

Berechnung dünner elastischer Platten mit finiten Elementen bei näherungsweise Befriedigung der Kompatibilitätsbedingung

Siegfried Koczyk

Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit der Berechnung dünner Platten mit Hilfe finiter Elemente. Es werden isoparametrische Viereck- bzw. Dreieckelemente mit quadratischen Ansätzen für die Biegewinkel zugrunde gelegt. Um die Verträglichkeit im Innern des Elementes zu sichern, wird die Bedingung $\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$ mit einer Penaltyzahl λ an das elastische Potential gekoppelt. Auf den Rändern des

Elementes wird in den Seitenmittelpunkten die Neigung tangential zum Rand durch die Verschiebungen w der Eckknoten ersetzt. Das aus dieser Transformation hervorgehende Plattenelement besitzt jeweils drei Freiheitsgrade in den Eckknoten und einen, nämlich die Neigung normal zum Rand, in den Seitenmittelpunkten. Die Berechnung der Durchbiegung erfolgt nur auf den Rändern des Elementes. Die Spannungen im Element ergeben sich in etwa mit der gleichen Genauigkeit wie die Durchbiegung.

The contribution deals with the calculation of thin elastic plates by the finite element method. The isoparametric quadrangular or three-cornered elements with polynomial shape functions of second order are taken as basis. For saving the compatibility in the element, the condition $\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$ is connected with the elastic potential by a penalty-factor λ . At the borders of the element is the tangential slope of the middle node replaced by the displacements w of the corner nodes. The plate element resulting from this transformation has three degrees-of-freedom on the corner nodes and one, namely the slope normal to the border, on the middle of the side. The computation of the displacement follows only at the borders of the element. The stresses in the element are nearly of the same exactness as the displacements.

1. Einleitung

Zur Berechnung dünner und dicker Platten auf der Grundlage der FEM wurden schon zahlreiche Untersuchungen durchgeführt und Rechenprogramme entwickelt. Dabei wurde sowohl elastisches als auch inelastisches, isotropes und anisotropes Materialverhalten berücksichtigt. Desgleichen gewinnen in letzter Zeit geschichtete Platten, d. h. Platten, die aus mehreren Schichten mit unterschiedlichen mechanischen Eigenschaften zusammengesetzt sind, immer mehr an Bedeutung. Die Problematik besitzt trotzdem noch immer eine große Aktualität, da sie innerhalb der Technischen Mechanik das Standardbeispiel eines Problems darstellt, bei dem C1-Stetigkeit auf den Elementrändern gefordert wird. Die praktische Bedeutung effektiver Berechnungsverfahren, die den unterschiedlichen Materialeigenschaften und Aufgabenstellungen problemlos angepaßt werden können, ist nach wie vor groß, da viele der bisher entwickelten Methoden nur unter bestimmten Voraussetzungen ein optimales Ergebnis liefern.

Die bisher bekannten Lösungsverfahren kann man folgendermaßen unterteilen [1]:

- Durch die Wahl eines Ansatzes genügend hoher Ordnung für die Durchbiegung w im Element können die Forderungen der Stetigkeit für w und der Ableitungen w_n auf den Elementrändern erfüllt werden. Die auf dieser Grundlage entwickelten Dreieckelemente mit 18 bzw. 21 Freiheitsgraden sind seit langem bekannt [2], [3]. Durch die Wahl der Durchbiegung als zu bestimmende Funktion ist die Kompatibilität im Innern eines jeden Elementes von vornherein gesichert. Die Übertragung auf Elemente beliebiger Form (isoparametrische Viereck- und Dreieckelemente) bereitet jedoch erheblich mehr Mühe und gelingt nur unter zusätzlichen einschränkenden Annahmen [1].

- Durch die Wahl unterschiedlicher Ansätze für w und die Ableitungen w_x und w_y kann man die C1-Stetigkeit auf den Rändern angrenzender Elemente sichern, allerdings ist dann die Kompatibilität im Innern des Elementes zunächst nicht mehr vorhanden, und es bedarf zusätzlicher Maßnahmen, um den notwendigen Zusammenhang zwischen der Durchbiegung und den Biegewinkeln herzustellen. Zur Lösung dieses Problems wurden ebenfalls viele Überlegungen angestellt, die man in zwei Gruppen einteilen kann.

