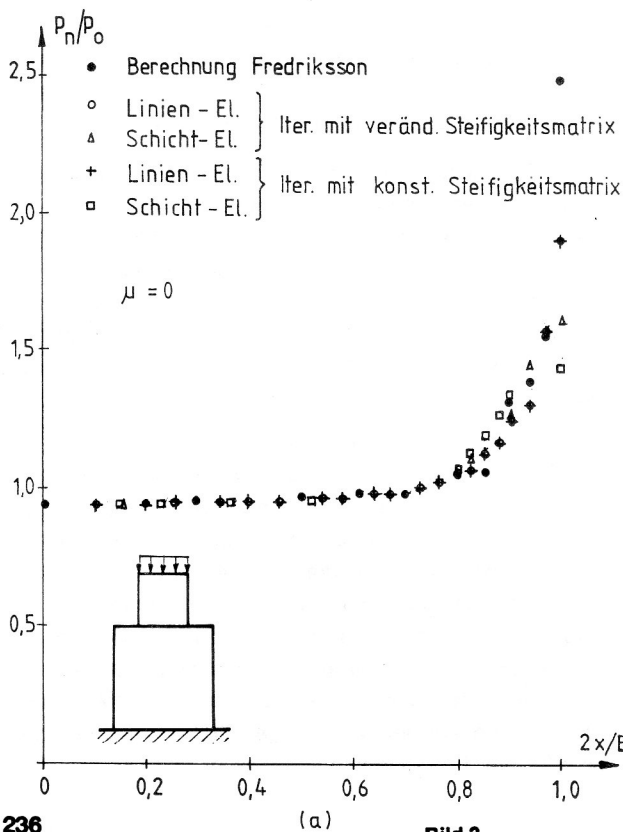
Für die Normalbelastung  $p_0$  wird hier sowohl der reibungslose ( $\mu = 0$ ) als auch der reibungsbehaftete ( $\mu = 0,2$ ) Fall berechnet. Darüber hinaus wird noch der Fall, bei dem die Materialeigenschaften der sich berührenden Körper nicht gleich sind, überprüft.

Die Referenzlösung wurde aus der Dissertation von B. Fredriksson [8] entnommen. Die Ergebnisse von B. Fredriksson

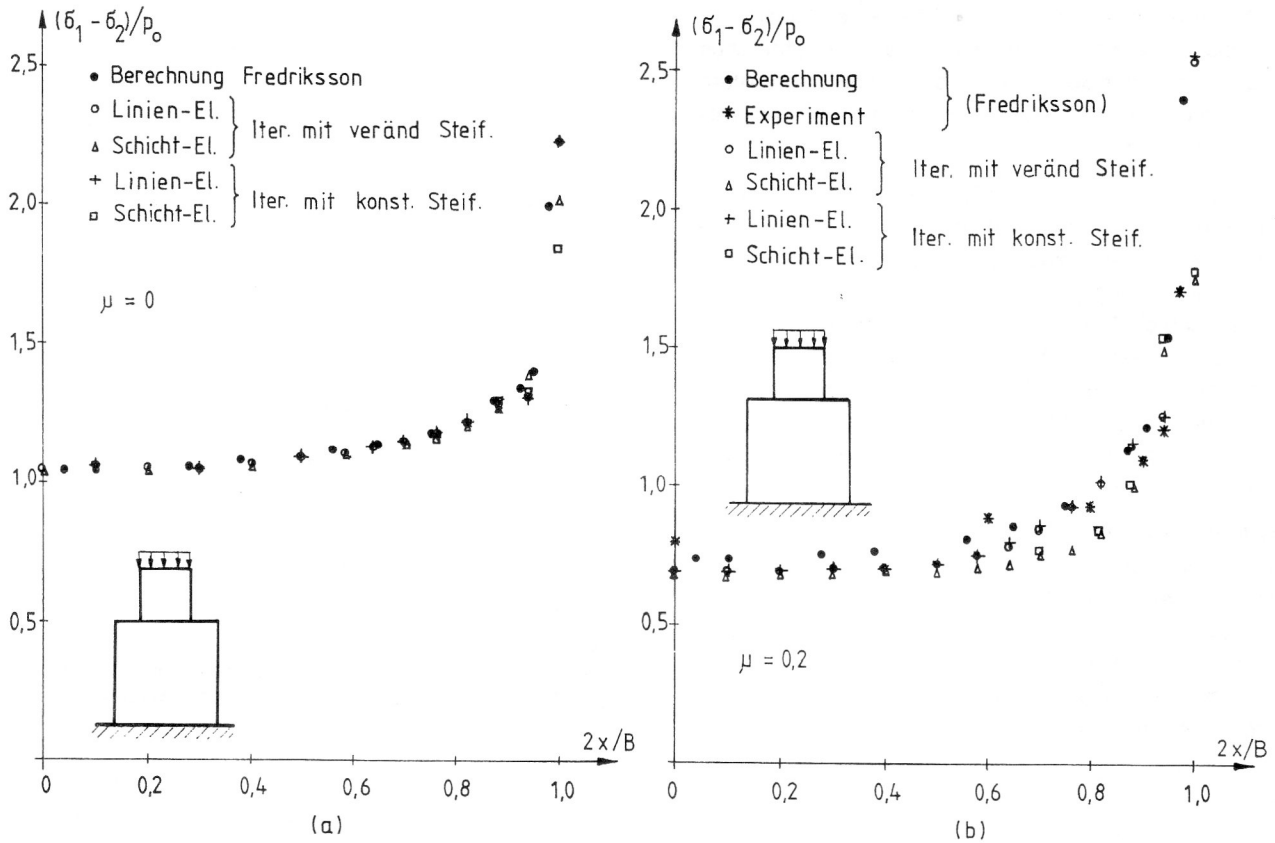


**Bild 1**  
Ebener elastischer Stempel auf ebener elastischer Unterlage

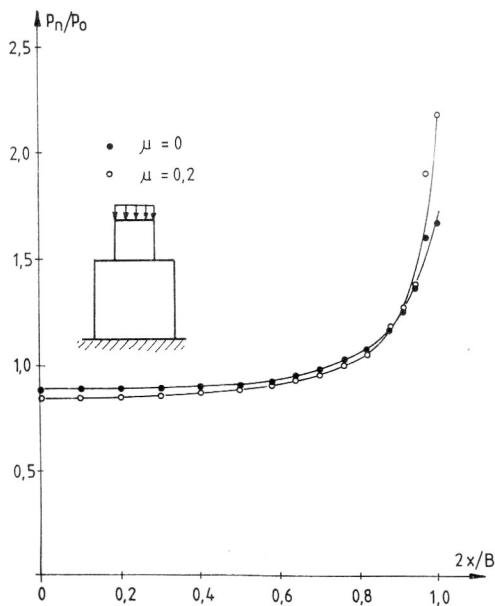
**Bild 2**  
FEM-Vernetzung für den Stempel und die Unterlage



