

# Beitrag zur Abschätzung von FEM-Vernetzungsfehlern in Scheibentragwerken

Heinzjoachim Franeck, Hans Wulf

*Bei der Berechnung zweidimensionaler ebener Tragwerke mit der FEM hängt die Genauigkeit der Lösung in starkem Maße von der Topologie der Vernetzung ab. Der aus den Ableitungen der Ansatzfunktionen folgende Vektor der Spannungen erfüllt weder die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren der Elemente noch die vorgeschriebenen statischen Randbedingungen. Das Residuum dieser Gleichungen, d. h., die Differenzen zwischen den FEM-Belastungen und den bekannten Belastungen, wird daher als sogenannte Fehlerbelastung betrachtet, aus der man die relativen und die absoluten Fehler erhält. Ihre Verteilung über das gesamte Netz kann zu dessen Verbesserung benutzt werden.*

*In FEM analysis of two-dimensional plane structures the accuracy of solution decisively depends on the topology of the meshes. The vector of stresses based upon the derivatives of shape functions does not fulfil neither the equilibrium equations inside the elements nor the prescribed static conditions on the boundaries. Therefore, the residuum of these equations, i. e. the differences between the finite element loads and the known loads, may be considered as so-called error load from which the relative and the absolute errors can be calculated. Their distribution throughout the net allows for mesh refinement.*

## 1. Einleitung

Die elastizitätstheoretische Analyse allgemeiner Problemstellungen der Kontinuumsmechanik mit Hilfe der Methode der finiten Elemente wird nur in den seltensten Fällen wirklich „exakte“ Ergebnisse liefern. In der überwiegenden Mehrzahl der Aufgaben hat man mit Fehlern zu rechnen, deren Ursachen sich in vier Gruppen einteilen lassen [1]:

1. Bildung des *mechanischen Modells*,
2. Festlegung der *mechanischen Parameter*,
3. Auftreten von *Rundungsfehlern*,
4. Anwendung des *Näherungsverfahrens*.

Auf die sich aus den ersten beiden Gruppen ergebenden Fehler sind die Aufgabenstellungen der Modellbildung technischer Systeme („Minimalmodell“) gerichtet. Sie haben direkt mit der FEM nichts zu tun und sind deshalb auch nicht Gegenstand der folgenden Ermittlungen. Die Rundungsfehler der dritten Gruppe sind bei dem gegenwärtigen Stand der Rechentechnik und der Wahl leistungsfähiger Algorithmen vernachlässigbar klein. So konzentriert sich das Interesse auf die *Approximationsfehler*, die man aus der vierten Gruppe erhält.

Während es bei der FEM für die richtige Wahl des Näherungsansatzes gesicherte Vorschriften gibt (Konvergenzverhalten,  $C^p$ -Stetigkeit) und der Elementtyp im allgemeinen problembezogen oder „historisch bedingt“ ist, erfordert die günstige Annahme der Vernetzung große ingenieurmäßige Erfahrung und ein gewisses „feeling“ für den sich einstellenden Spannungszustand. Es ist daher äußerst wünschenswert, bereits nach dem ersten Rechenlauf (a-posteriori) zu wissen,

- wo eine gewählte Vernetzung nicht fein genug ist und wie sich die Fehler auf das gesamte Gebiet verteilen (*relativer Fehler*),
- wie groß die entstandenen Fehler bezüglich der (meistens natürlich unbekannt) exakten Lösung sind (*absoluter Fehler*).

Aus diesen Erkenntnissen lassen sich dann sofort Rückschlüsse auf die notwendigen Netzverfeinerungen ziehen und gegebenenfalls eine automatische Netzanpassung durchführen ([1] bis [7]).

Die Kriterien, nach denen die auftretenden Fehler bestimmt werden, können verschiedener Art sein ([8] bis [11]). Sowohl die Erfüllung der Gleichgewichtsbedingungen im Inneren der Elemente als auch die Erfüllung der kinetischen Randbedingungen an den Elementrändern sind Grundlage von Fehlerberechnungen. Aber auch aus speziellen energetischen Untersuchungen oder aus der Übereinstimmung der Spannungen von in einem Knotenpunkt zusammenstoßenden Elementen lassen sich Fehler ermitteln. Dabei muß darauf hingewiesen werden, daß nicht nach jedem der hier angeführten Kriterien die gleiche Fehlerverteilung herauskommt, jedoch lehrt die Erfahrung, daß sich die Gebiete mit den größten Fehlern nicht wesentlich voneinander unterscheiden.