Die erste stellt die geforderte Verbindung durch Berücksichtigung der Schubverformungen her, die durch die Querkräfte verursacht werden [4], [5], [6]. Die Verschiebungsansätze ergeben sich im allgemeinen aus einem räumlichen Element, welches durch entsprechende Vereinfachungen auf ein ebenes reduziert wird. Die hieraus resultierenden Programme zur Plattenberechnung haben eine breite Anwendung gefunden. Dies ergibt sich vor allem daraus, daß man durch Berücksichtigung der Schubverformung zusätzliche Effekte berücksichtigen kann, welche die Kirchhoffsche Plattentheorie vernachlässigt. Nachteile ergeben sich bei dünnen Platten, da dann der aus der Schubverformung resultierende Energieanteil gegenüber dem Anteil aus den Biegespannungen sehr klein wird, was zu numerischen Problemen bei der Lösung des Gleichungssystems führt. Man hilft sich in diesem Fall durch zusätzliche Korrekturfaktoren oder durch Erhöhung des Grades der Ansatzfunktionen für die Durchbiegung w gegenüber denen der Ableitungen, da die Biegewinkel φ_x und φ_y bei dünnen Platten den Bedingungen

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y \quad (1)$$

genügen müssen.

Die zweite Gruppe fordert die näherungsweise Erfüllung der Bedingungen (1), wobei auch hier unterschiedliche

Wege beschränkt wurden, die sich naturgemäß auf die dünne Platte beziehen. Man kann (1) mit Hilfe entsprechend gewählter Lagrangescher Multiplikatoren (Penalty-Zahlen) an das elastische Potential ankoppeln, dadurch deren Befriedigung näherungsweise sichern und damit gleichzeitig den notwendigen Zusammenhang zwischen der Durchbiegung und den Biege winkeln herstellen [1]. Man kann andererseits die Bedingungen (1) nur in bestimmten Punkten des Plattenelementes realisieren und dadurch ebenfalls einen Zusammenhang zwischen den Variablen der Durchbiegung und denen der Biege winkel herstellen. Hier gibt es ebenfalls viele Möglichkeiten, und es wurde eine ganze Gruppe von Elementen geschaffen, von denen das bekannteste zweifellos das von Irons stammende Semiloof-Plattenelement ist [7]. Eine Übersicht über die hier erwähnten Möglichkeiten der Plattenberechnung mit finiten Elementen, die natürlich nicht vollständig sein kann, findet sich u. a. in [1].

2. Beschreibung des Plattenelementes

Das im folgenden beschriebene Plattenelement geht auch von unterschiedlichen Ansätzen für Durchbiegung und Biege winkel aus und bezieht sich gleichfalls auf dünne Platten. Die Schubverformung wird nicht berücksichtigt. Die Elemente sind hinsichtlich ihrer geometrischen Konfiguration den isoparametrischen Elementen zuzuordnen, d. h., es handelt sich um 8-Knoten Viereck- und die daraus abgeleiteten 6-Knoten Dreieckelemente vom Serendipity Typ, die miteinander kombiniert werden können (Bild 1).

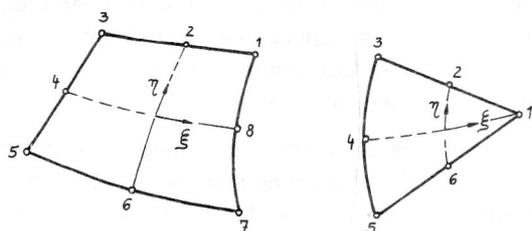


Bild 1
Isoparametrische Viereck- und Dreieckelemente

Für die Biege winkel φ_x und φ_y werden bezogen auf das lokale Koordinatensystem ξ, η des Elementes die Ansätze

$$\varphi_x = \sum_i G_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_{xi} \quad (2)$$

und

$$\varphi_y = \sum_i G_i(\xi, \eta) \cdot \varphi_{yi}$$

gemacht, mit $i = 1 \dots 8$ für Viereck- und $i = 1 \dots 6$ für Dreieckelemente. Die Koordinatenfunktionen $G_i(\xi, \eta)$ sind in der Literatur [1], [8] ausführlich beschrieben.

Mit den Ansätzen (2) kann die elastische Energie eines Plattenelementes angegeben werden.

$$W_i = \frac{1}{2} (A) \int K \left\{ \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right)^2 + 2\mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2 \right\} \cdot dA. \quad (3)$$

Hier ist K die Biegesteifigkeit der Platte

$$K = \frac{E \cdot h^3}{12 \cdot (1-\mu^2)}, \quad (4)$$

E der Elastizitätsmodul, μ die Querdehnzahl und h die Plattendicke.

In der angegebenen Form (3) kann die elastische Energie der Platte noch nicht in das Variationsproblem eingebracht werden, denn es fehlt noch die Verbindung zur Durchbiegung w , und zum anderen können wegen (1) nicht beliebige Funktionen φ_x und φ_y vorgegeben werden, denn diese müssen der Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \quad (5)$$

genügen.

Im folgenden wird diese Bedingung mit Hilfe einer Penalty-Zahl λ an W_i angekoppelt, also

$$W_i^* = W_i + \lambda \cdot \frac{1}{4} \cdot K \cdot (1-\mu) \cdot \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)^2, \quad (6)$$

wobei der Wert von λ noch festzulegen ist.