**Bild 3**  
Kontaktdruckverteilung im Berührungsbereich des Stempels



**Bild 4**  
Hauptschubspannungsverteilung für den Stempel im Berührungsbereich



**Bild 5**  
Vergleich der Kontaktdruckverteilung für den reibungslosen und den reibungsbehafteten Fall

son können als zuverlässig betrachtet werden, weil er die Aufgabe sowohl durch Berechnung als auch durch Messungen gelöst hat.

Da der Stempel und die Unterlage eine kleine Dicke  $t$  haben, wird die Aufgabe als Scheibenproblem modelliert. Bei dem FEM-Netz kann man die Symmetrie des Problems ausnutzen (Bild 2). Die FEM-Analyse wird mit zwei Substrukturen und einer Hyperstruktur durchgeführt. Die beiden Substrukturen bilden die 2D-Festkörperelemente des Stempels und der Unterlage, und die Hyperstruktur besteht aus den fiktiven Kontaktelementen. Für die Hyperstruktur werden 13 Linien- oder Schicht-Kontaktelemente angenommen.

In den Bildern 3a – b wird die bezogene Kontaktdruckverteilung  $p_n/p_0$  für die Fälle  $\mu = 0$  (Bild 3a) und  $\mu = 0,2$  (Bild 3b) veranschaulicht. Man kann feststellen, daß die eigenen numerischen Ergebnisse gut mit der Referenzlösung übereinstimmen.

In den Bildern 4a – b wird die bezogene Hauptschubspannung  $2\tau_1/p_0 = (\sigma_1 - \sigma_2)/p_0$  entlang eines waagerechten Schnittes, der im Stempel 1,5 mm von der Kontaktzone entfernt liegt, sowohl für den reibungslosen (Bild 4a) als auch für den reibungsbehafteten (Bild 4b) Fall dargestellt. Im Fall mit Reibung ( $\mu = 0,2$ ) stehen uns nicht nur numerische Ergebnisse, sondern auch Meßergebnisse als Referenzlösung zur Verfügung.

Auf Bild 4a ist zu ersehen, daß die eigenen numerischen Ergebnisse mit der Referenzlösung sehr gut übereinstimmen. Im reibungsbehafteten Fall (Bild 4b) streuen die Ergebnisse etwas, die Abweichung ist aber noch zulässig.

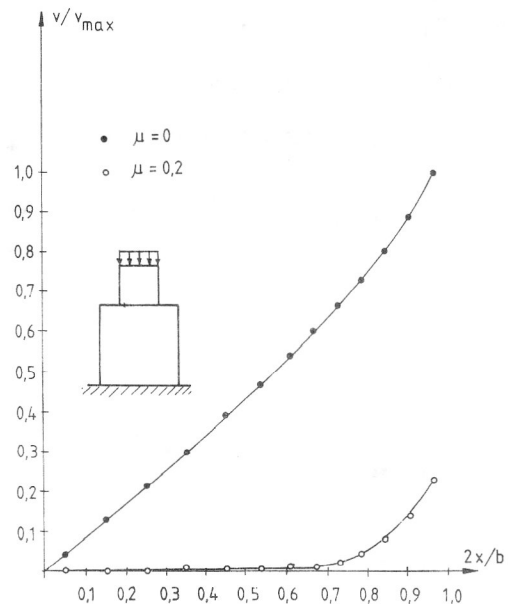
Die Bilder 3 und 4 bestätigen, daß beide Iterationsmethoden und beide Kontaktelemente eine gute Näherungslösung liefern. In der Genauigkeit gibt es weder bei den Iterationsverfahren noch bei den Kontaktelementen wesentliche Unterschiede.

In den Bildern 5, 6 wird der Einfluß der Reibung veranschaulicht. Der reibungslose und der reibungsbehaftete Fall werden für den bezogenen Kontaktdruck  $p_n/p_0$  und die bezogene Gleitung  $v/v_{max}$  verglichen. Aus Bild 5 ist zu erkennen, daß die Reibung mit einem Reibwert von  $\mu = 0,2$  im Vergleich zu dem reibungslosen Fall den Kontaktdruck kaum beeinflusst. Für die Gleitung  $v$  zwischen den sich berührenden Körpern (Bild 6) und für die Hauptschubspannung  $\tau_1$  (Bild 4a–b) gibt es aber wesentliche Unterschiede.

Der Einfluß der Materialeigenschaften des Stempels und der Unterlage auf den bezogenen Kontaktdruck wird im Bild 7a für den Fall  $\mu = 0$  und im Bild 7b für den Fall  $\mu = 0,2$  dargestellt. Für diese Untersuchungen wurde die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix unter der Benutzung von Linien-Kontaktelementen angewendet. Insgesamt wurden drei Versionen berechnet:

- elastischer Stempel – starre Unterlage,
- elastischer Stempel – elastische Unterlage,
- starrer Stempel – elastische Unterlage.

