

Schubspannungs-Interpretationen der Festigkeitshypothese von Huber / v. Mises / Hencky und ihr Zusammenhang

Hans-Peter Lüpfer

Die physikalischen Begründung der Festigkeitshypothese von Huber / v. Mises / Hencky läßt mehrere verschiedene Möglichkeiten zu: Einerseits die je Volumeneinheit gespeicherte Gestaltänderungsenergie, andererseits aber auch das arithmetische Mittel des Quadrates der Schubspannung, die in bestimmten Schnittflächen wirkt.

Die Gesetzmäßigkeit, die den verschiedenen Schubspannungs-Interpretationen übereinstimmend zugrunde liegt, wurde formuliert. Es ist dies eine spezielle Symmetriebedingung, durch die zu jeder vorgegebenen Schnittrichtung weitere definiert werden. Diese haben die Eigenschaft, daß das arithmetische Mittel der Quadrate der in diesen Schnittebenen wirkenden Schubspannungen stets auch als Kriteriumsgröße der genannten Festigkeitshypothese aufgefaßt werden kann. Somit ist die Favorisierung bestimmter Schubspannungs-Interpretationen, z. B. der Oktaederschubspannungs-Interpretation, nicht gerechtfertigt.

The physical foundation of the strength hypothesis by Huber / v. Mises / Hencky allows for several approaches: on the one hand, the stored deformation energy per volume unit, on the other hand, the arithmetic mean of the shear stress acting on certain section planes.

The principle on which the different shear stress interpretations are based was formulated. It is a special symmetry condition by which additional section planes are defined for each given one. The section planes have the characteristic that the arithmetic mean of the squares of the shear stresses effective in these section planes can always be interpreted as criterion of the above strength hypothesis. Therefore, for instance the octahedral shear stress interpretation, is not justified.

1. Einleitung

Festigkeitshypothesen wurden formuliert, um ein Maß für die Werkstoffanstrengung unter ein- und mehrachsiger Beanspruchung definieren zu können. Insbesondere ermöglichen sie im Rahmen ihrer empirisch gefundenen Fehlergrenzen die Prognose von Überbeanspruchungen durch kombinierte Belastungen, wenn lediglich Festigkeitswerte für einfache Standard-Lastfälle bekannt sind.

Im Falle quasistatischer Beanspruchung hat sich für duktile (d. h. erst nach deutlicher plastischer Verformung brechende) Werkstoffe insbesondere die Festigkeitshypothese von Huber / v. Mises / Hencky bewährt. Sie wurde zunächst mit dem Bruchkriterium „im Werkstoff je Volumeneinheit gespeicherte Gestaltänderungsenergie“ physikalisch begründet, jedoch führen auch mehrere andere Interpretationen, die übereinstimmend die Größe der Schubspannung bestimmter Schnittflächen beinhalten, zum gleichen Ergebnis.

Nachfolgend soll gezeigt werden, daß die Schubspannungs-Interpretationen der genannten Festigkeitshypothese eine einheitliche Grundlage aufweisen und durch eine beliebig große Anzahl weiterer ähnlicher Kriterien ergänzt werden können.

2. Bekannte Interpretationen der Festigkeitshypothese von Huber / v. Mises / Hencky

Wird linear elastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt, bestimmt sich die je Volumeneinheit gespeicherte Gestaltänderungsenergie bei Kenntnis der Normalspannungen $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, der Schubspannungen $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ sowie des Schubmoduls G aus der Beziehung

$$W_g^* = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{12 G} \quad (1)$$

Bis auf den Faktor $2 G$ ist sie zugleich identisch mit der zweiten Invariante des Spannungsdeviators.

Bei einachsiger Beanspruchung, wenn alle Spannungen außer σ_x verschwinden, nimmt W_g^* die Form

$$W_g^* = \frac{\sigma_x^2}{6 G} \quad (2)$$

an. Bezeichnet man die bei einachsiger Beanspruchung gerade noch zulässige Spannung als Grenzspannung σ_G (z. B. ein Teil der Fließgrenze σ_F), ergibt sich durch Vergleich der Beziehungen (1) und (2) die Festigkeitsbedingung von Huber / v. Mises / Hencky [1] [2] [3]:

$$\sqrt{0,5[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} < \sigma_G \quad (13)$$

Werden die Spannungen auf ihre sogenannten Hauptachsen transformiert, verschwinden die Schubspannungen. Der Spannungszustand wird in diesem Fall vollständig von den Hauptnormalspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ repräsentiert. Dann gilt für die spezifische Gestaltänderungsenergie statt (1) die Beziehung

$$W_g^* = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12 G} \quad (4)$$

und die Festigkeitsbedingung nimmt die Form

$$\sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} < \sigma_G \quad (5)$$

an.