Da die Bedingung (5) nur näherungsweise realisiert werden kann, ist es nicht möglich, den genauen Verlauf der Durchbiegung im Innern des Elementes anzugeben. Man kann sie aber auf den Elementrändern nach folgendem Schema bestimmen (Bild 2).

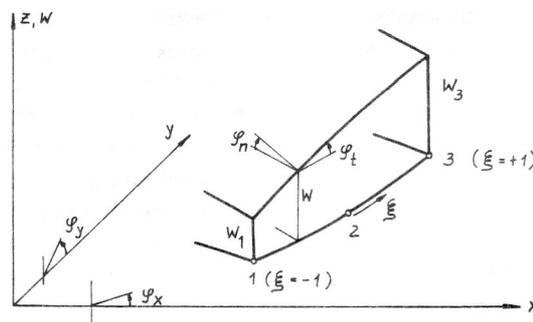


Bild 2
Biege winkel und Verschiebungen auf einer Elementkante

In jedem der 3 Knoten einer Elementkante werden die Biege winkel mittels einer Transformation durch die Biege winkel normal und tangential zum Rand φ_n und φ_t ausgedrückt. Es gilt (Bild 2):

$$\varphi_n = \varphi_{xi} \cdot \cos \alpha_i + \varphi_{yi} \cdot \sin \alpha_i, \quad (7)$$

$$\varphi_{ni} = -\varphi_{xi} \cdot \sin \alpha_i + \varphi_{yi} \cdot \cos \alpha_i.$$

Die Neigung tangential zum Rand φ_t ist, bedingt durch die Wahl der Basisfunktionen auf dem Rand, eine quadratische Funktion. Die zugehörige Verschiebung $w(\xi)$ kann daher angegeben werden und bildet eine Funktion dritten Grades, die unter Verwendung Hermitescher Polynome in der folgenden Weise dargestellt werden kann:

$$W(\xi) = W_1 \cdot H_1(\xi) + \varphi_{t1} \cdot \left(\frac{ds}{d\xi} \right)_1 \cdot H_2(\xi) + W_3 \cdot H_3(\xi) + \varphi_{t3} \cdot \left(\frac{ds}{d\xi} \right)_3 \cdot H_4(\xi). \quad (8)$$

Die Hermiteschen Polynome $H_i(\xi)$ sind:

$$\begin{aligned} H_1(\xi) &= 0,25 \cdot (2 - 3 \cdot \xi + \xi^3), \\ H_2(\xi) &= 0,25 \cdot (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3), \\ H_3(\xi) &= 0,25 \cdot (2 + 3 \cdot \xi - \xi^3), \\ H_4(\xi) &= -0,25 \cdot (1 + \xi - \xi^2 - \xi^3). \end{aligned} \quad (9)$$

Damit kann die Neigung φ_{12} in der Mitte des Randes durch die Verschiebungen und die Biegewinkel der Eckknoten ausgedrückt und damit eliminiert werden. Dies führt auf eine Transformation, durch welche die Biegewinkel φ_i der Seitenmitten durch die Verschiebungen w der Eckknoten ersetzt werden. Es kann damit auch die Verschiebung (Durchbiegung) der Elementränder angegeben werden. Das so konstruierte Plattenelement (Bild 3) besitzt 16 Freiheitsgrade, jeweils drei in den Eckknoten (w, φ_x, φ_y) und einen in den Seitenmitten (φ_n).

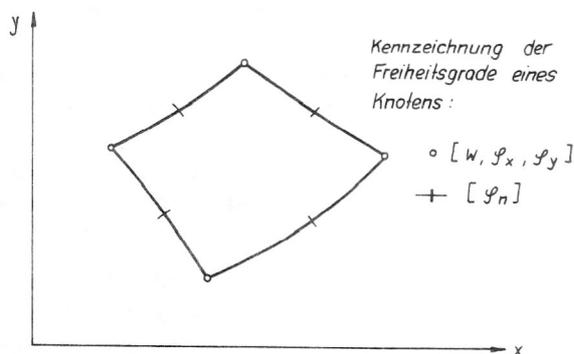


Bild 3
Transformiertes Plattenelement

Die unterschiedliche Zahl der Freiheitsgrade der Eck- und Seitenmittenknoten ist für Plattenelemente nicht ungewöhnlich. Die Stetigkeit der Durchbiegung ist gesichert, da diese auf den Elementrändern eindeutig angegeben werden kann, während die Stetigkeit der Biegewinkel nur in den Eck- und Seitenmittenknoten des Elementes gegeben ist.

3. Abschätzung der Durchbiegung im Innern des Plattenelementes

Die Ankopplung einer Nebenbedingung an das elastische Potential ist keine prinzipiell neue Verfahrensweise und wird in ähnlicher Form auch bei anderen Problemstellungen praktiziert. Trotzdem ist zu überprüfen, ob durch die Ansätze (2) genügend Freiraum besteht, die Bedingung (5) zumindest näherungsweise zu erfüllen. Desgleichen ist eine Abschätzung des Verlaufs der Durchbiegung im Innern des Elementes notwendig, und schließlich ist zu überprüfen, ob bei einer Starrkörperbewegung des Plattenelementes dasselbe spannungsfrei bleibt.