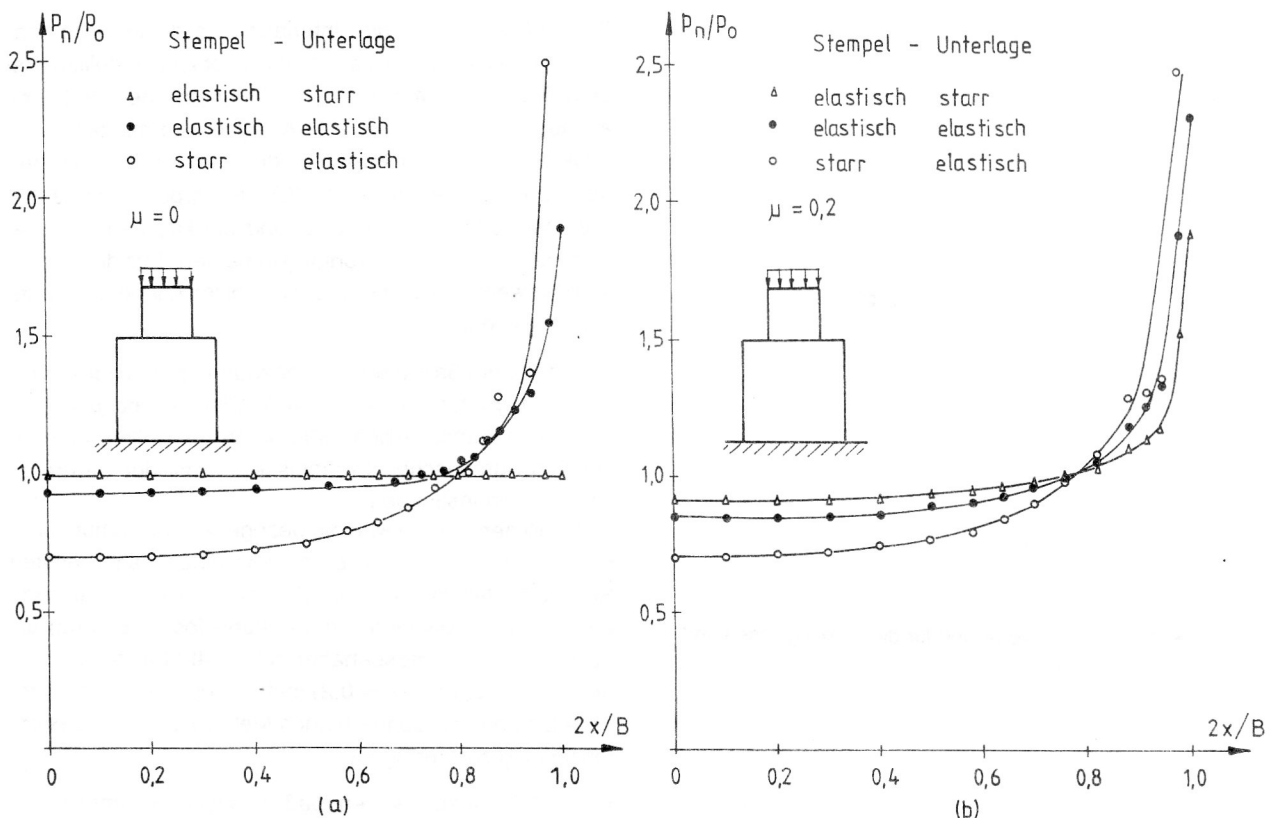
Auf den Bildern 7a – b ist zu erkennen, daß die Materialeigenschaften der sich berührenden Körper auf die Kontaktdruckverteilung einen großen Einfluß haben. Die Reibung beeinflusst im Fall des Problems elastischer Stempel



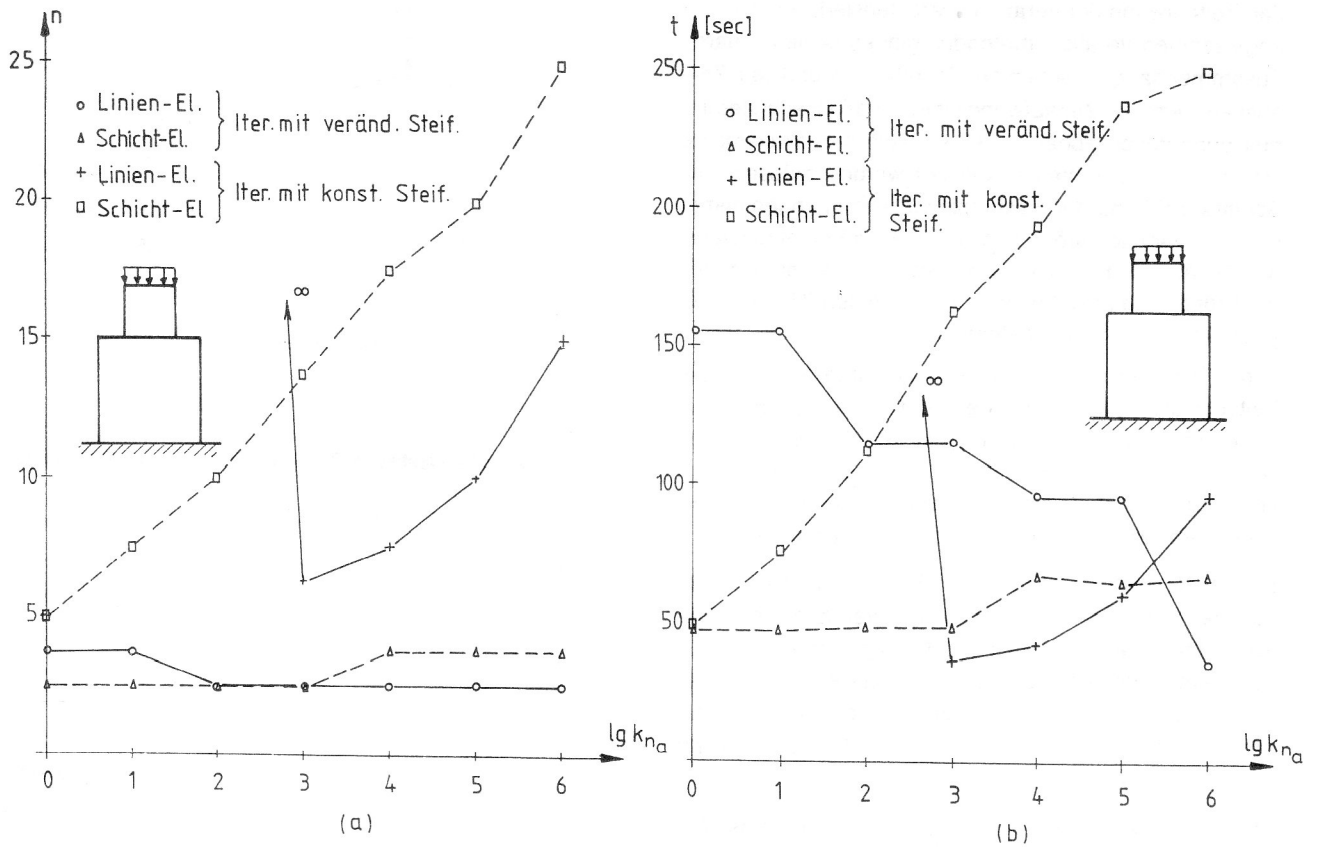
**Bild 6**  
Vergleich der Gleitungen zwischen dem Stempel und der Unterlage für den reibungslosen und den reibungsbehafteten Fall

