

# Fehlerabschätzung für FEM-Vernetzungen bei ebenen stationären Wärmeleitproblemen

Heinzjoachim Franéck

Bei der Berechnung von ebenen stationären Wärmeleitproblemen mit Hilfe der FEM erfüllt der aus den Elementknotenvektoren und den Ansatzfunktionen ermittelte Vektor der Wärmestromdichten weder die Wärmebilanzgleichungen im Inneren der Elemente noch die natürlichen Randbedingungen. Die Differenzen zwischen den FEM-Funktionen und den vorgeschriebenen Ergiebigkeiten der Wärmequellen bzw. den Wärmestromdichten stellen sogenannte Fehlerfunktionen dar, die nur dann verschwinden, wenn der FEM-Näherungsansatz mit der exakten Lösung übereinstimmt. Aus diesen Fehlerfunktionen erhält man Verfeinerungsindikatoren, die zur Verbesserung des FEM-Netzes verwendet werden können.

In the analysis of problems of plane stationary heat conduction by means of FEM, the vector of the heat flow densities derived from the element nodal vectors and the shape functions fulfills neither the heat balance equations inside the elements nor the natural boundary conditions. The differences between the FEM functions and the prescribed strength of the heat sources or heat flow densities, respectively, represent so-called error functions which disappear only if the FEM approximation does agree with the exact solution. Therefore, from these error functions refinement indicators for the improvement of FEM meshes can be derived.

## 1. Einleitung

Die Anwendung der Methode der finiten Elemente bei der Bearbeitung von Randwertproblemen führt zu Ergebnissen, die in den meisten Fällen nur eine Näherung der exakten Lösung darstellen. Um die mit dieser Methode verbundenen Fehler möglichst klein zu halten, gibt es einerseits gesicherte Vorschriften ( $C^p$ -Stetigkeit, Konvergenzverhalten, Elementtyp), andererseits aber auch gewisse Freiräume, die sich zu einem großen Teil auf eine günstige Vernetzungsstrategie beziehen. Eine gute Vernetzung muß sowohl der Geometrie des zu untersuchenden Kontinuums angepaßt sein als auch Ort, Größe und Richtung einer vorgeschriebenen Beanspruchung berücksichtigen. Bei ungünstigen FEM-Netzen können vermeidbare ökonomische Verluste entstehen, und so ist es wünschenswert, bereits nach dem ersten Rechenlauf (a-posteriori) zu wissen,

- wo eine gewählte Vernetzung nicht fein genug ist und wie sich die Fehler auf das gesamte Gebiet verteilen (relativer Fehler),
- wie groß die entstandenen Fehler bezüglich der (meistens natürlich unbekannt) exakten Lösung sind (absoluter Fehler).

Aus diesen Erkenntnissen lassen sich dann sofort Rückschlüsse auf die notwendigen Netzverfeinerungen ziehen und gegebenenfalls eine automatische Netzanpassung durchführen ([1] bis [3]).

Die Kriterien, nach denen die auftretenden Fehler speziell für ein- bzw. zweidimensionale Tragwerke bestimmt werden, können verschiedener Art sein ([4] bis [7]). Es zeigt sich jedoch, daß sich die Gebiete mit den größten Fehlern nicht wesentlich voneinander unterscheiden, so daß man die Methode wählen darf, die sich in ein vorhandenes FEM-Programm am günstigsten einbauen läßt.

Die im folgenden dargestellte Fehlerberechnung beruht für die stationäre Wärmeleitung auf der Überprüfung der Wärmebilanzgleichung im Inneren eines Elements und der Bilanz der Wärmestromdichten zwischen zwei benachbarten

Elementen. Sie ist speziell für scheibenförmige Tragwerke durchgeführt worden und bezieht sich in den Annahmen und Bezeichnungen auf das Anwenderhandbuch E87E ([8]). Weitere Einzelheiten sind in [9] enthalten.

## 2. Grundlagen der Fehlerbestimmung

Die Methode der finiten Elemente ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben. Im vorliegenden Falle wird sie zur Analyse der stationären Wärmeleitung in Scheibentragwerken benutzt, wobei in dem FEM-Programm E87E der Bergakademie Freiberg das zu untersuchende Gebiet in Dreieckelemente mit 3 Knoten (den Eckpunkten) eingeteilt wird (Bild 1). Als Ansatzfunktionen für die Temperaturverteilung finden reduzierte Hermitesche Polynome 3. Grades Verwendung. Die aus diesen Ansatzfunktionen folgende Wärmestromdichte erfüllt i. a. nicht exakt die Wärmebilanzgleichung im Inneren jedes Elements, und sie erfüllt auch nicht exakt die vorgeschriebenen natürlichen Randbedingungen längs der Elementränder, aber sie ist die exakte Lösung für Ergiebigkeiten der Wärmequelle bzw. für Randwärmestrom-