Die Ansätze (2) ergeben bei geradlinig berandeten Elementen quadratische Verläufe der Biegewinkel im Innern des Elementes, und man könnte demzufolge eine Funktion dritten Grades entlang einer beliebigen Geraden durch das Element erwarten, zumal dem Anschein nach die durch (8)

gegebene Durchbiegung auf den Rändern allgemein vom 3. Grade ist. Es ist jedoch leicht einzusehen, daß, wenn auf der Berandung des Plattenelementes die Durchbiegung jeweils vom 3. Grade ist und die Winkel φ_n in den Seitenmitten beliebige Werte annehmen können, der Verlauf der Durchbiegung im Innern höher als vom dritten Grade sein muß, da sonst z. B. der Wert der Durchbiegung in der Elementmitte, der durch Integration vom Rand aus bestimmt werden kann, vom Wege abhängig ist, auf welchem man sich diesem Punkt nähert, oder man kann die Stetigkeit der Ableitungen in den Seitenmitten nicht realisieren. Will man also einen Verlauf 3. Grades unter beliebigen Bedingungen auf den Rändern des Elementes realisieren und gleichzeitig die Stetigkeit der Biegewinkel in den Seitenmitten garantieren, so müssen die Ansätze (2) durch zusätzliche Funktionen höher als vom 2. Grade und entsprechende Freiwerte ergänzt werden. Wenn diese Erweiterung nicht vorgenommen wird, sollte sich auf den Rändern nur ein quadratischer Verlauf der Durchbiegung ergeben, während sie im Innern vom 3. Grade sein kann. Diese Art der Durchbiegung müßte sich im Verlauf der Rechnung ergeben. Die im weiteren ausgeführten Testrechnungen bestätigen diese Vermutung.

Man kann daher den Verlauf der Durchbiegung im Element zunächst durch quadratische Funktionen unter Verwendung der Ansatzfunktionen $G_i(\xi, \eta)$ annähern und durch Funktionen höheren Grades $\bar{G}_i(\xi, \eta)$, die auf der Berandung verschwinden, ergänzen.

$$w(\xi, \eta) = \sum_i G_i(\xi, \eta) \cdot w_i + \sum_j \bar{G}_j(\xi, \eta) \cdot \bar{w}_j \quad (10)$$

Im allgemeinen ist jedoch die Kenntnis der Durchbiegung auf den Elementrändern bzw. den Knotenpunkten völlig ausreichend. Die Verschiebungen der Seitenmittenknoten können mittels (8) durch die Werte der Eckknoten ausgedrückt werden.

Eine Starrkörperbewegung des Plattenelementes ist unter den gemachten Voraussetzungen exakt realisierbar. Die Durchbiegung im Element ist in diesem Fall linear veränderlich. Dieser lineare Verlauf kann unter den getroffenen Voraussetzungen verwirklicht werden und ebenso die Bedingung (5). Die durchgerechneten Testbeispiele zeigen, daß zusätzliche Spannungen aus einer Starrkörperverschiebung nicht auftreten. Dies bestätigt die Brauchbarkeit des vorgestellten Plattenelementes.

4. Steifigkeitsmatrix, Belastung und Randbedingungen

Die Bestimmung der Elementsteifigkeitsmatrix wird in zwei Schritten durchgeführt. Im ersten Schritt erfolgt die Variation des elastischen Potentials. Die erforderliche Integration wird numerisch mit Hilfe des Gaußschen Integrationsverfahrens ausgeführt, wobei die Zahl der Stützstellen zu 2 oder 3 in jeder Koordinatenrichtung gewählt werden kann. Die gerechneten Testbeispiele zeigen bereits bei zwei Stützstellen befriedigende Resultate. Eine Beschränkung auf zwei Stützstellen, wie sie bei einigen anderen Elementen verlangt wird, ist jedoch nicht notwendig. Entscheidend ist die zweckmäßige Wahl der Penaltyzahl, deren Größe anhand ausgewählter Testbeispiele festgelegt wurde. Es

zeigte sich, daß für $\lambda = 100$ hinreichend genaue Resultate erreicht werden konnten. Eine Vergrößerung von λ führt in bestimmten Fällen zu einer nicht angemessenen Versteifung des Plattenelementes, während ein kleiner Wert die geforderte Verträglichkeit nur ungenügend realisiert. Für $\lambda = 0$ wird Steifigkeitsmatrix schließlich trotz korrekter Randbedingungen singulär. Die programmtechnische Realisierung gestaltet sich damit sehr einfach, da die Algorithmen des ebenen Problems übernommen werden können, wobei lediglich die aus den Schubspannungen resultierenden Anteile mit den Faktoren $1 + \lambda$ bzw. $1 - \lambda$ zu multiplizieren sind, je nachdem, ob die durch (6) definierten Anteile zu diesen hinzugefügt oder abgezogen werden.