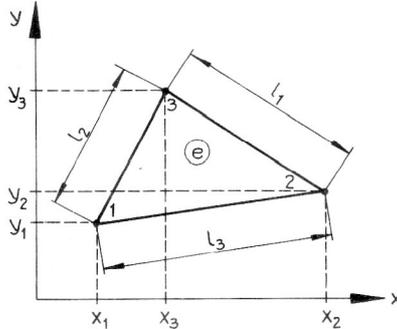
Die im folgenden dargestellte Fehlerberechnung beruht für den *ebenen Spannungszustand* und den *ebenen Verformungszustand* auf der Überprüfung der Gleichgewichtsbedingungen in Inneren eines Elements und der Gleichheit der Spannungsverläufe zwischen zwei benachbarten Elementen. Somit ist diese Untersuchung eine Erweiterung der in [8] dargestellten Vorgehensweise, in der wegen eines quadratischen Näherungsansatzes auch die Spannungen in den Knotenpunkten der Vernetzung zur Fehlerermittlung herangezogen werden müssen.

Die Fehlerberechnung ist speziell für Scheibenprobleme der linearen Elastizitätstheorie durchgeführt worden und bezieht sich in den Annahmen und Bezeichnungen auf das Anwenderhandbuch E87E ([12]). Weitere Einzelheiten sind in [13] enthalten.

## 2. Grundlagen der Fehlerbestimmung

Die Methode der finiten Elemente ist ein numerisches Verfahren zur näherungsweise Lösung von Randwertaufgaben. Im vorliegenden Falle wird sie zur Analyse des ebe-

nen Spannungszustandes und des ebenen Verzerrungszustandes benutzt, wobei in dem FEM-Programm BAF\_E87 der Bergakademie Freiberg das zu untersuchende Gebiet in Dreieckelemente mit 3 Knoten (den Eckpunkten) eingeteilt wird (Bild 1). Als Ansatzfunktionen für die Komponenten des Verschiebungsvektors finden reduzierte Hermitesche Polynome 3. Grades Verwendung.



**Bild 1:**  
Finites 3-Knoten-Dreieckelement

Der aus diesen Ansatzfunktionen folgende Spannungszustand erfüllt i. a. *nicht exakt* die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren jedes Elements, und er erfüllt auch *nicht exakt* die vorgeschriebenen kinetischen Randbedingungen längs der Elementränder, aber er ist die *exakte Lösung* für *Volumenbelastungen* bzw. für *Randlinienbelastungen*, die man aus den Gleichgewichtsbedingungen im Inneren jedes Elements bzw. aus der Differenz der zugehörigen Linienbelastungen entlang der Verbindungslinien jeweils zweier Elemente erhält. Die Differenz zwischen diesen „FEM-Belastungen“ und den gegebenen Belastungen stellt eine *Fehlerbelastung* dar, die nur dann verschwindet, wenn der Näherungsansatz für das Verschiebungsfeld mit der exakten Lösung des Randwertproblems übereinstimmt. Bildet man gewisse *Normen* dieser Fehlerbelastungen und setzt diese Zahlen ins Verhältnis zum *Gesamtfehler*, so kann angenommen werden, daß die Netzeinteilung in den Gebieten mit den größten *relativen Fehlern* verbessert werden muß. Bezieht man dagegen die (gemittelte) Spannung infolge der Differenz aus der „FEM-Belastung“ und der exakten Belastung (gemittelte Spannung infolge der Fehlerbelastung) im Element bzw. am Elementrand auf eine maximale vorhandene Vergleichsspannung (bzw. eine analoge repräsentative Spannung) im gesamten Kontinuum, so kann aus diesem *absoluten Fehler* eine allgemeine Aussage über die Güte der FEM-Näherung getroffen werden.

### 3. Ebener Spannungszustand und ebener Verzerrungszustand

In diesem Abschnitt sollen zunächst einige für die weitere Untersuchung notwendige Beziehungen des zweidimensionalen Spannungszustandes angegeben werden.