– starre Unterlage den Charakter der Kontaktverteilung signifikant. In den anderen beiden Fällen spielt die Reibung keine bedeutende Rolle.

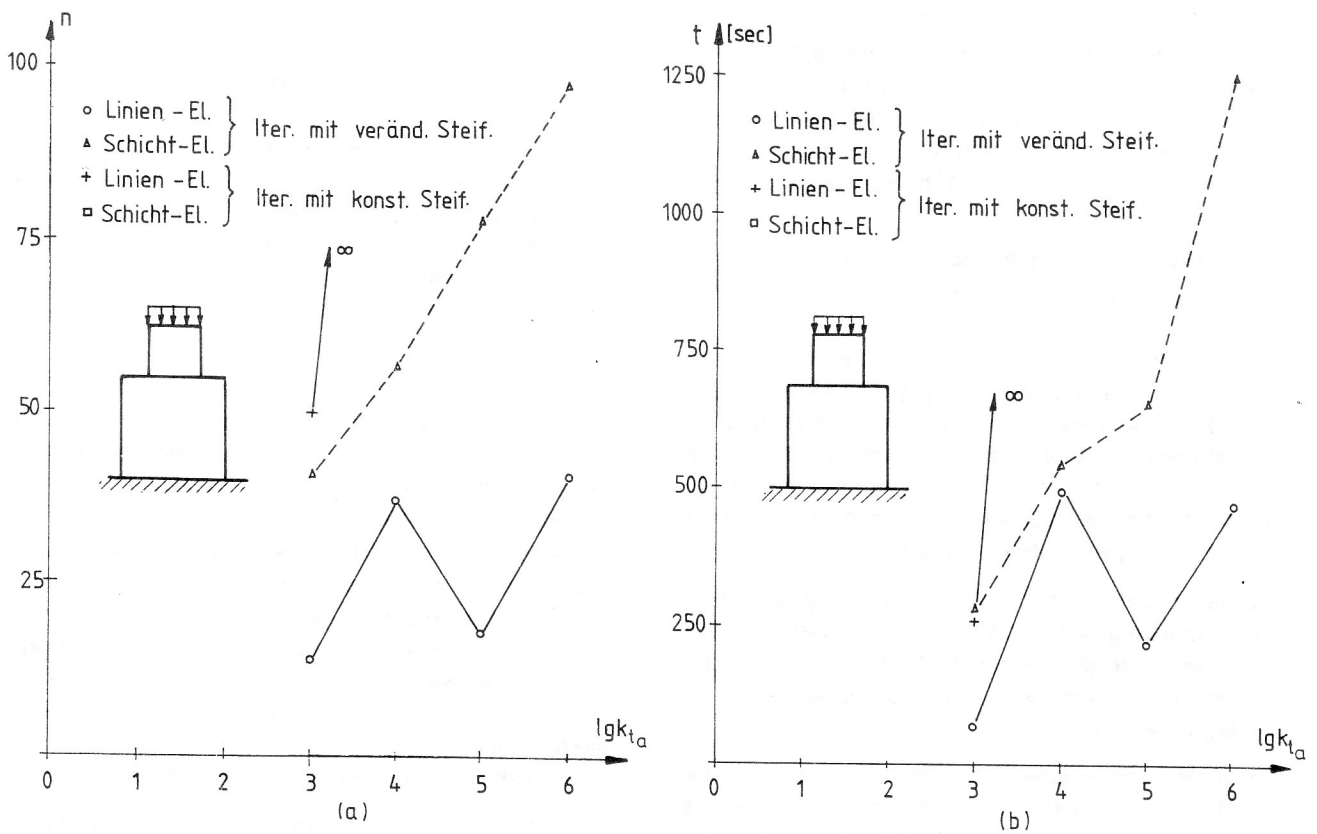
Die Leistungsfähigkeit einer Iterationsmethode wird immer durch die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte oder



**Bild 7**  
Einfluß der Materialeigenschaften der Bauteile auf die Kontaktdruckverteilung



**Bild 8**  
Schrittzahl- und Rechenzeitaufwand für den Normalkontakt beim Stempel-Unterlage-Problem



**Bild 9**  
Schrittzahl- und Rechenzeitaufwand für den Reibkontakt beim Stempel-Unterlage-Problem

den Zeitaufwand der Iteration charakterisiert. Bei den hier angewandten Iterationsmethoden gibt es keinen linearen Zusammenhang zwischen der Schrittzahl und dem Zeitaufwand, weil der Zeitaufwand eines Iterationsschrittes immer auch davon abhängig ist, wieviele Kontaktelemente während des Schrittes modifiziert werden müssen. Die Schrittzahl und der Rechenaufwand hängen immer von der Wahl der Größe des potentiellen Kontaktgebietes und der Anzahl der Kontaktelemente ab. Die hier mitgeteilten Ergebnisse beziehen sich auf die in den Bildern gegebene Anzahl der Kontaktelemente.

In den Bildern 8 und 9 werden die Schrittzahl  $n$  und der Zeitaufwand  $t$  als Funktion des dekadischen Logarithmus der Anfangssteifigkeitswerte  $k_{n_s}, k_{t_s}$  ( $E_a, G_a$ ) sowohl für die Normalkontakt- als auch für die Tangentialkontakt-Iteration dargestellt. In den in [1] angegebenen Rekursionsformeln wurde immer der Exponent  $a = 1$  angewendet.