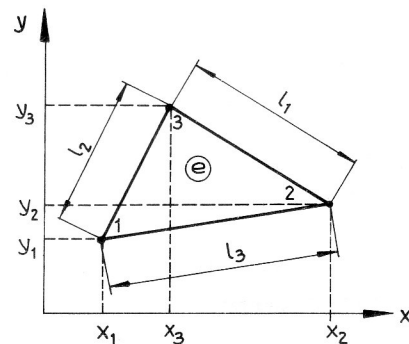


Bild 1  
Finites 3-Knoten-Dreieckelement

*dichten*, die man aus der Wärmebilanzgleichung im Inneren jedes Elements bzw. aus der Differenz der zugehörigen Wärmestromdichten entlang der Verbindungslinien jeweils zweier Elemente erhält. Die Differenz zwischen diesen „FEM-Funktionen“ und den gegebenen Größen stellt eine *Fehlerfunktion* dar, die nur dann verschwindet, wenn der Näherungsansatz für die Temperaturverteilung mit der exakten Lösung des Randwertproblems übereinstimmt. Bildet man gewisse *Normen* dieser Fehlerfunktionen und setzt diese Zahlen ins Verhältnis zum *Gesamtfehler*, so kann angenommen werden, daß die Netzeinteilung in den Gebieten mit den größten *relativen Fehlern* verbessert werden muß. Bezieht man dagegen die (gemittelte) Wärmestromdichte infolge der Differenz aus der „FEM-Funktion“ und der exakten Beanspruchung (gemittelte Wärmestromdichte infolge der Fehlerfunktion) im Element bzw. am Elementrand auf eine maximale vorhandene Bezugswärmestromdichte (bzw. eine analoge repräsentative Wärmestromdichte) im gesamten Kontinuum, so kann aus diesem *absoluten Fehler* eine allgemeine Aussage über die Güte der FEM-Näherung getroffen werden.

### 3. Stationäre Wärmeleitung in ebenen Tragwerken

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige für die weitere Untersuchung notwendige Beziehungen der stationären Wärmeleitung angegeben werden.

Die Temperaturverteilung  $\vartheta(x, y)$  im Inneren des Elements  $e$  wird durch die Ansatzfunktion (Näherungsansatz)

$$\vartheta^{(e)}(x, y) = T^{(e)}(x, y) - \bar{T}_0 = \underline{f}^{(e)}(x, y)^T \underline{z}^{(e)} \quad (1)$$

approximiert. Dabei sind

– der Knotenvektor

$$\underline{z}_I = [\vartheta_i; \vartheta_{ixi}; \vartheta_{iyi}]^T \quad (i \triangleq 1, 2, 3), \quad (2)$$

– der Elementknotenvektor

$$\underline{z}^{(e)} = [\underline{z}_1^T; \underline{z}_2^T; \underline{z}_3^T]^T \quad (3)$$

– und der Vektor der Formfunktionen

$$\underline{f}^{(e)}(x, y) = \underline{f}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\underline{f}_1^T; \underline{f}_2^T; \underline{f}_3^T]^T \quad (4)$$

mit den Teilvektoren (Hermiteische Polynome in Dreieckskordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ )

$$\begin{aligned} \underline{f}_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T, \\ \underline{f}_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) f_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T, \\ \underline{f}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) f_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Funktion  $\vartheta(x, y)$  stellt die Differenz zwischen der absoluten Temperaturverteilung  $T(x, y)$  und einer Bezugstemperatur  $\bar{T}_0$  dar.

Zwischen der Temperaturverteilung  $\vartheta(x, y)$  und dem Vektor der Temperaturgradienten

$$\underline{\gamma}(x, y) = [\gamma_x(x, y); \gamma_y(x, y)]^T \quad (6)$$

besteht mit dem Differentialoperator-Vektor

$$\underline{d} = [\partial/\partial x; \partial/\partial y]^T \quad (7)$$

der Zusammenhang

$$\underline{\gamma}(x, y) = \underline{d} T(x, y) = \underline{d} \vartheta(x, y) \quad (8)$$

bzw. für den Näherungsansatz (1)

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \underline{d} \underline{f}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{z}^{(e)} \\ &= \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Die Matrix  $\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  enthält den Vektor der Variablen

$$\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\xi_1^2, \xi_2^2, \xi_3^2; \xi_1, \xi_2; \xi_2, \xi_3; \xi_3, \xi_1]^T, \quad (10)$$

während die Geometriematrix  $\underline{H}^{(e)}$  aus den Abmessungen des Elements  $e$  gebildet wird.

