TECHNISCHE MECHANIK 12 (1991) Heft 4
Manuskripteingang: 10. 09. 1991

Zur elastisch-plastischen Zylinderschale unter Innendruck

Udo Gamer

Es wird ein Verfahren angegeben, welches bei geringem numerischen Aufwand die Berechnung von Spannungen und Verschiebungen im elastisch-plastischen Hohlzylinder mit beliebig nichtlinearer isotroper Verfestigung ermöglicht. Zwischen dem plastischen und dem elastischen Betrieb gibt es keinen formalen Unterschied.

A procedure for the determination of the distribution of stress and displacement in a cylindrical shell with arbitrarily nonlinear isotropic hardening is given. Minor numerical calculations need be made only. No formal distinction between plastic and elastic region appears.

1. Einleitung

Das Problem des elastisch-idealplastischen Hohlzylinders unter Innendruck für den ebenen Verzerrungszustand und die verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustände der offenen und geschlossenen Rohrenden wurde mit Hilfe der Trescaschen Fließbedingung und der zugeordneten Fließregel streng gelöst durch Koiter [1]. Einige Zeit später verallgemeinerte Bland [2] die Fragestellung auf sich verfestigendes Material und ergänzte die Belastung durch den Außendruck und eine Temperaturdifferenz zwischen Innen- und Außenrand. Seine vorbildliche und umfassende Behandlung wird nur wenig beeinträchtigt durch die heutzutage als unrichtig angesehene zu der von Misesschen Fließbedingung passende Ermittlung der plastischen Vergleichsdehnung. Für die Erfassung nichtlinearer isotroper Verfestigung schlägt Bland eine inverse Methode vor, bei deren numerischer Auswertung man die plastische Vergleichsdehnung am Innenrand des Hohlzylinders annimmt und daraus zunächst den elastisch-plastischen Grenzradius und schließlich den Innendruck berechnet. Erforderlich ist dabei die numerische Differentiation der gemessenen Verfestigungskurve sowie eine numerische Integration.

Da die plastische Dehnung für den Ingenieur weniger anschaulich ist, wurde vom Autor ein anderer ebenfalls inverser Weg angegeben, welcher seinen Ausgangspunkt bei dem Verhältnis von elastisch-plastischem Grenzradius und Außenradius nimmt [3]. Dieses ist eine leicht faßliche Größe, welcher man einen nicht zu überschreitenden Höchstwert vorschreiben kann. Daraus ergibt sich dann der zulässige Innendruck. Der numerische Aufwand beläuft sich auf die Inversion einer Funktion sowie eine sich anschließende Integration. Die Inversion erweist sich als unnötig, wenn man sich nur für die Spannungen an diskreten Stellen, z. B. für die Umfangsspannung am Innenrand interessiert [4]. Die unbestimmte Integration ist nur einmal erforderlich; ihr Ergebnis läßt sich auf Kesselwände unterschiedlichen Plastizierungsgrades oder Radienverhältnisses anwenden.

In der vorliegenden Behandlung des Hohlzylinders werden nach der Vorgangsweise von Megahed [5], [6] die Spannungen durch die plastische Dehnung ausgedrückt. Diese haben in der gesamten Schale einheitliche Formen; die Unterscheidung zwischen elastischem und plastischem Bereich entfällt. Die gefundenen Ergebnisse gelten für die elastische, die teilplastizierte und die vollplastizierte Zylinderschale gleichermaßen.

Die Darlegung beschränkt sich auf den in der Praxis wichtigsten Fall des zylindrischen Behälters; sie trifft aber teilweise auch auf andere Endbedingungen zu oder läßt sich leicht für solche abwandeln.

2. Die Grundgleichungen des ebenen Verzerrungszustandes

Für kleine Dehnungen, $\varepsilon_{ij} << 1$, verallgemeinerten ebenen Verzerrungszustand, ε_z konstant, Unabhängigkeit von der Umfangsrichtung, $\partial/\partial\varphi = 0$, plastische Inkompressibilität, $d\varepsilon^p_{ii} = 0$, und Fehlen von plastischer Dehnung in axialer Richtung, $d\varepsilon^p_z = 0$, lauten die allgemeinen Ausdrücke für Spannungen, Verschiebung und plastische Dehnungen in üblicher Notation

$$\sigma_r = C - \frac{D}{r^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \int \frac{\varepsilon^p_r}{r} dr, \tag{2.1}$$

$$\sigma_\varphi = C + \frac{D}{r^2} + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\int \frac{\varepsilon^p_r}{r} dr + \varepsilon^p_r \right), \tag{2.2}$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\varphi) + E\varepsilon_z, \tag{2.3}$$

$$Eu = (1+\nu)(1-2\nu)\sigma_r r + 2(1-\nu^2)\frac{D}{r} - \nu E\varepsilon_z r, \tag{2.4}$$

$$E\varepsilon^p_r = -E\varepsilon^p_\varphi = (1-\nu^2)\left(\sigma_\varphi - \sigma_r - \frac{2D}{r^2}\right). \tag{2.5}$$