Andere Interpretationen der Festigkeitshypothese fußen auf der Größe der im Werkstoff in bestimmten Schnittflächen auftretenden Schubspannungen. Charakterisiert man die Neigung einer bestimmten Schnittebene durch deren Normalenvektor \mathbf{n}_s (Einheitsvektor vom Betrag 1) bzw. dessen Hauptachsenkomponenten n_{s1}, n_{s2}, n_{s3} , gilt für das Quadrat der in dieser Ebene wirkenden Schubspannung

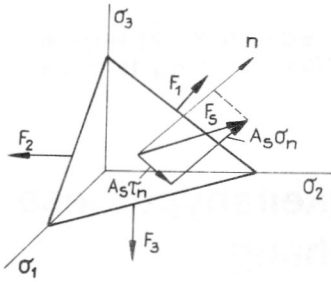


Bild 1
Kräfte am Tetraeder

$$\tau_s^2 = (\sigma_1 n_{s1})^2 + (\sigma_2 n_{s2})^2 + (\sigma_3 n_{s3})^2 - (\sigma_1 n_{s1}^2 + \sigma_2 n_{s2}^2 + \sigma_3 n_{s3}^2). \quad (6)$$

Diese Beziehung folgt aus dem Kräftegleichgewicht an einem Tetraeder, welches von der Raumecke des Hauptachsensystems $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und der Schnittebene mit dem Normalenvektor n_s gebildet wird (Bild 1). An diesem wirken parallel zu den Hauptachsen die Kraftvektoren

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F_3 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

An der geneigten Tetraederfläche A_s greift der Kraftvektor F_s an, dessen Größe und Richtung aus der Gleichgewichtsbedingung

$$F_s = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 n_{s1} \\ \sigma_1 n_{s2} \\ \sigma_1 n_{s1} \end{pmatrix} A_s \quad (8)$$

folgen. Der Betrag der auf der Fläche A_s senkrecht stehenden Kraftkomponente ergibt sich aus dem Skalarprodukt $F_s \cdot n_s$. Sie verursacht in dieser Fläche die Normalspannung

$$\sigma_s = \frac{F_s \cdot n_s}{A_s} = \sigma_1 n_{s1}^2 + \sigma_2 n_{s2}^2 + \sigma_3 n_{s3}^2. \quad (9)$$

Das Quadrat der gesuchten Schubspannung τ_s ergibt sich somit aus

$$\tau_s^2 = \left(\frac{|F_s|}{A_s} \right)^2 - \sigma_s^2. \quad (10)$$

Nach Einsetzen der Beziehungen (8) und (9) folgt daraus der oben angegebene Zusammenhang (6).

Nachfolgend soll die Beziehung (6) zunächst genutzt werden, die Schubspannung in den sogenannten Oktaederebenen, d. h. den Flächen des Oktaeders (Bild 2) mit den Flächennormalen

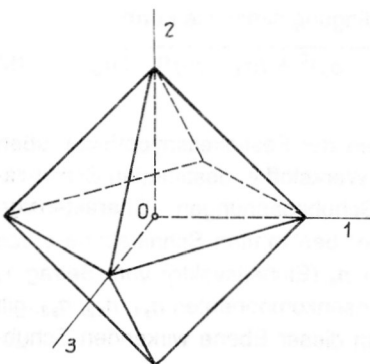


Bild 2
Oktaeder

$$n = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

zu bestimmen. Setzt man die Komponenten der Flächennormalen für n_{s1}, n_{s2}, n_{s3} in Beziehung (6) ein, ergibt sich für jede Oktaederebene das Quadrat der Schubspannung zu

$$\tau_0^2 = \frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)}{9} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{9}. \quad (12)$$

Bis auf den Faktor $4G/3$ stimmt dieser Ausdruck mit der spezifischen Gestaltänderungsenergie (4) überein. Betrachtet man also die Größe der Schubspannung in den Oktaederebenen als Maß für die Werkstoffanstrengung, erhält man somit ebenso wie auf der Grundlage des Kriteriums „spezifische Gestaltänderungsenergie“ die Festigkeitsbedingung (5). Auf diesen Zusammenhang verwies als erster Nadai [4].