Bei der Normalkontakt-Iteration (Bild 8) kann man erkennen, daß der Aufwand der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix von der Wahl des Anfangswertes  $k_{n_s}$  nur in geringem Maße abhängt. Die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix ist viel stärker anfangswertabhängig. Bei der Anwendung von Linien-Kontaktelementen gibt es für kleine Anfangswerte keine Konvergenz ( $n, t \rightarrow \infty$ ).

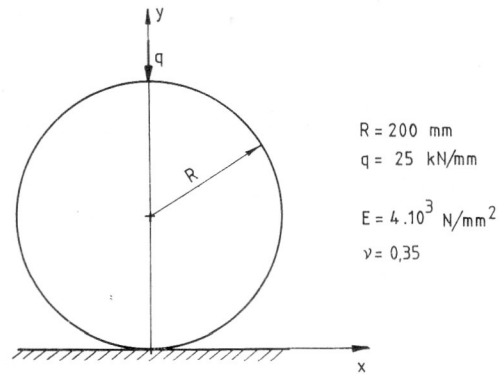
Bei der Tangentialkontakt-Iteration (Bild 9) wurde der Anfangswertbereich  $k_{t_s} = 10^3 - 10^6$  untersucht. Die Iteration für den Tangentialkontakt muß man mit einem relativ großem Wert beginnen. Deshalb ist es nach unseren Erfahrungen nicht zweckmäßig, die Iteration mit einem kleineren Wert als  $k_{t_s} = 10^3$  zu beginnen. Aus den Bildern 9a – b ist zu ersehen, daß die Konvergenzeigenschaften in diesem Fall auch bei der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix weitgehend anfangswertabhängig sind. Bei der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix existiert unter der Benutzung von Schicht-Kontaktelementen keine Lösung. Unter der Benutzung von Linien-Kontaktelementen wurde nur für den Anfangswert  $k_{t_s} = 10^3$  eine Lösung erhalten.

## 2. Elastischer Zylinder – starre ebene Unterlage

Ein unendlich langer elastischer Zylinder sei nach Bild 10 durch eine konstante Linienlast  $q$  gegen eine starre Ebene gedrückt. Diese Aufgabe kann als ebene Verzerrung betrachtet werden. Sowohl der reibungslose ( $\mu = 0$ ) als auch der reibungsbehaftete ( $\mu = 0,2$ ) Fall wird hier mit den unterschiedlichen Lösungsmethoden berechnet und mit der exakten Lösung von H. Hertz verglichen.

Die exakte Lösung bezieht sich auf den reibungslosen Fall. Neben dem Vergleich werden der Einfluß der Reibung und die Konvergenzeigenschaften der Methoden in Abhängigkeit von den Anfangswerten der Steifigkeiten  $k_{n_s}, k_{t_s}$  ( $E_a, G_a$ ) untersucht.

Wegen der Symmetrieeigenschaften der Aufgabe wird nur die Hälfte des Zylinders diskretisiert. Da der obere Teil des Halbzylinders die mechanischen Verhältnisse der Kontaktzone nicht beeinflußt, kann man auch das obere Viertel des Zylinders weglassen (Bild 11).