Der Verschiebungsvektor  $\underline{u}(x, y)$  im Inneren des Elements  $e$  wird durch den Vektor der Ansatzfunktionen (Näherungsansatz)

$$\underline{u}^{(e)}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x^{(e)}(x, y) \\ u_y^{(e)}(x, y) \end{bmatrix} = \underline{F}^{(e)}(x, y)^T \underline{z}^{(e)} \quad (1)$$

approximiert. Dabei sind

– der Knotenvektor

$$\underline{z}_i = [u_{xi}; u_{xixi}; u_{xyi}; u_{yi}; u_{yixi}; u_{yiyi}]^T \quad (i \cong 1, 2, 3), \quad (2)$$

– der Elementknotenvektor

$$\underline{z}^{(e)} = [\underline{z}_1^T; \underline{z}_2^T; \underline{z}_3^T]^T \quad (3)$$

– und die Matrix der Formfunktionen

$$\underline{F}^{(e)}(x, y) = \underline{F}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \begin{bmatrix} f_1^T & \underline{o}_3^T & f_2^T & \underline{o}_3^T & f_3^T & \underline{o}_3^T \\ \underline{o}_3^T & f_1^T & \underline{o}_3^T & f_2^T & \underline{o}_3^T & f_3^T \end{bmatrix}^T \quad (4)$$

mit den Vektoren der Formfunktionen (Hermitesche Polynome in Dreieckkoordinaten  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ )

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T, \\ f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T, \\ f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= [f_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3); f_9(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]^T. \end{aligned} \quad (5)$$

Zwischen dem Verschiebungsvektor  $\underline{u}(x, y)$  und dem Vektor der Verzerrungen

$$\underline{\varepsilon}(x, y) = [\varepsilon_x(x, y); \varepsilon_y(x, y); \gamma_{xy}(x, y)]^T \quad (6)$$

besteht mit der Differentialoperator-Matrix

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (7)$$

der Zusammenhang

$$\underline{\varepsilon}(x, y) = \underline{D} \underline{u}(x, y) \quad (8)$$

bzw. für den Näherungssatz (1)

$$\underline{\varepsilon}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{D} \underline{F}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{z}^{(e)} = \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)}. \quad (9)$$

Die Matrix  $\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  enthält den Vektor der Variablen

$$\underline{w}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\xi_1^2; \xi_2^2; \xi_3^2; \xi_1\xi_2; \xi_2\xi_3; \xi_3\xi_1]^T, \quad (10)$$

während die Geometriematrix  $\underline{H}^{(e)}$  aus den Abmessungen des Elements  $e$  gebildet wird.

Der Vektor der Spannungen

$$\underline{\sigma}(x, y) = [\sigma_x(x, y); \sigma_y(x, y); \tau_{xy}(x, y)]^T \quad (11)$$

ist mit dem Vektor der Verzerrungen nach Gl. (6) über die Beziehung

$$\underline{\sigma}(x, y) = \underline{C} [\underline{\varepsilon}(x, y) - \underline{\alpha} \Delta T(x, y)] \quad (12)$$

verknüpft. Dabei sind  $\underline{C}$  die bekannte Elastizitätsmatrix,  $\underline{\alpha}$  der Vektor der Längen-Temperaturkoeffizienten und

$$\Delta T(x, y) = T(x, y) - T_A \quad (13)$$

die Temperaturdifferenzen mit  $T_A$  als Temperatur des spannungsfreien Ausgangszustandes. Für isotropes Material können die Matrix  $\underline{C}$  und der Vektor  $\underline{\alpha}$  bei einem ebenen Spannungszustand bzw. einem ebenen Verzerrungszustand der Literatur entnommen werden (z. B. [13]). Elementweise unterschiedliche Größen der Materialkonstanten  $E, \nu$  und  $\alpha$  sind möglich.