Bei elastischem Verhalten addieren sich die drei Summanden in den plastischen Dehnungen zu Null. Da eine axiale plastische Dehnung nur in besonders dickwandigen Kesseln auftreten kann [1], ist die oben getroffene Voraussetzung keine schwerwiegende Einschränkung der Allgemeinheit.

3. Der Zylinderbehälter

Zu ermitteln sind die Integrationskonstanten C und D, die Axialdehnung ε_z und vor allem die Abhängigkeit der plastischen Dehnungen vom Radius. Der Innendruck verursacht eine positive Umfangsspannung und eine nichtpositive Radialspannung. Nach der Trescaschen Fließbedingung gilt

$$\sigma_Y = \sigma_\varphi - \sigma_r. \tag{3.1}$$

Bei isotroper Verfestigung ist die nur im plastischen Bereich, $r < z$, *definierte Fließspannung* σ_Y eine monoton wachsende Funktion der plastischen Vergleichsdehnung,

$$\sigma_Y = \hat{\sigma}_Y(\varepsilon_{EQ}) \tag{3.2}$$

mit $\sigma_o = \hat{\sigma}_Y(0)$. Aus der Äquivalenz des plastischen Arbeitsinkrements ergibt sich

$$\varepsilon_{EQ} = \varepsilon^p_\varphi = -\varepsilon^p_r. \tag{3.3}$$

Das Verschwinden der plastischen Dehnungen (2.5) an der elastisch-plastischen Grenze, $r = z$, führt zu

$$D = \frac{1}{2}\sigma_o z^2. \tag{3.4}$$

Damit folgt aus (2.5)

$$\bar{\varepsilon}_{EQ} = (1-\nu^2)\left(\frac{1}{\varrho^2} + \bar{\sigma}_r - \bar{\sigma}_\varphi\right), \tag{3.5}$$

wo $\bar{\varepsilon}_{EQ} := E\varepsilon_{EQ}/\sigma_o$, $\bar{\sigma}_{ij} := \sigma_{ij}/\sigma_o$ und $\varrho := r/z$ bedeutet.

Durch (3.1), (3.2) und (3.5) ist die Abhängigkeit der plastischen Dehnungen vom Radius festgelegt; die Wahl von z als Bezugsradius macht diese Funktion unabhängig vom Radienverhältnis der Schale und von ihrem Plastizierungsgrad.

Die Bedingung der Spannungsfreiheit am Außenrand, $r = b$, liefert

$$C = \frac{1}{2}\sigma_o\frac{z^2}{b^2} + \frac{E}{1-\nu^2}\int_l^b \frac{\varepsilon_{EQ}}{r}\,dr. \tag{3.6}$$

l ist eine untere Integrationsgrenze. Somit erhält man die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{1}{1-\nu^2}\int_\varrho^\beta \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi, \tag{3.7}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\beta^2}\right) + \frac{1}{1-\nu^2}\left(\int_\varrho^\beta \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi - \bar{\varepsilon}_{EQ}\right) \tag{3.8}$$

mit $\beta := b/z$. Die Auswertung dieser Formeln beginnt mit der Festlegung des Plastizierungsgrades durch die Wahl von β. Das unbestimmte Integral $\int(\bar{\varepsilon}_{EQ}/\varrho)\,d\varrho$ mit der oberen Grenze 1 muß nur einmal berechnet werden; das Ergebnis der Integration läßt sich auf Zylinderschalen von verschiedenem Radienverhältnis und Plastizierungsgrad anwenden. Am Innenrand, $r = a$, ist die Radialspannung gleich dem negativen Druck p. Diese Bedingung ergibt den Zusammenhang zwischen dem Innendruck und dem elastisch-plastischen Grenzradius,

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) - \frac{1}{1-\nu^2}\int_\alpha^\beta \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi, \tag{3.9}$$

wo $\bar{p} := p/\sigma_o$ und $\alpha := a/z$ bedeutet. In die bisherige Rechnung ist die Bedingung für die Endquerschnitte des Rohrs nicht eingegangen; ε_z ist noch offen. Die vorstehenden Ergebnisse gelten gleichermaßen für die elastische Schale,
$z \leqslant a$, die teilplastizierte Schale, $a < z < b$, wie auch für die vollplastizierte Schale, $z \geqslant b$. Im ersteren und im letzteren Falle ist z eine Rechengröße.