Der Vektor der Wärmestromdichten

$$\underline{\dot{q}}(x, y) = [\dot{q}_x(x, y); \dot{q}_y(x, y)]^T \quad (11)$$

ist mit dem Vektor der Temperaturgradienten nach Gl. (6) über die Beziehung

$$\underline{\dot{q}}(x, y) = -\underline{A} \underline{\gamma}(x, y) \quad (12)$$

verknüpft. Dabei ist  $\underline{A}$  die Matrix der Wärmeleitkoeffizienten, die für isotropes Material die Form

$$\underline{A} = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \lambda \underline{E}_2 \quad (13)$$

annimmt. Elementweise unterschiedliche Größen des Wärmeleitkoeffizienten  $\lambda$  sind möglich. Mit der Ansatzfunktion nach Gl. (1) gewinnt man so

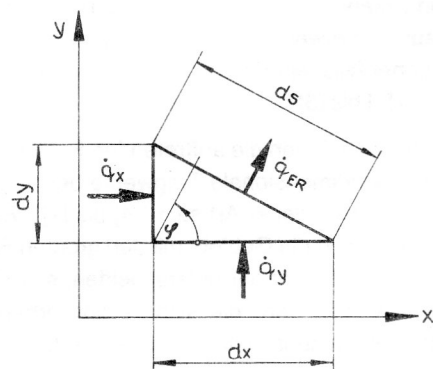
$$\underline{\dot{q}}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\underline{A}^{(e)} \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)}. \quad (14)$$

### 4. FEM-Randwärmestromdichte und FEM-Ergiebigkeit der Wärmequelle

An einem um den Winkel  $\varphi$  gedrehten Randstück (Bild 2) bestimmt man aus dem Vektor der Wärmestromdichten nach Gl. (14) eine *Randwärmestromdichte*

$$\begin{aligned} \underline{\dot{q}}_{ER}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [\cos \varphi; \sin \varphi] \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \underline{t}_R^T \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \quad (15)$$

Speziell an dem Elementrand  $\xi_1 = 0$  ergibt sich für isotropes Material als *FEM-Randwärmestromdichte am Elementrand*  $\xi_1 = 0$



**Bild 2**  
Randwärmestromdichte am gedrehten Randstück

$$\dot{q}_{ER1}^{(e)} = \frac{\lambda^{(e)}}{l_1} [\xi_2^2; \xi_3^2; \xi_2, \xi_3] \underline{Q}^{(e)} \underline{z}^{(e)} \quad (16)$$

und an den Elementrändern  $\xi_2 = 0$  bzw.  $\xi_3 = 0$  nach zyklischer Vertauschung

$$\dot{q}_{ER2}^{(e)} = \frac{\lambda^{(e)}}{l_2} [\xi_3^2; \xi_1^2; \xi_3, \xi_1] \underline{Q}^{(e)} \underline{z}^{(e)} \quad (17)$$

bzw.

$$\dot{q}_{ER3}^{(e)} = \frac{\lambda^{(e)}}{l_3} [\xi_1^2; \xi_2^2; \xi_1, \xi_2] \underline{Q}^{(e)} \underline{z}^{(e)}. \quad (18)$$

Die Geometrie-Matrizen  $\underline{Q}^{(e)}$  ( $i \cong 1, 2, 3$ ) enthalten die geometrischen Abmessungen des Elements  $e$ .

Mit dem Differentialoperator-Vektor (7) lautet die Wärmebilanzgleichung in einem Gebiet

$$\underline{d}^T \dot{q}(x, y) + 2 \frac{\alpha_o}{h} [\vartheta(x, y) - \vartheta_o(x, y)] - W(x, y) = 0. \quad (19)$$

Dabei sind

$\alpha_o$ : der Wärmeübergangskoeffizient an Flächen  
 $z = \text{konst.}$ ,

$h$ : die Scheibendicke,

$T_o = \vartheta_o + \bar{T}_o$ : die Umgebungstemperatur,

$W$ : die Ergiebigkeit der Wärmequelle in einem Gebiet.

Diese Wärmebilanzgleichung ist i. a. für die exakte Ergiebigkeit der Wärmequelle  $W(x, y)$  und den Vektor der Wärmestromdichten  $\dot{q}^{(e)}(x, y)$  infolge der Ansatzfunktion (1) nicht erfüllt, aber es läßt sich für jedes Element  $e$  eine FEM-Ergiebigkeit der Wärmequelle im Element  $e$  ermitteln, die dieser Forderung genügt. Man gewinnt sie mit dem Vektor der Wärmestromdichten Gl. (14) aus Gl. (19) zu

$$\begin{aligned} W_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & - \underline{d}^T \underline{A}^{(e)} \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \\ & + 2 \frac{\alpha_o^{(e)}}{h^{(e)}} [f^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{z}^{(e)} - \vartheta_o(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \end{aligned} \quad (20)$$

und nach Ausführung der notwendigen Differentiationen für isotropes Material

$$\begin{aligned} W_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = & - \lambda^{(e)} \underline{w}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \\ & + 2 \frac{\alpha_o^{(e)}}{h^{(e)}} [f^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{z}^{(e)} - \vartheta_o(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]. \end{aligned} \quad (21)$$

Dabei sind wiederum  $\underline{P}^{(e)}$  eine Geometrie-Matrix und

$$\underline{w}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\xi_1; \xi_2; \xi_3]^T. \quad (22)$$