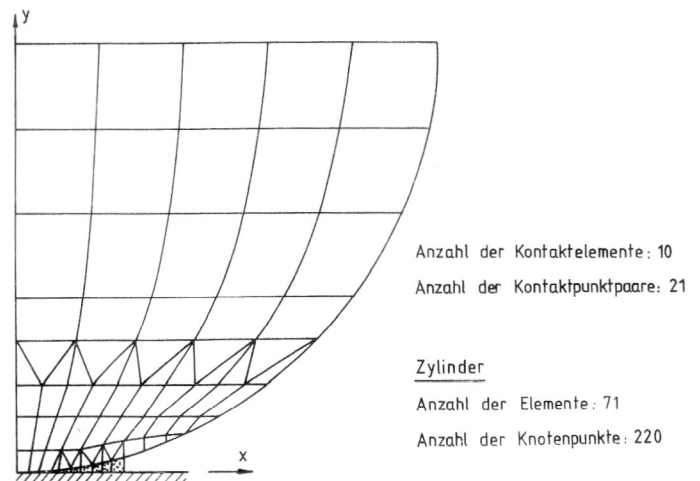
$$R = 200 \text{ mm}$$

$$q = 25 \text{ kN/mm}$$

$$E = 4 \cdot 10^3 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,35$$

**Bild 10**  
Unendlich langer elastischer Zylinder auf starrer ebener Unterlage



Anzahl der Kontaktelemente: 10  
Anzahl der Kontaktpunktpaare: 21

Zylinder  
Anzahl der Elemente: 71  
Anzahl der Knotenpunkte: 220

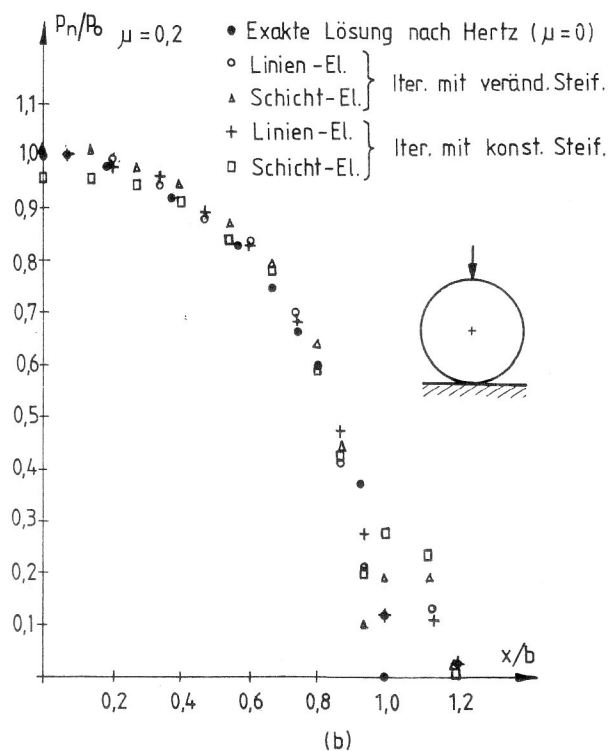
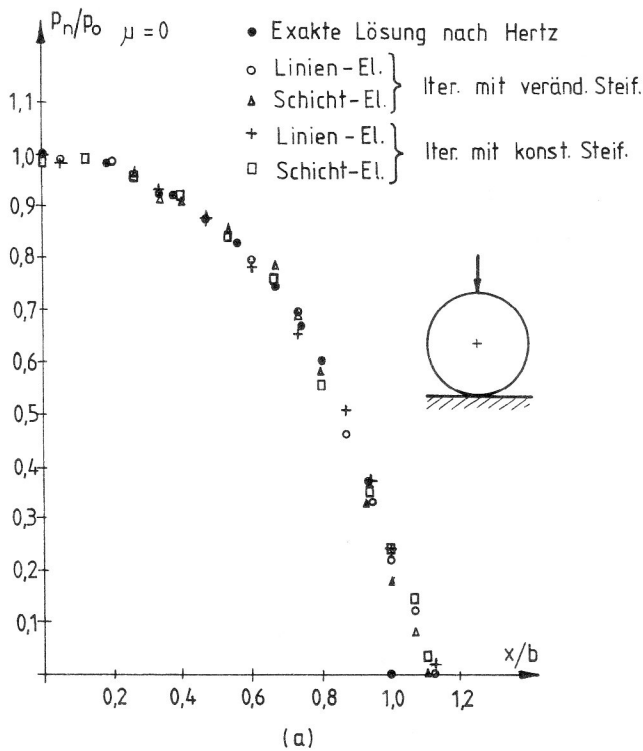
**Bild 11**  
FEM-Netz für den Zylinder und die potentielle Kontaktzone

Bei der FEM-Berechnung werden eine Substruktur und eine Hyperstruktur angewendet. Die Substruktur wird aus 2D-Festkörperelementen aufgebaut, und die Hyperstruktur besteht aus den auf dem potentiellen Kontaktgebiet angenommenen fiktiven Kontaktelementen. In der Hyperstruktur werden 10 Linien- oder Schicht-Kontaktelemente benutzt.

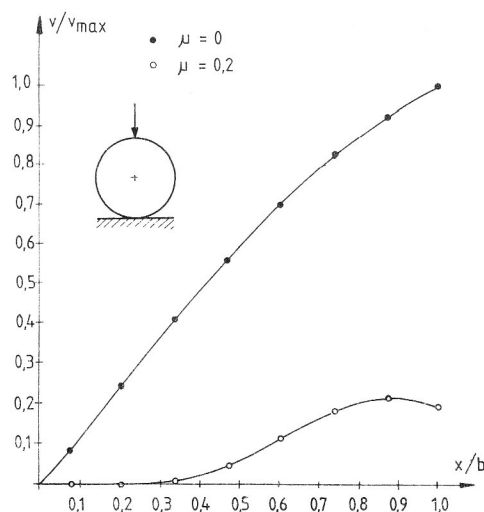
In den Bildern 12a – b wird die bezogene Kontaktdruckverteilung  $p_n/p_0$  für die Fälle  $\mu = 0$  (Bild 12a) und  $\mu = 0,2$  (Bild 12b) dargestellt.  $p_0$  ist der maximale Kontaktdruck und  $b$  die Hälfte des Kontaktgebietes nach der exakten reibungsfreien Lösung.

Im Falle  $\mu = 0$  stimmen die mit den unterschiedlichen Iterationsmethoden und Kontaktelementen berechneten Ergebnisse miteinander und mit der exakten Lösung sehr gut überein. Die kleinere Abweichung der eigenen numerischen Ergebnisse am Rand des Kontaktbereiches kann mit einer weiteren Verfeinerung des FEM-Netzes beseitigt werden. Im Bild 12 ist zu sehen, daß beide Iterationen und die Kontaktelemente-Lösungen gleiche Qualität liefern.

Auch im Fall  $\mu = 0,2$  stimmen die numerischen Ergebnisse mit der reibungslosen exakten Lösung gut überein. Die Reibung hat also hier in bezug auf die Kontaktdruckverteilung keine wesentliche Bedeutung.



**Bild 12**  
Kontaktdruckverteilung im Zylinder



**Bild 13**  
Vergleich der Gleitungen zwischen dem Zylinder und der Unterlage

Im Bild 13 wird die bezogene Gleitung  $v/v_{max}$  für den reibungslosen und reibungsbehafteten Fall verglichen. Für die Gleitung  $v$  besteht zwischen diesen Fällen, wie es im Bild zu sehen ist, ein wesentlicher Unterschied.

Bei dieser Aufgabe werden die zur Konvergenz notwendige Schrittzahl und der Zeitaufwand in den Bildern 14–15 dargestellt. Bei beiden Iterationen wurden Exponenten  $a = 1$  in den Rekursionsformeln benutzt.

Aufgrund des Bildes 14 ist festzustellen, daß die Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix bei einer Normalkon-

takt-Iteration wesentlich stabilere Konvergenzeigenschaften zeigt, als die Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix.