Wenn die Funktion $\bar{\varepsilon}_{EQ} = \tilde{\bar{\varepsilon}}_{EQ}(\varrho)$ sich nicht geschlossen darstellen läßt, kann man auf

$$\varrho = \left[\frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{1-\nu^2} + \hat{\bar{\sigma}}_Y(\bar{\varepsilon}_{EQ})\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{3.10}$$

zurückgreifen und über $\bar{\varepsilon}_{EQ}$ integrieren [4]. Partielle Integration ergibt

$$\int_\varrho^\beta \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi = \bar{\varepsilon}_{EQ}(\beta)\log\beta - \bar{\varepsilon}_{EQ}\log\varrho + \int_{\bar{\varepsilon}_{EQ}(\beta)}^{\bar{\varepsilon}_{EQ}} \log\varrho\, d\eta. \tag{3.11}$$

Bei Teilplastizierung reduziert sich diese Beziehung auf

$$\int_\varrho^1 \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi = -\bar{\varepsilon}_{EQ}\log\varrho + \int_0^{\bar{\varepsilon}_{EQ}} \log\varrho\, d\eta. \tag{3.12}$$

Zweckmäßig ist diese Vorgangsweise dann, wenn die Spannungen nicht in der gesamten Zylinderwand, sondern nur z. B. am Innenrand berechnet werden sollen.

Für den Behälter mit geschlossenen Enden gilt die Bedingung

$$2\pi\int_a^b \sigma_z r\,dr = \pi a^2 p. \tag{3.13}$$

Durch Einsetzen von σ_z nach (2.3) mit (3.7) und (3.8) findet man

$$E\varepsilon_z = (1-2\nu)\frac{a^2}{b^2-a^2}\,p. \tag{3.14}$$

Dieses auf den ersten Blick etwas überraschende Ergebnis, in welches das Auftreten von plastischer Deformation und damit das Verfestigungsverhalten überhaupt nicht eingeht, läßt sich leicht verifizieren, wobei nur die elastische Axialdehnung gemäß (2.3) und die Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \tag{3.15}$$

zur Anwendung kommt. Elimination von σ_φ führt auf

$$2E\varepsilon_z\int_a^b r\,dr + 2\nu\int_{-a^2p}^0 d(r^2\sigma_r) = a^2p, \tag{3.16}$$

und daraus folgt das obige Ergebnis. Nunmehr sind alle Unbekannten ermittelt.

4. Beispiel: Idealplastisches Verhalten

Im folgenden werden die allgemeinen Ergebnisse angewandt auf den teilplastizierten idealplastischen Zylinderkessel. Die Spezialisierung von (3.5) ergibt

$$\bar{\varepsilon}_{EQ} = (1-\nu^2)\left(\frac{1}{\varrho^2} - 1\right)\cdot U(1-\varrho), \tag{4.1}$$

wo

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

die Einheitssprungfunktion bezeichnet. Damit erhält man

$$\int_\varrho^\beta \frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{\xi}\,d\xi = (1-\nu^2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2} - 1\right) + \log\varrho\right]\cdot U(1-\varrho), \tag{4.2}$$

und die Spannungen

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)+\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2}-1\right)+\log\varrho\right]\cdot U(1-\varrho), \tag{4.3}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho^2}-1\right)-\log\varrho\right]\cdot U(1-\varrho). \tag{4.4}$$

Im plastischen Bereich, $\alpha \leqslant \varrho < 1$, lauten diese [8]:

$$\bar{\sigma}_r = -\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)+\log\varrho, \tag{4.5}$$

$$\bar{\sigma}_\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)+\log\varrho. \tag{4.6}$$

Sie werden verursacht durch den Druck

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)-\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^2}-1\right)+\log\alpha\right]\cdot U(1-\alpha)$$

oder (4.7)

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\beta^2}\right)-\log\alpha \tag{4.8}$$

für $\alpha \leqslant 1$. Die aufgeführten allgemeinen Ergebnisse gelten auch für die elastische Schale, $z \leqslant a$, und die vollplastizierte Schale, $z = b$. Bei idealplastischem Verhalten gibt es keinen Gleichgewichtszustand, welchem $z > b$ entspricht.