Sucht man dagegen das Kriterium der Werkstoffanstrengung statt in der Beanspruchung nur einer Schnittrichtung im Beanspruchungsmittelwert *mehrerer* Richtungen, gelangt man zwanglos über die Hauptschubspannungen

$$\tau_1 = \pm \frac{(\sigma_2 - \sigma_3)}{2}; \quad \tau_2 = \pm \frac{(\sigma_3 - \sigma_1)}{2}; \quad \tau_3 = \pm \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}; \quad (13)$$

bzw. das arithmetische Mittel deren Quadrate zu dem Ausdruck

$$\frac{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2}{3} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{12}, \quad (14)$$

der gleichfalls der spezifischen Gestaltänderungsenergie proportional ist, also auch auf die Festigkeitsbedingung (5) führt.

Im weiteren erweist sich die geometrische Deutung dieses Ergebnisses als hilfreich: Die Hauptschubspannungen wirken in Ebenen, die einerseits die Hauptachse mit dem gleichen Index, andererseits die Winkelhalbierende der beiden übrigen Hauptachsen bzw. deren Normalen beinhalten. Die Ebenen, deren Richtungen durch die Normalenvektoren

$$n_1^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad n_2^* = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}; \quad n_3^* = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

charakterisiert werden, liegen parallel zu den Flächen des Dodekaeders (Bild 3). Die Hauptachsen verlaufen durch diejenigen Ecken des Dodekaeders, in denen vier Flächen zusammenstoßen. Bei der Mittelwertbildung sind hingegen jeweils drei Flächen zu berücksichtigen, die entweder in den übrigen Ecken aneinanderstoßen oder die in der Abwicklung eine fortlaufende Kette (keinen Winkel) bilden. Novozhilo [5] fand, daß das Quadrat der in der Oberfläche

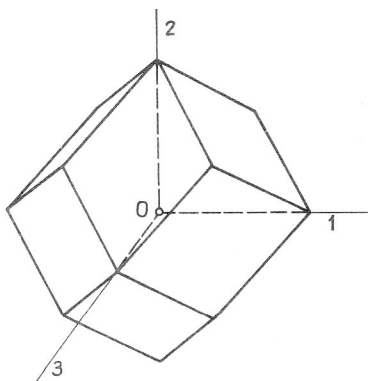


Bild 3
Dodekaeder

eines kugelförmigen Stoffelementes wirkenden Schubspannung τ_s im Mittel der spezifischen Gestaltänderungsenergie proportional ist:

$$(\tau_s^2)_m = \frac{1}{A_K} \int_{(A_K)} \tau_s^2 dA_K \sim W_g. \quad (16)$$

Der Nachweis gelingt nach Paul [6] besonders leicht, wenn die Komponenten des momentanen Normalenvektors n_{s1} , n_{s2} , n_{s3} durch die Koordinaten x , y , z des entsprechenden Radiusvektors ersetzt sowie Kugelkoordinaten (Bild 4) eingeführt werden:

$$\begin{aligned} n_{s1} &= x = \sin \alpha \cos \varphi \\ n_{s2} &= y = \sin \alpha \sin \varphi \\ n_{s3} &= z = \cos \alpha. \end{aligned}$$

Mit den Beziehungen (16) und (6) erhält man

$$\begin{aligned} (\tau_s^2)_m &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\sigma_1 n_{s1})^2 + (\sigma_2 n_{s2})^2 + (\sigma_3 n_{s3})^2 \\ &\quad - (\sigma_1 n_{s1}^2 + \sigma_2 n_{s2}^2 + \sigma_3 n_{s3}^2)^2] \sin \alpha d\alpha d\varphi. \end{aligned} \quad (18)$$

Berücksichtigt man die Symmetriebedingungen

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x^4 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y^4 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z^4 \sin \alpha d\alpha d\varphi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 y^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 z^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 x^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi \end{aligned}$$

sowie die Definitionsgleichung der Oberfläche der Einheitskugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad (20)$$

aus der mit Beziehung (19)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} y^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (21)$$