## 5. Fehlerergiebigkeiten der Wärmequelle und Fehlerwärmestromdichten

Wie bereits in Abschnitt 2. erwähnt, ist die aus der FEM-Analyse folgende Ansatzfunktion  $\vartheta^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  gegenüber der exakten Temperaturverteilung  $\vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  nur eine Näherungslösung, die zwar die wesentlichen Randbedingungen exakt erfüllt, aber zu einer Wärmestromdichte führt, die ebenfalls nur eine Näherung gegenüber der exakten darstellt. Es liegt nun nahe, eine Fehlerverteilung

$$\vartheta_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \vartheta^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \vartheta(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (23)$$

einzuführen, die nur dann verschwindet, wenn die Näherungslösung mit der exakten Lösung übereinstimmt. Das

wird nur in ganz wenigen Spezialfällen eintreten. Im allgemeinen findet man über den Vektor des Fehlererergiebigkeiten [Gl. (9)]

$$\begin{aligned} \underline{\gamma}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \underline{\gamma}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \underline{\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (24) \\ &= \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \underline{\gamma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned}$$

einen Vektor der Fehlerwärmestromdichten [Gl. (14)]

$$\begin{aligned} \dot{q}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \dot{q}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (25) \\ &= - \underline{A}^{(e)} \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned}$$

dem aus der Wärmebilanzgleichung am finiten Element [Gl. (19)] eine Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element  $e$  [Gl. (21)]

$$\begin{aligned} W_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= W_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= - \lambda^{(e)} \underline{w}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \\ &+ 2 \frac{\alpha_o^{(e)}}{h^{(e)}} [f^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{z}^{(e)} - \\ &- \vartheta_o(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] - W(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (26)$$

zugeordnet werden kann.

Neben der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle sind auch zwischen den Elementen bzw. an freien Elementrändern Fehlerwärmestromdichten vorhanden, die ihre Ursache in der nicht übereinstimmenden Bilanz der Wärmestromdichten an den Rändern zweier zusammenstoßender Elemente bzw. in der Nichtübereinstimmung der FEM-Randwärmestromdichten mit vorgeschriebenen Wärmestromdichten haben.

Betrachtet man den Elementrand  $\xi_1 = 0$  des Elements  $e$  bzw. den Elementrand  $\xi_j = 0$  des Elements  $e'$  (Bild 3), so gelten die geometrischen Beziehungen

$$b_j' = -x_2' + x_3' = -b_1 = x_2 - x_3,$$

$$c_j' = y_2' - y_3' = -c_1 = -y_2 + y_3,$$

$$\xi_2 + \xi_3 = 1; \quad \xi_3 = 1 - \xi_2; \quad \xi_2 = \xi_3',$$

$$\xi_2' + \xi_3' = 1; \quad \xi_2' = 1 - \xi_3' = 1 - \xi_2 = \xi_3, \quad (27)$$

$$l_j^{(e)} = l_j^{(e')}.$$

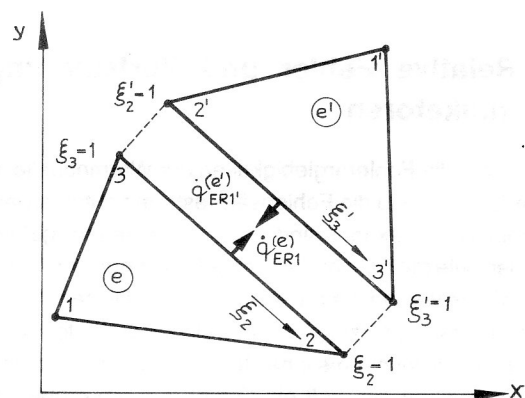


Bild 3  
Innerer Elementrand

Da weiterhin  $z_2 = z_3'$  und  $z_3 = z_2'$  sind, definiert man zunächst eine *FEM-Differenzrandwärmestromdichte am Elementrand*  $\xi_1 = 0$

$$\dot{q}_{bR1}^{(e)} = \dot{q}_{eR1}^{(e)} + \dot{q}_{e'R1}^{(e')}, \quad (28)$$

die mit Gl. (16) für gleiche Wärmeleitkoeffizienten in den zusammenstoßenden Elementen die Form

$$\dot{q}_{bR1}^{(e)} = \frac{\lambda^{(e)}}{l^{(e)}} \xi_2 \xi_3 (\underline{h}_1^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}_1^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) \quad (29)$$

annimmt. [Die Vektoren  $\underline{h}_i^{(e)}$  ( $i \in 1, 2, 3$ ) sind Teilvektoren der Größen  $\underline{Q}^{(e)}$  ( $i \in 1, 2, 3$ ) in den Gln. (16) – (18).] Es ist ersichtlich, daß diese FEM-Differenzrandwärmestromdichte eine symmetrische quadratische Parabel ist, die jeweils in der Mitte der Elementränder ihr Maximum besitzt und an den Eckpunkten Null ist. Damit wird es für diesen Ansatz *nie* möglich sein, an einem im Inneren des vernetzten Kontinuums liegenden Knoten eine von Null verschiedene vorgegebene Wärmestromdichte durch die Differenzbildung der Randwärmestromdichten an diesem Knoten zu erhalten. An einem äußeren Rand gibt es keine Differenzbildung, so daß dort auch an einem Knoten eine äußere Wärmestromdichte vorhanden sein kann.