5. Beispiel: Nichtlineare Verfestigung vom Ludwik-Typ

Ein praktisch wichtiger Spezialfall des Ludwikschen Verfestigungsgesetzes, welcher eine analytische Lösung des Zylinderproblems zuläßt [9], ist

$$\bar{\sigma}_Y = 1 + H\sqrt{\bar{\varepsilon}_{EQ}}, \tag{5.1}$$

wo H den Verfestigungsparameter bedeutet. Obwohl die plastische Vergleichsdehnung nach Einsetzen von (5.1) in (3.5) sich in geschlossener Form als Funktion des Radius angeben läßt, soll hier die Integration über den Radius durch eine solche über die plastische Vergleichsdehnung ersetzt werden, wie oben besprochen.

Mit dem gewählten Verfestigungsgesetz liefert (3.10)

$$\varrho = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_{EQ}}{1-\nu^2}+H\sqrt{\bar{\varepsilon}_{EQ}}+1\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{5.2}$$

Nach längerer Rechnung kommt

$$\begin{aligned}\int \log\varrho \, d\bar{\varepsilon}_{EQ} = {} & \frac{1}{2}(\log N + 1)\varepsilon - \frac{1}{2}NH\sqrt{\varepsilon} \\ & + \frac{1}{2}\left(-\varepsilon+\frac{1}{2}N^2H^2-N\right)\log(\varepsilon+NH\sqrt{\varepsilon}+N) \\ & + \frac{1}{2}N^{\frac{3}{2}}HP\log\frac{\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{2}NH+P\sqrt{N}}{\sqrt{\varepsilon}+\frac{1}{2}NH-P\sqrt{N}} + K\end{aligned} \tag{5.3}$$

mit $\varepsilon := \bar{\varepsilon}_{EQ}$, $N := 1-\nu^2$ und $P^2 := -1+(1-\nu^2)H^2/4$.

Dem teilplastizierten Behälter entspricht die untere Integrationsgrenze $\bar{\varepsilon}_{EQ} = 0$. Nach Inversion der Funktion (5.2) erhält man die bereits früher abgeleiteten Spannungen als Funktion des Radius [9]. Es sind die drei Fälle $P^2 < 0$, $P^2 = 0$ und $P^2 > 0$ zu unterscheiden. Für den ersteren liegen numerische Ergebnisse vor.

LITERATUR

[1] Koiter, W. T.: On partially plastic thick-walled tubes. In: Biezeno Anniversary Volume. Stam, Harlem 1953, 232 – 251.

[2] Bland, D. R.: Elastoplastic thick-walled tubes of work-hardening materials subject to internal and external pressure and to temperature gradients. J. Mech. Phys. Solids 4 (1956), 209 – 229.

[3] Gamer, U.: Zum elastisch-plastischen Hohlzylinder unter Innendruck. Z. angew. Math. Mech. 68 (1988), 47 – 50.

[4] Gamer, U.: A concise treatment of the shrink fit with elastic-plastic hub. (Submitted for publication).

[5] Megahed, M. M.: Elastic-plastic behaviour of a thick-walled tube with general nonlinear hardening properties. Int. J. Mech. Sci. 32 (1990), 551 – 563.

[6] Megahed, M. M.: Elastic-plastic behaviour of spherical shells with non-linear hardening properties. Int. J. Solids Structures 27 (1991), 1499 – 1514.

[7] Gamer, U.: On the quasi-analytical solution of elastic-plastic problems with nonlinear hardening. In: Advances in Continuum Mechanics. Springer, Berlin 1991, 168 – 177.

[8] Blazynski, T. Z.: Applied elasto-plasticity of solids. Macmillan, London 1983.

[9] Gamer, U.: The effect of a special hardening law on continuity in elastic-plastic problems with rotational symmetry. Forsch. Ing.-Wes. 55 (1989), 60 – 64.

Anschrift des Verfassers:
Prof. Dr. Udo Gamer
Technische Universität Wien
Institut für Mechanik
Wiedner Hauptstraße 8 – 10
A-1040 Wien