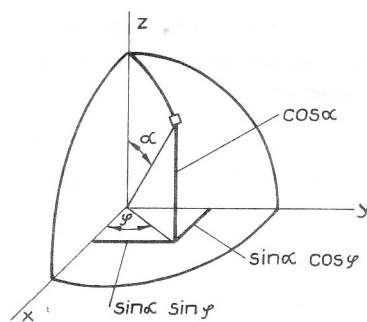


Bild 4
Eulersche Winkel am Einheitskugel-Achtel

folgt, sind zur Lösung von Beziehung (18) lediglich noch zwei einfach auszuführende Doppelintegrationen erforderlich:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} z^4 \sin \alpha d\alpha d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^4 \alpha \sin \alpha d\alpha d\varphi = \frac{1}{5} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} x^2 y^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^5 \alpha \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\alpha d\varphi = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in Beziehung (18) erhält man

$$\begin{aligned} (\tau_s^2)_m &= \frac{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1)}{15} \\ &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{15}, \end{aligned} \quad (23)$$

womit die oben behauptete Proportionalität zur spezifischen Gestaltänderungsenergie (Beziehung (4)) bewiesen ist.

Das arithmetische Mittel des Quadrates der Schubspannung, die in der Oberfläche eines kugelförmigen Werkstoffelementes wirkt, stellt somit eine weitere mögliche Interpretation der Festigkeitsbedingung (5) dar. Diese Version erlangte insbesondere dadurch praktische Bedeutung, als sie von mehreren Forschern [7], [8], [9] als Grundlage für Vorschläge zur Bewertung von zyklischen Schwingungsbeanspruchungen mit überlagerten statischen Beanspruchungsanteilen genutzt wurde. Diese unterstellen neben der Schubspannung auch der in der Oberfläche des kugelförmigen Werkstoffelementes wirkenden Normalspannung einen wesentlichen Einfluß auf die Festigkeit.

3. Verallgemeinertes Schubspannungskriterium

Die oben dargestellten unterschiedlichen Schubspannungsinterpretationen der Festigkeitsbedingung von Huber / v. Mises / Hencky lassen vermuten, daß ein übergeordneter Zusammenhang existiert.

Ausgehend von der speziellen quadratischen Form des Ausdruckes (6), der das Quadrat der Schubspannung einer beliebig geneigten Schnittebene ausweist, ergab

sich der Gedanke, das arithmetische Mittel der Schubspannungsquadrate von sechs Ebenen, deren Normalen (bzw. deren Invertierten)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n}_A &= \begin{pmatrix} \pm n_1 \\ \pm n_2 \\ \pm n_3 \end{pmatrix}; & \mathbf{n}_B &= \begin{pmatrix} \pm n_1 \\ \pm n_3 \\ \pm n_2 \end{pmatrix}; & \mathbf{n}_C &= \begin{pmatrix} \pm n_2 \\ \pm n_3 \\ \pm n_1 \end{pmatrix}; \\
 \mathbf{n}_D &= \begin{pmatrix} \pm n_2 \\ \pm n_1 \\ \pm n_3 \end{pmatrix}; & \mathbf{n}_E &= \begin{pmatrix} \pm n_3 \\ \pm n_1 \\ \pm n_2 \end{pmatrix}; & \mathbf{n}_F &= \begin{pmatrix} \pm n_3 \\ \pm n_2 \\ \pm n_1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

durch Spiegelung an den Hauptschubspannungsebenen (Beziehung 15) untereinander in Beziehung stehen, zu untersuchen. Unter Nutzung von Beziehung (6) ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$(\tau_s^2)_m = k[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$$

mit (25)

$$k = \frac{n_1^2 n_2^2 + n_2^2 n_3^2 + n_3^2 n_1^2}{3(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^2}$$