Die gesuchte *Fehlerwärmestromdichte am Elementrand*  $\xi_1 = 0$  ermittelt man nun zu

$$\dot{q}_{fR1}^{(e)}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) = \dot{q}_{bR1}^{(e)}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) - \dot{q}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) \quad (30)$$

$$= \frac{\lambda^{(e)}}{l^{(e)}} \xi_2 \xi_3 (\underline{h}_1^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}_1^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) - \dot{q}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3),$$

bzw. für die Elementränder  $\xi_2 = 0$  und  $\xi_3 = 0$  des Elements  $e$

$$\dot{q}_{fR2}^{(e)}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) = \dot{q}_{bR2}^{(e)}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) - \dot{q}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) \quad (31)$$

$$= \frac{\lambda^{(e)}}{l_2^{(e)}} \xi_3 \xi_1 (\underline{h}_2^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}_2^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) - \dot{q}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3)$$

und

$$\dot{q}_{fR3}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) = \dot{q}_{bR3}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) - \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) \quad (32)$$

$$= \frac{\lambda^{(e)}}{l_3^{(e)}} \xi_1 \xi_2 (\underline{h}_3^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}_3^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) - \dot{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0).$$

## 6. Relative Fehler und Verfeinerungsindikatoren

Nachdem die Fehlerergiebigkeiten der Wärmequelle in jedem Element und die Fehlerwärmestromdichten an jedem Elementrand bekannt sind, muß ein Kriterium gefunden werden, wie mit Hilfe dieser Fehlerfunktionen ein *Verfeinerungsindikator* bestimmt werden kann. Dieser Verfeinerungsindikator soll angeben, in welchen Gebieten des untersuchten Kontinuums eine Netzverfeinerung erforderlich ist. Es leuchtet ein, daß ein Fehler dort am größten sein wird, wo eine große Fehlerfunktion vorhanden ist. Berechnet man also eine *Norm* (absolute Größe) der Fehlerfunktionen in jedem Element und an jedem Elementrand, dann

stellt die Summe der Quadrate aller dieser Normen den *Gesamtfehler* im vorliegenden Gebiet dar.

Das Verhältnis des auf den Elementbereich bezogenen Quadrates der Norm jedes Elements (*Elementdurchschnittsfehler*) zum auf den Gesamtbereich bezogenen Gesamtfehler (*Gesamtdurchschnittsfehler*) liefert dann ein Maß zur Verteilung des Gesamtfehlers. Allerdings gibt diese Vorgehensweise nur die *relativen Fehler* an und besagt nichts über die *absoluten Fehler* in der FEM-Analyse. Dazu müssen andere Kriterien eingesetzt werden.

Als eine brauchbare Näherung für derartige Fehleruntersuchungen hat sich die sogenannte *L<sub>2</sub>-Norm* erwiesen. Man erhält sie für eine Funktion  $f(x, y)$  in einem vorgeschriebenen Gebiet  $\Omega$  aus

$$\|e\|_0 = \left[ \int_{\Omega} f^2(x, y) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Unter der Voraussetzung elementweise konstanter Elementdicke  $h^{(e)}$  lauten die *L<sub>2</sub>-Normen der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element e* nach Gl. (20) und Gl. (26)

$$\begin{aligned} \|e_w^{(e)}\|_0 &= \left[ h^{(e)} \int_{A^{(e)}} W_f^{(e)2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA \right]^{1/2} \\ &= \left\{ h^{(e)} \int_{A^{(e)}} \left[ \lambda^{(e)} \underline{w}_3^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} - 2 \frac{\alpha b^{(e)}}{h^{(e)}} (f^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \vartheta_0) + W \right]^2 dA \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Bei der *Fehlerwärmestromdichte* geht man in analoger Weise vor. Die den Sprüngen der Wärmestromdichten zwischen zwei zusammenstoßenden Elementen entsprechenden Wärmestromdichten sind in den Gln. (30) – (32) bereitgestellt. Ihre *L<sub>2</sub>-Normen der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* betragen

$$\begin{aligned} \|e_{q1}\|_0 &= \left[ h_{11} \int q_{fR1}^{(e)2}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) ds \right]^{1/2} \\ &= \left\{ h_{11} \int \left[ \frac{\lambda_1}{l_1} \xi_2 \xi_3 (\underline{h}_1^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}_1^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) - q(\xi_1 = 0) \right]^2 ds \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

**[Anmerkung:** In Gl. (35) wird angenommen, daß der Rand  $k$  zwischen den Elementen  $e$  und  $e'$  der Rand  $\xi_1 = 0$  des Elementes  $e$  ist. Dieser Rand besitzt die (konstante) Elementdicke  $h_{11}$  und den (evtl. zwischen den Elementen  $e$  und  $e'$  gemittelten) Wärmeleitkoeffizienten  $\lambda_1$ .]