Im zweiten Schritt erfolgt die Transformation auf die neuen Bezugsgrößen, d. h. das Ersetzen der Ableitungen φ_i in den Seitenmitten durch die Verschiebungen der Eckknoten. Zur Bestimmung der Transformationsmatrix sind zunächst durch Umkehrung von (7) φ_x und φ_y in den Seitenmitten durch φ_i und φ_n zu ersetzen. Die Ableitung φ_i kann vermögen (8) durch die Werte der zugehörigen Eckknoten dargestellt werden, wobei wiederum unter Berücksichtigung von (7) die Ableitung φ_i in den Eckknoten durch die zugehörigen φ_x und φ_y , die ja nicht verändert werden, auszudrücken sind. Zur Bestimmung von $\sin \alpha_i$ und $\cos \alpha_i$ sei wiederum auf Bild 2 verwiesen. x und y können auf dem Rand in der folgenden Weise dargestellt werden:

$$\begin{aligned} x &= -x_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) + x_2 \cdot (1 - \xi^2) + x_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 + \xi), \\ y &= -y_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 - \xi) + y_2 \cdot (1 - \xi^2) + y_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot (1 + \xi). \end{aligned} \quad (11)$$

Man ermittelt hieraus für einen Knoten i :

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \frac{\frac{dx}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}} \Bigg|_{\xi=\xi_i}, \\ \sin \alpha_i &= \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}} \Bigg|_{\xi=\xi_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Da die Orientierung von ξ objektiv und unabhängig vom elementbezogenen ξ, η -System sein muß, erfolgt sie in Richtung der größeren Knotennummer, d. h., es ist $N_3 > N_1$. Die so erstellte Transformationsmatrix T ist nur schwach besetzt, so daß der zusätzliche Aufwand bei der Durchführung der Transformation nicht groß ist.

Der Lastvektor kann Einzelkräfte und Einzelmomente entsprechend den Knotenfreiheitsgraden enthalten. Möglich sind ferner Linienlasten längs einer Elementkante und Flächenlasten im Element. Alle Belastungen, die keine Knotenkräfte und -momente sind, müssen durch ein statisch äquivalentes System von Kräften und Momenten in den Knotenpunkten ersetzt werden. Hierzu ist nicht unbedingt die genaue Kenntnis der Durchbiegung im Innern des Ele-

mentes erforderlich, obwohl dies sicher zu genaueren Ergebnissen besonders bei größeren Vernetzungen führen könnte. Dies geschieht im einfachsten Fall, indem unter Bezugnahme auf die Koordinatenfunktionen $G_i(\xi, \eta)$ entsprechende Knotenkräfte in den Eckknoten bestimmt werden, die durch zusätzliche Momente ergänzt werden können, aber nicht müssen. In der hier vorgestellten Version wurde zunächst nur mit statisch äquivalenten Knotenkräften gearbeitet.

Hinsichtlich der Randbedingungen ist zu beachten, daß sich diese im allgemeinen auf den gesamten Rand eines Elementes beziehen. Es ist zwar formal möglich, die Verdrehungen der Knotenpunkte einzeln zu verhindern, doch im Normalfall ist ein bestimmter Randabschnitt entweder frei, gelenkig gelagert oder eingespannt. Es wurden daher die folgenden Randbedingungsvarianten vorgesehen:

- elastische Einzelstütze in einem Eckknoten, Verschiebung dieses Knotens vorgegeben oder verhindert,
- Elementrand eingespannt, Verschiebung der Eckknoten verhindert, Verdrehungen aller Knoten verhindert,
- Elementrand frei gelagert, Verschiebungen der Eckknoten verhindert, Verdrehungen der Eckknoten tangential zum Rand verhindert,
- Symmetriebedingung, Verdrehungen normal zum Rand verhindert, der Elementrand ist Teil einer Symmetrielinie.

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe des Cholesky-Verfahrens. Zur Berechnung der Biegemomente und Spannungen werden mittels einer inversen Transformation zunächst die Biegewinkel φ_x und φ_y in den Knotenpunkten bestimmt, so daß mit (2) auch der Verlauf von φ_x und φ_y im Element und damit auch deren Ableitungen nach x und y angegeben werden können. Die Bestimmung der Biegemomente und des Torsionsmomentes geschieht dann zunächst in den 2×2 Gaußpunkten nach den bekannten Beziehungen

$$\begin{aligned} M_x &= -K \cdot \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right), \\ M_y &= -K \cdot \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \right), \\ M_{xy} &= -\frac{1-\mu}{2} \cdot K \cdot \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Im nächsten Schritt erfolgt die Bestimmung der entsprechenden Werte in den Knotenpunkten durch lineare Interpolation, und schließlich werden die Momente in den Knotenpunkten angrenzender Elemente gemittelt.