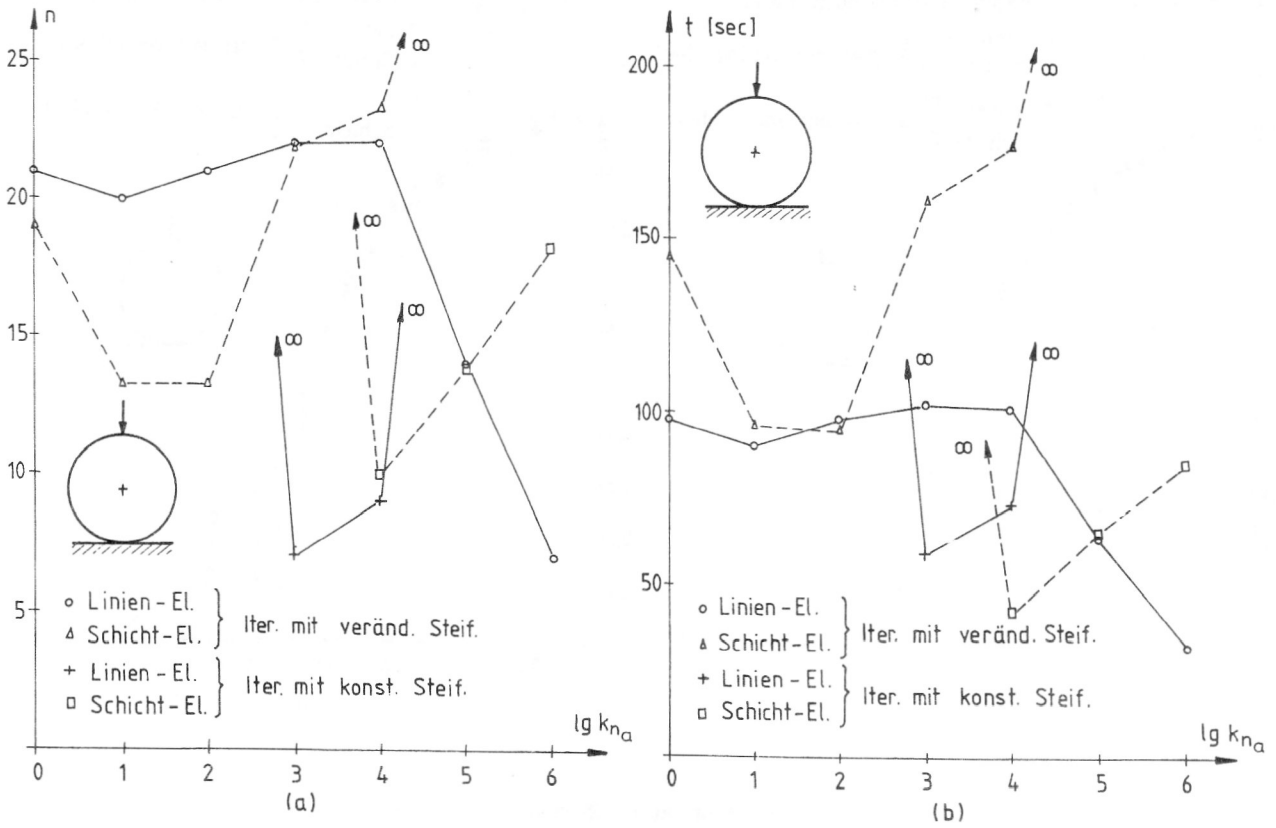
Bei der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix erhält man für viele Anfangswerte  $k_{nr}$  keine Konvergenz.

Bei der Tangentialkontakt-Iteration (Bild 15) wurde wieder der Anfangswertbereich  $k_{ta} = 10^3 - 10^6$  untersucht. Für den ganzen Bereich besteht Konvergenz nur bei der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix unter der Benutzung von Linien-Kontaktelementen. Bei den anderen Berechnungsversionen gibt es Anfangswerte  $k_{ta}$ , mit denen die Konvergenz der Methode nicht gesichert ist.

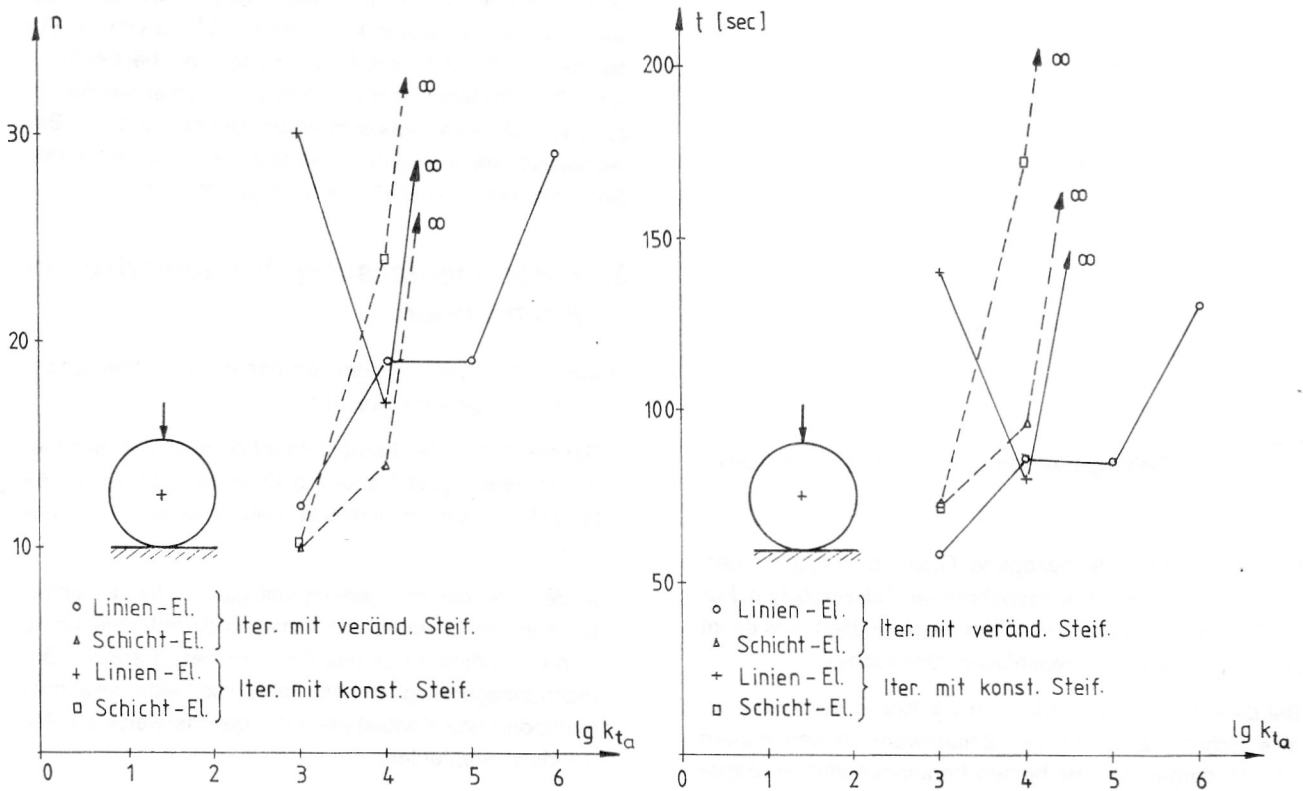
### 3. Zusammenfassung der numerischen Erfahrungen