Mit den Quadraten der *L<sub>2</sub>-Normen* in den Gln. (34) und (35) definiert man einen *Gesamtfehler der Fehlerergiebigkeiten der Wärmequelle*

$$f_w = \sum_e \|e_w^{(e)}\|_0^2 \quad (e: \text{alle Elemente}) \quad (36)$$

und einen *Gesamtfehler der Fehlerwärmestromdichten*

$$f_q = \sum_n \|e_{qn}\|_0^2 \quad (n: \text{alle Elementränder}). \quad (37)$$

Die *relativen Gesamtdurchschnittsfehler* sind dann

$$\frac{f_w}{\sum_e h^{(e)} A^{(e)}} = \frac{\sum_e \|e_w^{(e)}\|_0^2}{\sum_e h^{(e)} A^{(e)}}, \quad (38)$$

$$\frac{f_{\dot{q}}}{\sum_n h_n l_n} = \frac{\sum_n \|e_{\dot{q}n}\|_0^2}{\sum_n h_n l_n} \quad (39)$$

Schließlich findet man die *relativen Elementdurchschnittsfehler der Fehlerergiebigkeiten der Wärmequelle im Element e* zu

$$f_{wr}^{(e)} = \frac{\|e_w^{(e)}\|_0^2 \sum_e h^{(e)} A^{(e)}}{h^{(e)} A^{(e)} \sum_e \|e_w^{(e)}\|_0^2} \quad (e: \text{alle Elemente}) \quad (40)$$

und die *relativen Randdurchschnittsfehler der Fehlerwärmestromdichten am Elementrand k* zu

$$f_{qrk} = \frac{\|e_{\dot{q}k}\|_0^2 \sum_n h_n l_n}{h_k l_k \sum_n \|e_{\dot{q}n}\|_0^2} \quad (k, n: \text{alle Elementränder}). \quad (41)$$

Diese relativen Elementdurchschnittsfehler und Randdurchschnittsfehler können auch als die gesuchten *Verfeinerungsindikatoren* angesehen werden. Für alle Vernetzungsbereiche, deren Verfeinerungsindikatoren z.B. Werte  $f_{wr}^{(e)} > 1.0$  bzw.  $f_{qrk} > 1.0$  liefern, ist eine Netzverfeinerung zu empfehlen. Bereiche mit Verfeinerungsindikatoren  $< 1.0$  bedürfen dann zunächst keiner Korrektur.

## 7. Absolute Fehler

Um den absoluten Fehler einer FEM-Berechnung angeben zu können, müßte man die exakte Lösung des betrachteten Problems kennen. Da dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird, muß man die Erfüllung gewisser natürlicher Randbedingungen zu Hilfe nehmen. In dem vorliegenden FEM-Programm E87E der Bergakademie Freiberg werden die wesentlichen Randbedingungen durch die Vorgabe von Knotenvektorkomponenten ( $T_j$ ,  $T_{ixj}$ ,  $T_{iyj}$  an vorgeschriebenen Punkten) exakt erfüllt. Demzufolge stehen zur Fehlerabschätzung erstens noch vorgeschriebene Wärmestromdichten an Elementrändern bzw. vorgeschriebene Wärmeübergänge an Elementrändern zur Verfügung, wobei die aus der FEM-Analyse folgenden Funktionsverläufe mit gegebenen Werten verglichen werden können. Das ist aber nicht immer möglich, da bei vielen Problemen keine Wärmestromdichten bzw. keine Wärmeübergänge festgelegt sind oder deren Größe im Vergleich zum Einfluß anderer Temperaturgrößen (Ergiebigkeit der Wärmequelle in Flächen bzw. Punkten) vernachlässigbar ist. Auch ist zweitens das Verhältnis zwischen berechneter FEM-Ergiebigkeit der Wärmequelle und vorgeschriebener Ergiebigkeit der Wärmequelle nur als Fehlerkriterium heranzuziehen, wenn es eine solche Beanspruchungsart gibt. Man wird daher nach anderen Möglichkeiten suchen müssen, um eine brauchbare Abschätzung des absoluten Fehlers zu erhalten.