5. Testbeispiele

Die Erprobung des aufgestellten FE-Verfahrens zur Plattenberechnung erfolgt unter zwei Gesichtspunkten. Erstens soll durch Vergleich mit Beispielen, deren Lösung bekannt ist, seine Brauchbarkeit überprüft, und zum anderen soll durch Vergleich mit anderen bekannten FE-Plattenprogrammen seine Effektivität nachgewiesen werden. Natürlich können nicht alle möglichen Versionen der

FE-Plattenberechnung in diesen Vergleich einbezogen werden. In den nachfolgenden Beispielen wurde mit einer Penaltyzahl $\lambda = 100$ gerechnet.

5.1. Kreisplatte

Die Lösung der frei aufliegenden bzw. eingespannten Kreisplatte unter rotationssymmetrischer Belastung ist bekannt. Sie eignet sich daher gut als Testobjekt für ein Plattenprogramm. Betrachtet wird eine Kreisplatte mit Einzelkraft in der Mitte, die am Rand frei aufliegt oder eingespannt ist (Bild 4).

Aus Symmetriegründen braucht nur ein hinreichend schmaler Sektor der Kreisplatte betrachtet werden. Die Ergebnisse sind in den Tabellen 1 und 2 zusammengestellt.

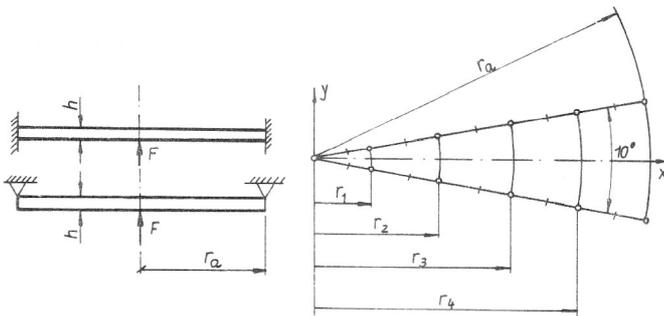


Bild 4
Kreisplatte – Belastung, Lagerung und Vernetzung

Tabelle 1
Kreisplatte eingespannt, Einzelkraft in der Mitte

r	w ^{ex}	M _x ^{ex}	M _y ^{ex}	w ^{FE}	M _x ^{FE}	M _y ^{FE}
mm	mm	Nmm/mm	Nmm/mm	mm	Nmm/mm	Nmm/mm
0	0,0869	∞	∞	0,0869	373,0	374,0
10	0,0820	158,63	214,33	0,0821	140,8	203,0
30	0,0602	44,97	100,68	0,0603	40,37	95,22
55	0,0292	-17,73	37,97	0,0292	-18,95	35,70
77,5	0,0081	-53,21	2,50	0,0081	-53,39	1,25
100	0,0	-79,58	-23,87	0,0	-79,58	-24,95

Tabelle 2
Kreisplatte frei aufliegend, Einzelkraft in der Mitte

r	w ^{ex}	M _x ^{ex}	M _y ^{ex}	w ^{FE}	M _x ^{FE}	M _y ^{FE}
mm	mm	Nmm/mm	Nmm/mm	mm	Nmm/mm	Nmm/mm
0	0,2206	∞	∞	0,2196	454,8	455,8
10	0,2144	238,2	293,9	0,2135	217,9	282,2
30	0,1819	124,6	180,3	0,1811	119,2	174,7
55	0,1224	61,85	117,6	0,1218	59,72	115,2
77,5	0,0615	26,37	82,07	0,0612	25,24	80,68
100	0,0	0,0	55,70	0,0	0,88	54,56

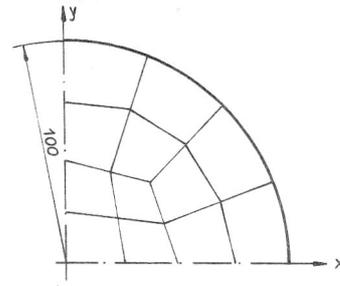


Bild 5
Eingespannte, gleichförmig belastete Kreisplatte nach [4]

Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den theoretisch bekannten Werten.

Das folgende Beispiel (Bild 5) einer eingespannten gleichförmig belasteten Kreisplatte wurde [4], S. 163 entnommen. Es wurden dieselbe Vernetzung und die gleichen Parameter wie in [4] gewählt.

Die Berechnung wurde mit unterschiedlichen Dicken und Belastungsintensitäten durchgeführt und mit den Ergebnissen der dünnen Platte verglichen. Die berechneten Werte ausgewählter Punkte sind im folgenden dargestellt.