Der Vergleich dieser Beziehung mit derjenigen der spezifischen Gestaltänderungsenergie (4) zeigt tatsächlich die vermutete Proportionalität beider Ausdrücke. Somit kann das arithmetische Mittel der Schubspannungsquadrate von sechs Schnittebenen, die den beschriebenen Symmetriebedingungen genügen müssen, im übrigen aber frei gewählt werden können, ebenfalls als Kriterium der Festigkeitsbedingung von Huber / v. Mises / Hencky betrachtet werden. Diese neue Version weist die hervorragende Eigenschaft auf, daß sie die zuvor diskutierten Schubspannungs-Interpretationen der genannten Festigkeitsbedingung ausnahmslos als Sonderfälle enthält. So gehen die oben angegebenen Beziehungen für das Quadrat der Schubspannung in den Oktaederebenen (12) und die des arithmetischen Mittels des Schubspannungsquadrates der Hauptschubspannungsebenen (14) unmittelbar aus der Beziehung (26) hervor, wenn dort die entsprechenden Normalen der Schnittebenen (11) bzw. (15) eingesetzt werden. Sehr übersichtlich lassen sich die Symmetrie-Eigenschaften der erwähnten sechs Schnittrichtungen wie folgt zeigen: Man stellt die Normalen der Schnittebenen (Beziehung 24) als Radiusvektoren dar, deren Endpunkte dann ausnahmslos auf der Oberfläche der Einheitskugel liegen und zugleich Tangentialpunkte von Ebenen sind, deren Richtung mit denen der erwähnten Schnittrichtungen identisch sind. Für die Untersuchung der Eigenschaften der Beziehung (25) ist es wegen deren quadratischer Form ausreichend, nur das von den positiven Hauptnormalspannungsachsen begrenzte Achtel der Einheitskugel zu betrachten.

Die Oberfläche der Achtelkugel stellt ein gleichseitiges sphärisches Dreieck dar (Bild 5). Seine Winkelhalbierenden (strichpunktiert gezeichnet) sind zugleich Bestandteil der als Symmetrieebenen fungierenden Hauptschubspannungsebenen. Wie man erkennt, korrespondieren auf der Basis der oben formulierten Symmetriebedingungen im allgemeinen genau sechs Schnittrichtungen miteinander. Lediglich in dem Sonderfall, daß die Radiusvektoren der Schnittrichtungsnormalen in die erwähnten Symmetrieebenen fallen, reduziert sich diese Anzahl: Im allgemeinen

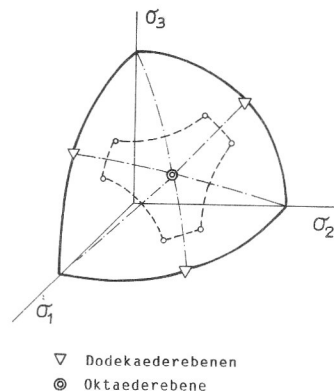


Bild 5
Symmetrie der Tangentialpunkte der Schnittrichtungen

auf drei, wie im Falle der eingezeichneten Hauptschubspannungsebenen, oder minimal auf eins im Falle der Oktaederebene.

Erwähnenswert ist der Sonderfall, daß die Normalen der Schnittebenen mit den Hauptachsenrichtungen übereinstimmen, d. h. die Endpunkte der Radiusvektoren in den Ecken der Achtelkugel liegen. Die so beschriebenen Hauptnormalspannungsebenen sind nämlich schubspannungsfrei, so daß in diesem Fall trotz Erfüllung der geforderten Symmetrie eine an der Schubspannung orientierte Interpretation der Festigkeitsbedingung ausnahmsweise nicht möglich ist.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß für jede beliebig gewählte Schnittrichtung (und die entsprechend der geforderten Symmetrie mit dieser korrespondierenden Schnittrichtungen) zwar im allgemeinen unterschiedliche Faktoren k nach Beziehung (25) berechnet werden, daß aber in jedem Fall die Proportionalität

$$(\tau_s^2)_m \sim (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2$$
(26)

vorliegt. Sie bleibt selbstverständlich auch dann erhalten, wenn in einem beliebigen Sechstel der sphärischen Oberfläche der Achtelkugel (Bild 3) eine unbegrenzte und gleichmäßig dicht angeordnete Menge von Tangentialpunkten vorgegeben wird. Die Erfüllung der Symmetriebedingungen bewirkt, daß auch in den übrigen fünf Sechsteln der Achtelkugeloberfläche eine ebenso dicht angeordnete Menge von Tangentialpunkten abgebildet wird. Auch bei der Übertragung der gleichen Verfahrensweise auf die übrigen sieben Einheitskugel-Achteile bleibt die Proportionalitätsbeziehung (26) erfüllt. Es zeigt sich somit, daß auch die von Novozhilo gefundene Beziehung (16) als Sonderfall des oben formulierten verallgemeinerten Schubspannungskriteriums (25) gedeutet werden kann.