In dem Datenausdruck des FEM-Programms E87E erscheint in jedem Knoten  $j$  des Kontinuums die Temperatur  $T_j$  und ihre partiellen Ableitungen  $T_{ixj}$  und  $T_{iyj}$ . Daraus läßt sich leicht nach Gl. (12) der Vektor der Wärmestromdichten im Knoten  $j$

$$\underline{\dot{q}}_j = [\dot{q}_{xj}; \dot{q}_{yj}]^T = -\lambda [T_{ixj}; T_{iyj}]^T = -\lambda [\vartheta_{ixj}; \vartheta_{iyj}]^T \quad (42)$$

bestimmen. Die maximale bei einem Problem auftretende Wärmestromdichte  $\dot{q}_{\max}$  oder – um den Einfluß einzelner sehr hoher Werte in einzelnen Knoten auszuschließen – der Durchschnittswert der höchsten in dem Kontinuum berechneten Wärmestromdichten (deren Anzahl festgelegt werden muß) wird als *Bezugswärmestromdichte*  $\dot{q}^*$  bestimmt. Zu dieser Bezugswärmestromdichte werden in das Verhältnis gesetzt

1. die gemittelte Fehlerwärmestromdichte in jedem Element,
2. die gemittelte Fehlerwärmestromdichte an jedem inneren Elementrand,
3. die gemittelte Fehlerwärmestromdichte an jedem äußeren Elementrand.

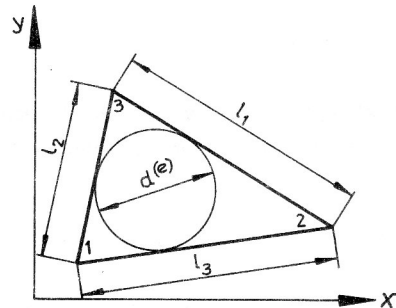
Die Berechnung einer Fehlerwärmestromdichte in jedem Element  $e$  [Gl. (25)] ist nicht möglich, da zwar die Wärmestromdichte aus der FEM-Ergiebigkeit der Wärmequelle bekannt ist [Gl. (14)], die exakte Wärmestromdichte aber nicht. Deshalb wird aus der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element  $e$  nach Gl. (26) ein resultierender Wärmestrom bestimmt und dieser dann auf eine *repräsentative Fläche* jedes Elements bezogen. Dieser Wert stellt die *gemittelte Wärmestromdichte infolge der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element e* dar.

Den *resultierenden Wärmestrom der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element e* findet man zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_w^{(e)} &= h^{(e)} \int_{A^{(e)}} W_f^{(e)} dA \\ &= \frac{1}{60} (10 h^{(e)} \lambda^{(e)} \underline{r}_{w\lambda}^{(e)T} + \alpha_0^{(e)} A^{(e)} \underline{r}_{w\alpha}^{(e)T}) \underline{z}^{(e)} - \\ &\quad - \int_{A^{(e)}} (h^{(e)} W + 2 \alpha_0^{(e)} \vartheta_o) dA, \end{aligned} \quad (43)$$

wobei sich die Vektoren  $\underline{r}_{w\lambda}^{(e)}$  und  $\underline{r}_{w\alpha}^{(e)}$  durch Integration entsprechender Teile von Gl. (20) über die Elementfläche ergeben.

Für die Wahl der repräsentativen Flächen  $\dot{A}^{(e)}$  bestehen verschiedene Möglichkeiten [7]. Es wird vorgeschlagen, diese Fläche aus der Elementdicke  $h^{(e)}$  und dem Durchmesser  $d^{(e)}$  des dem Dreieck eingeschriebenen Inkreises zu bilden (Bild 4).



**Bild 4**  
Repräsentative Fläche



Mit

$$\tilde{A}^{(e)} = h^{(e)} \sqrt{\frac{(-l_1 + l_2 + l_3)(l_1 - l_2 + l_3)(l_1 + l_2 - l_3)}{l_1 + l_2 + l_3}} \quad (44)$$

nehmen die gesuchten *gemittelten Wärmestromdichten infolge der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element e* dann den Wert

$$\dot{q}_{wF}^{(e)} = \frac{\dot{Q}_w^{(e)}}{\tilde{A}^{(e)}} \quad (e: \text{alle Elemente}) \quad (45)$$

an.

Im Vergleich mit der Bezugswärmestromdichte  $\dot{q}^*$  ergeben sich die *prozentualen absoluten Elementdurchschnittsfehler der Fehlerergiebigkeit der Wärmequelle im Element e*

$$f_{wF}^{(e)} = \frac{\dot{q}_{wF}^{(e)}}{\dot{q}^*} 100 \% \quad (e: \text{alle Elemente}). \quad (46)$$

Die gemittelte Wärmestromdichte an jedem inneren Elementrand wird ebenfalls aus einem resultierenden Wärmestrom und der Seitenfläche des Dreiecks gebildet. Der *resultierende Wärmestrom der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* zwischen den Elementen  $e$  und  $e'$  folgt nach Gl. (30) für den Fall, daß der Elementrand  $k$  mit einem Elementrand  $\xi_i = 0$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) des Elements  $e$  zusammenfällt, zu

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\dot{q}k} &= h_k \int_k \dot{q}_{FR}^{(e)}(\xi_i = 0) ds \\ &= h_k \left[ -\frac{\lambda_k}{\delta l_k} (\underline{h}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \underline{h}^{(e')T} \underline{z}^{(e')}) - \int_k \dot{q}(\xi_i = 0) ds \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

[In Gl. (47) ist wiederum die Anmerkung hinter Gl. (35) zu beachten. Die Vektoren  $\underline{h}^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) entstehen durch Integration entsprechender Funktionen in den Gln. (30) bis (32) über die Randlänge.]