Mit $d = 10$ mm und $p = 0,1$ N/mm² erhält man für die Durchbiegung und für die Biegemomente:

$$\begin{aligned}
 w(0,0) &= 0,158960 \text{ mm,} \\
 M_x(0,0) &= M_y(0,0) = 83,65 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(100,0) &= M_y(0,100) = -125,2 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(0,100) &= M_y(100,0) = -34,41 \text{ Nmm/mm.}
 \end{aligned}$$

Analog erhält man mit $d = 1$ mm und $p = 0,001$ N/mm²:

$$\begin{aligned}
 w(0,0) &= 1,58960 \text{ mm,} \\
 M_x(0,0) &= M_y(0,0) = 0,8365 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(100,0) &= M_y(0,100) = -1,252 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(0,100) &= M_y(100,0) = -0,3441 \text{ Nmm/mm.}
 \end{aligned}$$

Die analytische Lösung entsprechend der Kirchhoffschen Plattentheorie liefert bei $d = 10$ mm und $p = 0,1$ N/mm²:

$$\begin{aligned}
 w(0,0) &= 0,15625 \text{ mm,} \\
 M_x(0,0) &= M_y(0,0) = 81,25 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(100,0) &= M_y(0,100) = -125,0 \text{ Nmm/mm,} \\
 M_x(0,100) &= M_y(100,0) = -37,5 \text{ Nmm/mm.}
 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß das Verhältnis Dicke zu Radius ohne Einfluß auf die Genauigkeit des Ergebnisses ist. Diese ist nur abhängig von der Art der Vernetzung.

5.2. Quadratplatte

Das folgende Beispiel (Bild 6) einer durch zwei Einzelkräfte belasteten Quadratplatte soll dem Vergleich des vorgeschlagenen Plattenelementes (im folgenden mit PL16 bezeichnet) und dem Semiloof-Plattenelement (im folgenden mit SL16 bezeichnet) sowie dem schubweichen Plattenelement (im folgenden mit SW24 bezeichnet, 3 Freiheitsgrade pro Knoten, quadratischer Ansatz für Verschiebungen und Biegewinkel) dienen.

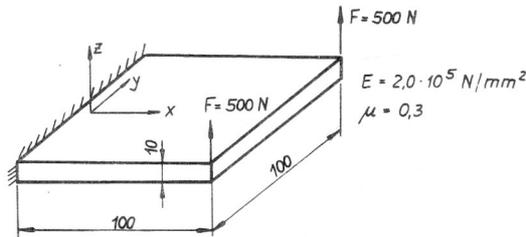


Bild 6
Kragplatte, durch zwei Einzelkräfte belastet

Tabelle 3
Element PL16

N	w(100,0) mm	w(100,50) mm	$\sigma_x(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_y(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_x(0,50)$ N/mm ²
1	0,1780	0,1899	60,00	15,86	60,00
4	0,1773	0,1923	60,95	17,94	59,05
16	0,1791	0,1935	63,08	18,87	51,58
64	0,1797	0,1940	62,77	18,82	40,62

Tabelle 4
Element SL16

N	w(100,0) mm	w(100,50) mm	$\sigma_x(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_y(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_x(0,50)$ N/mm ²
1	0,1838	0,2090	68,90	20,21	55,54
4	0,1824	0,1964	68,01	29,59	53,63
16	0,1803	0,1946	60,79	20,00	42,82

Tabelle 5
Element SW24

N	w(100,0) mm	w(100,50) mm	$\sigma_x(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_y(0,0)$ N/mm ²	$\sigma_x(0,50)$ N/mm ²
1	0,1423	0,1440	33,54	10,06	33,79
4	0,1725	0,1855	53,54	16,06	48,56
16	0,1802	0,1964	60,37	18,11	50,45

Es wurde mit unterschiedlichen, aber gleichförmigen Vernetzungen gearbeitet, Variante 1: 1 Element, Variante 2: 4 Elemente, Variante 3: 16 Elemente.

Die Ergebnisse sind aus den Tabellen 3 bis 5 ersichtlich (N = Anzahl der Elemente).

Im Vergleich der drei Elemente schneidet das Element PL16 nicht schlecht ab, besonders was die berechneten Spannungswerte bei relativ grober Vernetzung betrifft. In

weiteren Beispielen wurde die Brauchbarkeit des Elementes PL16 nachgewiesen, wobei naturgemäß ein Abfall der Genauigkeit bei stark gekrümmten oder verzerrten Elementen zu beobachten war.

6. Verallgemeinerung und Zusammenfassung

Es liegt nahe, das Prinzip, welches hier der Plattenberechnung zugrunde liegt, auf Faltwerk- und Schalenelemente also auf echt räumliche Probleme anzuwenden. Ein Faltwerkelement vereinigt Platten- und Scheibenelement und kann eine beliebige Orientierung im Raum besitzen. Das dem vorgestellten Plattenelement entsprechende Scheibenelement ist das isoparametrische 8-Knoten-Element der Serendipity-Klasse. Es kann jedoch nicht unmittelbar mit dem Plattenelement kombiniert werden, sondern die Knotenverschiebungen in den Seitenmitten sind mittels einer Transformation durch die Verschiebung tangential zum Rand und die Drehungen in den Eckknoten zu ersetzen (Bild 7).