Aufgrund der Berechnungen können die folgenden Erfahrungen festgehalten werden:

- Die hier getesteten Iterationsmethoden und Kontaktelemente liefern gute Näherungslösungen sowohl für reibungslose als auch für reibungsbehaftete Kontaktaufgaben.
- In der Berechnungsgenauigkeit gibt es für die unterschiedlichen Lösungsverfahren und Kontaktelemente keinen merkbaren Unterschied. In bezug auf die Berechnungsgenauigkeit kann man also beide Iterationsmethoden und Kontaktelemente gleichermaßen zur Anwendung empfehlen.
- Wenn man die Exponenten  $a$  in den Rekursionsformeln für die Änderung der Steifigkeiten der Kontaktelemente im Bereich von 0,2 bis 5 entsprechend wählt, ist es stets



**Bild 14**  
Schrittzahl- und Rechenzeitaufwand für den Normalkontakt Zylinder – Unterlage



**Bild 15**  
Schrittzahl- und Rechenzeitaufwand für den Reibkontakt Zylinder – Unterlage



- möglich, sowohl bei der Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix als auch bei der Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix Konvergenz zu erreichen. Die entsprechende Wahl ist aber weitgehend von der Geometrie und der Belastung der untersuchten Konstruktion und von den Anfangswerten der Steifigkeiten abhängig. Die effektivste Wahl kann man meistens mittels einiger Proberechnungen vornehmen.
- Mit der Annahme  $\alpha = 1$  ist es bei beiden Iterationsmethoden nicht immer möglich, Konvergenz zu erreichen. Die zur Konvergenz nötigen Iterationsschrittzahl hängt in großem Maße von dem Anfangswert der Kontaktsteifigkeiten ab.
  - Beide Iterationsmethoden und beide Kontaktelemente zeigen bessere Konvergenzeigenschaften für den Normalkontakt als für den Reibkontakt.
  - Eine Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix ist zuverlässiger. Bei einer Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix erhält man häufiger ein nichtkonvergentes Lösungsverhalten.
  - Im Rechenzeitaufwand kann man zwischen den Iterationen keinen eindeutigen Unterschied erkennen. Im allgemeinen ist es nicht möglich, bei einer Iteration mit konstanter Steifigkeitsmatrix Rechenzeiterparnis zu erreichen.
  - Die Wahl der Kontaktelemente beeinflusst die Konvergenzeigenschaften nur in geringem Maße. Aufgrund dieser Beispiele scheinen Linien-Kontaktelemente etwas günstiger als Schicht-Kontaktelemente.
  - In bezug auf die Konvergenzeigenschaften ist eine Iteration mit veränderlicher Steifigkeitsmatrix unter Benutzung von Linien-Kontaktelementen die günstigste Lösungsmethode.
  - Die Materialeigenschaften der sich berührenden Körper können die Festigkeitsverhältnisse der Kontaktzone bedeutend beeinflussen.

## LITERATUR

- [1] Égert, J.; Altenbach, J.: Inkrementelle Iterationsmethoden zur Lösung elastischer Kontaktaufgaben mit Reibung mittels spezieller isoparametrischer 2D- und 3D-Kontaktelemente. *Techn. Mech.* Vol. 10, No. 2, p. 120 – 137, (1989).
- [2] Goodman, R. E.; Taylor, R. L.; Brekke, T. L.: A model for the mechanics of jointed rock. *Journ. Soil Mech. and Found. Div., Proc. of the ASCE.*, May 1968, p. 637 – 659.
- [3] Crose, J. G.; Mack T. E.; Wooley, G. R.; Smith, R. E.: Nonlinear Finite Element Analysis of Buttress Thearded Casing Connections., *ASME-Paper*, 76-PET-82., 1976.
- [4] Feldmann, H.: Spannungsberechnung an Gewinden von Schraube-Mutter-Verbindungen mittels der Methode der finiten Elemente. *Diss.*, TU Braunschweig, 1982.
- [5] Stadter, J. T.; Weiss, R. O.: Analysis of contact trough finite element gaps. *Comp. & Struct.*, Vol. 10., p. 867 – 873, (1979).
- [6] Padovan, J.; Moscarello, R.; Stafford, J.; Tabaddor, F.: Pantographing self adaptive gap elements. *Comp. & Struct.*, Vol. 20., No. 4., p. 745 – 758, (1985).
- [7] Pande, G. N.; Sharma, K. G.: On joint/interface elements and associated problems of numerical ill-conditioning. *Int. Journ. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol. 3, pj. 293 – 300, (1979).
- [8] Fredriksson, B.: On elastic contact problems with friction., *Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations* No. 6., 1976.
- Bohmann, J.: Fügen mit minimalen Reaktionskräften. *Forschungsbericht (unveröffentlicht)*, Ilmenau, 1990.
- [9] Gnutschij, Ju. B.: Naprasenno-deformirovannoje sostojanije kontaktirujuschichsja tel, podwersennich teplomechanitscheskim bosdejstwijam. *Awtoreferat dissertaziji na soiskanije stepeni kandidata mechanitscheskich nauk.*, Kiew, 1981.
- [10] Égert, J.; Herpai, B.; Nándori, F.; Páczelt, I.; Sárközi, L.; Szabó, T.: Characteristics of a substructural finite element programming system for IBM AT compatible PC. *Proc. of Int. Conf. on Eng. Design (ICED '88)*, Budapest, 23 – 25 August 1988, Serie WDK 16, Vol. 3.
- [11] Entwicklung eines interaktiven graphischen CAD-FEM-Systems. *Forschungsbericht*, TU Miskolc, Lehrstuhl für Mechanik, 1987, Berichtsnummer: ÁMSz 512 – XXVIII -3/87 (in ung.).

## Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr.-Ing. habil. Johannes Altenbach  
 Technische Universität „Otto von Guericke“  
 Institut für Festkörpermechanik  
 PSF 4120  
 O-3010 Magdeburg

Dr.-Ing. J. Egert  
 Technische Universität Miskolc  
 Lehrstuhl für Technische Mechanik  
 H-3515 Miskolc