Mit der Fläche des Elementrandes

$$A_k = h_k l_k \quad (k: \text{alle Elementränder}) \quad (48)$$

findet man die gesuchten *gemittelten Wärmestromdichten infolge der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* in der Form

$$\dot{q}_{\dot{q}k} = \frac{\dot{Q}_{\dot{q}k}}{A_k} = \frac{\dot{Q}_{\dot{q}k}}{h_k l_k} \quad (k: \text{alle Elementränder}). \quad (49)$$

Die *prozentualen absoluten Randdurchschnittsfehler der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* besitzen die Größe

$$f_{\dot{q}k} = \frac{\dot{q}_{\dot{q}k}}{\dot{q}^*} 100 \% \quad (k: \text{alle Elementränder}). \quad (50)$$

Schließlich wird die gemittelte Wärmestromdichte an einem äußeren Rand aus einem resultierenden Wärmestrom und der Seitenfläche des Dreieckselements gebildet. Der *resultierende Wärmestrom der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* nimmt mit Gl. (16) bis Gl. (18), Gl. (30) bis Gl. (32) und der Voraussetzung, daß der Elementrand  $k$  mit einem Elementrand  $\xi_i = 0$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) identisch ist, die Form

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{\dot{q}k} &= h_k \int_k \dot{q}_{FR}^{(e)}(\xi_i = 0) ds \\ &= h_k \left[ -\frac{\lambda_k}{\delta l_k} \underline{r}_{\dot{q}k}^T \underline{z}^{(e)} - \int_k \dot{q}(\xi_i = 0) ds \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

an. [Die Vektoren  $\underline{r}_{\dot{q}k}$  entsprechen am äußeren Elementrand  $k$  den Vektoren  $\underline{h}^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) in Gl. (47), die für innere Elementränder gültig sind.]

Die *gemittelten Wärmestromdichten infolge der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* und die *prozentualen absoluten Randdurchschnittsfehler der Fehlerwärmestromdichte am Elementrand k* erhält man aus den Gln. (49) und (50).

## 8. Zusammenfassung

In dem Beitrag wird gezeigt, wie bei der Lösung von Problemen der ebenen stationären Wärmeleitung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente Vernetzungsfehler bereits nach dem ersten Rechenlauf erkannt werden können. Dazu stehen für jedes Element Fehlerwärmestromdichten bzw. für jeden Elementrand Fehlerwärmestromdichten zur Verfügung, die sich aus der Differenz zwischen den zum Lösungsvektor  $\underline{z}$  des Problems gehörenden „exakten“ FEM-Funktionen und den vorgeschriebenen Beanspruchungen ergeben. Über die  $L_2$ -Norm dieser Fehlerfunktionen folgen relative Fehler. Mittels einer Bezugswärmestromdichte bestimmt man absolute Fehler in jedem Element und an jedem Elementrand.

### LITERATUR

- [1] Babuska, I.: „The self adaptive approach in finite element methods“. In: *The Mathematics of Finite Elements and Applications*. MAFELAP 1975, J. R. Whiteman (ed.), Acad. Press New York 1976.
- [2] Babuska, I.; W. C. Rheinboldt: „Error estimates for adaptive finite elements computations“. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 15(1978), No. 4.
- [3] Babuska, A. Miller: „A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method“. *Univ. of Maryland, Inst. f. Physic. Sci. and Tech., Tech. Note BN-968*, 1981.
- [4] Brendler, H.: „Kontrolle der Elementgröße bei FEM-Programmen“. *Dipl.-Arbeit TU Dresden* 1981.
- [5] Hartmann, F., S. Pickhardt: „Der Fehler bei finiten Elementen“. *Bauingenieur* 60(1985), S. 463–468.
- [6] Altenbach, J., R. Mücke: „Testung von Fehlerindikatoren für Finite-Element-Lösungen der linearen Elastizitätstheorie“. *Technische Mechanik* 11(1990), H. 1, S. 49–54.
- [7] Franeck, H., Wulf, H.: „Beitrag zur Abschätzung von FEM-Vernetzungsfehlern in Scheibentragwerken“. *Technische Mechanik* 12(1991), H. 3, S.
- [8] Franeck, H., R. Hoffmann, M. Zille: „Berechnung ebener Probleme der linearen Elastizitätstheorie und der stationären Wärmeleitung“. *Anwenderhandbuch E87E*, Bergakademie Freiberg 1989.
- [9] Kämml, G., H. Franeck: „Einführung in die Methode der finiten Elemente“. 2. Auflage 1990, VEB Fachbuchverlag Leipzig.

### Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Franeck  
Bergakademie Freiberg  
Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik  
Institut für Mechanik und Maschinenelemente  
O-9200 Freiberg