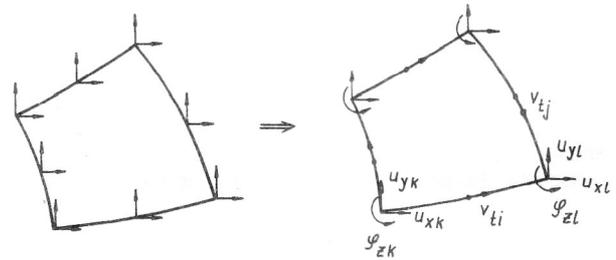


Bild 7
Transformation des 8-Knoten-Scheibenelementes

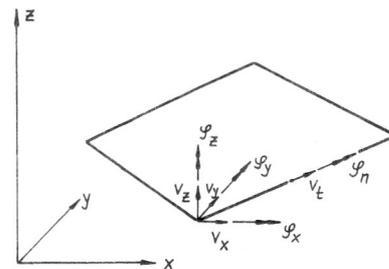


Bild 8
Faltwerkelement, Freiheitsgrade der Eck- und Seitenmittenknoten

Diese Transformation führt zu einer Versteifung der Struktur insgesamt, denn das so veränderte Scheibenelement besitzt wie das Plattenelement drei Freiheitsgrade in den Eckknoten und einen Freiheitsgrad nämlich die Verschiebung tangential zum Rand in den Seitenmitten. Die mit diesem Element durchgeführten Testrechnungen lieferten etwas kleinere Werte der Verschiebungen, jedoch dieselben Spannungen wie bei der Rechnung mit dem Originalelement. Kombiniert man nun Platten- und Scheibenelement,

so entsteht ein Falwerkelement (Bild 8) mit sechs Freiheitsgraden in den Eckknoten (drei Verschiebungen und drei Dehnungen) und zwei Freiheitsgraden in den Seitenmittenknoten (Verschiebung und Drehung). Insgesamt besitzt das Element also 32 Freiheitsgrade.

Ähnliche Überlegungen zur Konstruktion von Falwerkelementen wurden bereits realisiert [13]. Die Möglichkeit einer Verallgemeinerung für ein Schalelement, welches analog dem Falwerkelement sechs Freiheitsgrade in den Eckknoten und zwei in den Seitenmitten besitzt, ist zu überprüfen. Es sei ferner hervorgehoben, daß sich auch Rippen bzw. Versteifungen entlang der Elementkanten problemlos einfügen lassen.

LITERATUR

- [1] Zienkiewicz, O. C.: Methode der finiten Elemente. Carl Hanser Verlag München 1984.
- [2] Argyris, J. H.; Fried, I.; Scharpf, D.: The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. Aer. J. 72 (1968), S. 701 – 709.
- [3] Bell, K.: A refined triangular plate bending finite element. Int. J. Num. Meth. Eng. 1 (1969) S. 101 – 122.
- [4] Hinton, E.; Owen, D. R. J.; Krause, G.: Finite Elemente Programme für Platten und Schalen. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1990.
- [5] Mindlin, R. D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J. Appl. Mech. 37 (1951) S. 1031 – 1036.
- [6] Knothe, K.; Wessels, H.: Finite Elemente, Eine Einführung für Ingenieure. Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York 1991.
- [7] Irons, B. M.: The Semiloof shell element. Chap. 11, pp. 197 – 222 of Finite Elements for thin shells and curved members, eds. d. g. Ashwell and R. H. Gallagher, J. Wiley & Sons London, New York, Sydney, Toronto 1976.
- [8] Fischer, U.; Grochla, J.; Koczyk, S.; Weese, W.: Finite-Elemente-Programme in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig 1986.
- [9] Altenbach, J.; Sacharov, A. S.: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig 1982.
- [10] Rikards, R. B.: Method konietschnych elementov w teorij obolotschek i plastin. Sinatne, Riga 1988.
- [11] Kolar, V.; Kratochvil, J.; Leitner, F.; Zenisek, A.: Berechnung von Flächen- und Raumtragwerken nach der Methode der finiten Elemente. Springer-Verlag Wien, New York 1975.
- [12] Timoshenko, S., Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells. McGraw-Hill Book Company Inc, New York, Toronto, London 1959.
- [13] Müller, H.; Hoffmann, A.: Zur mechanischen Analyse von Falwerken mit FALT-FEM. Techn. Mech. 11 (1990) H. 4, S. 60 – 76.

Anschrift des Verfassers:

Doz. Dr.-Ing. habil. Siegfried Koczyk
 TU „Otto von Guericke“
 Fakultät für Allgemeinen Maschinenbau
 Institut für Festkörpermechanik
 PSF 4210
 O-3010 Magdeburg