4. Zusammenfassung

Die Festigkeitshypothese von Huber / v. Mises / Hencky hat sich zur Beurteilung der Werkstoffanstrengung duktiler (d. h. nicht spröde brechender) Werkstoffe gut bewährt. Ihre physikalische Begründung läßt verschiedene Möglichkeiten zu: Einerseits kann die je Volumeneinheit gespeicherte Gestaltänderungsenergie als Anstrengungskriterium betrachtet werden, andererseits führen aber auch mehrere Interpretationen, die übereinstimmend das arithmetische

Mittel des in bestimmten Schnittflächen wirkenden Schubspannungsquadrates beinhalten, zum gleichen Ergebnis. Die den verschiedenen Schubspannungs-Interpretationen der genannten Festigkeitsbedingung zugrundeliegende Gesetzmäßigkeit wurde gefunden. Es ist dies eine spezielle Symmetriebedingung, durch die zu jeder beliebigen vorgegebenen Schnittrichtung weitere definiert werden, deren Schubspannungsquadrate im arithmetischen Mittel mit einer einzigen Ausnahme als Kriterium der genannten Festigkeitsbedingung betrachtet werden können. Die erwähnte Ausnahme liegt dann vor, wenn die vorgegebene Schnittrichtung schubspannungsfrei ist, d. h. wenn ihre Normale oder Invertierte mit einer der Hauptnormalspannungsrichtungen zusammenfällt.

Eine gelegentlich erfolgte Favorisierung der Oktaeder-schubspannung zur Erklärung der Werkstoffanregung duktiler Werkstoffe erscheint vor diesem Hintergrund als ungerechtfertigt.

Verzeichnis der verwendeten Formelzeichen

A_s	Größe der relativ zu den Hauptachsen geneigten Tetraederfläche
F_S	an der Fläche A_s angreifender Kraftvektor
F_1, F_2, F_3	parallel zu den Hauptachsen wirkende Kraftvektoren
G	Schubmodul
k	Faktor nach Beziehung (25)
n, n_s, n^*	Normalenvektoren mit dem Betrag 1
W_g^*	je Volumeneinheit gespeicherte Gestaltungsenergie
x, y, z	kartesische Koordination
$\alpha, \varphi,$	Eulersche Winkel
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Normalspannungen
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Hauptnormalspannungen
σ_G	Grenzspannung
σ_s	senkrecht zur Fläche A_s wirkende Normalspannung
τ_1, τ_2, τ_3	Hauptschubspannungen
τ_s	in der Fläche A_s wirkende Schubspannung
$(\tau_s^2)_m$	arithmetisches Mittel des Schubspannungsquadrates

LITERATUR

- [1] Huber, M. T.: Wlasciwa praca odkształcenia jako miara witezenia materialu. *Czasopismo technice (Lwow)* 22 (1904), 38–81.
- [2] v. Mises, R.: Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand. *Nachr. Math. Phys. (Göttingen) Kl. 1* (1913), 582–592.
- [3] Hencky, H.: Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts im plastischen Körper. *Z. Ang. Math. Mech.* 3 (1923) H. 3, 241–251.
- [4] Nadai, A.: *Der bildsame Zustand der Werkstoffe*. Berlin, Springer-Verlag 1927.
- [5] Novozhilov, V. V.: O fisitscheskom smusle inwariantow naprjashenija, ispolsujemuch w teorii plastitschnosti. *Moskau, Prklad. mat. i mech.* XVI (1952), 617–619
- [6] Paul, B.: Macroscopic criteria for plastic flow and brittle fracture. „Fracture“ ed. by H. Liebowitz, Vol. II, Chapt. 4, New York and London: Academic Press, 1968.
- [7] Simbürger, A.: Festigkeitsverhalten zäher Werkstoffe bei einer mehrachsigen, phasenverschobenen Schwingungsbeanspruchung mit körperfesten und veränderlichen Hauptspannungsrichtungen. Darmstadt: Laborat f. Betriebsfest., FB-Nr. 121 (1975).
- [8] Grubisic, V.; Simbürger, A.: Fatigue under Combined Multi-axial Stresses being out of Phase. London: Vortragsband S. E. E.-Conf. Fatigue Test. and Design, April 1976.
- [9] Zenner, H.; Heidenreich, R.: Schubspannungsintensitätshypothese – Erweiterung und experimentelle Abstützung einer neuen Festigkeitshypothese für schwingende Beanspruchung. *Konstruktion* 32 (1980) H. 4, 143–152.

Anschrift des Verfassers:

Dr.-Ing. Hans-Peter Lüpfer
 Bergakademie Freiberg
 Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik
 Institut für Mechanik und Maschinenelemente
 Lampadiusstr. 4
 O-9200 Freiberg