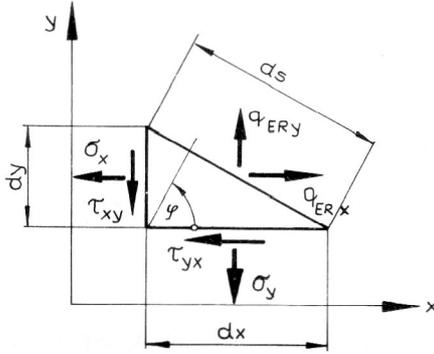
Mit dem Vektor der Ansatzfunktionen nach Gl. (1) gewinnt man so

$$\underline{\alpha}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{C}^{(e)} [\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \underline{\alpha}^{(e)} \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)]. \quad (14)$$

#### 4. FEM-Linienbelastungsvektor und FEM-Volumenbelastungsvektor

An einem um den Winkel  $\varphi$  gedrehten Randstück (Bild 2) bestimmt man aus dem Vektor der Spannungen nach Gl. (14) einen *Linienbelastungsvektor*

$$\begin{aligned} \underline{q}_{ER}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \begin{bmatrix} q_{ERx}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ q_{ERY}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \underline{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \underline{T}_{R\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{aligned} \quad (15)$$



**Bild 2:**  
Linienbelastung am gedrehten Randstück

Speziell an dem Elementrand  $\xi_1 = 0$  ergibt sich für den ebenen Spannungszustand als *FEM-Linienbelastungsvektor am Elementrand  $\xi_1 = 0$*

$$\begin{aligned} \underline{q}_{ER1}^{(e)} &= - \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{l_1} \begin{bmatrix} \xi_2^2 & 0 & \xi_3^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_3^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 \end{bmatrix} \underline{Q}_1^{(e)} \underline{z}^{(e)} - \\ &- \frac{\alpha^{(e)} E^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \frac{1}{l_1} \begin{bmatrix} y_3 - y_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix} \Delta T(\xi_1 = 0) \end{aligned} \quad (16)$$

und an den Elementrändern  $\xi_2 = 0$  bzw.  $\xi_3 = 0$  nach zyklischer Vertauschung

$$\begin{aligned} \underline{q}_{ER2}^{(e)} &= - \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} \xi_3^2 & 0 & \xi_1^2 & 0 & \xi_3 \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_3^2 & 0 & \xi_1^2 & 0 & \xi_3 \xi_1 \end{bmatrix} \underline{Q}_2^{(e)} \underline{z}^{(e)} - \\ &- \frac{\alpha^{(e)} E^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \frac{1}{l_2} \begin{bmatrix} y_1 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} \Delta T(\xi_2 = 0) \end{aligned} \quad (17)$$

bzw.

$$\begin{aligned} \underline{q}_{ER3}^{(e)} &= - \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} \xi_1^2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 \end{bmatrix} \underline{Q}_3^{(e)} \underline{z}^{(e)} - \\ &- \frac{\alpha^{(e)} E^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \frac{1}{l_3} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix} \Delta T(\xi_3 = 0). \end{aligned} \quad (18)$$

Die Geometrie-Stoff-Matrizen  $\underline{Q}_i^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) enthalten die Materialkonstanten und die geometrischen Abmessungen des Elements  $e$ .

Mit der Differentialoperator-Matrix (7) lauten die Gleichgewichtsbedingungen eines zweidimensionalen Spannungszustandes

$$\underline{D}^T \underline{\sigma}(x, y) + \underline{p}(x, y) = \underline{o}_2. \quad (19)$$

Diese Gleichgewichtsbedingungen sind im allgemeinen für den exakten Volumenkraftvektor  $\underline{p}(x, y)$  und den Vektor der Spannungen  $\underline{\sigma}^{(e)}(x, y)$  infolge des Vektors der Ansatzfunktionen (1) nicht erfüllt, aber es läßt sich für jedes Element  $e$  eine *FEM-Volumenbelastung* ermitteln, die dieser Forderung genügt. Den *FEM-Volumenbelastungsvektor* im Element  $e$  gewinnt man mit den Spannungsbeziehungen (14) aus Gl. (19) zu

$$\begin{aligned} \underline{p}_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \begin{bmatrix} p_{Ex}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ p_{Ey}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} = - \underline{D}^T \underline{\sigma}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= - \underline{D}^T \underline{C}^{(e)} [\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \\ &- \underline{\alpha}^{(e)} \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] \end{aligned} \quad (20)$$

und nach Ausführung der notwendigen Differentiationen im Falle des ebenen Spannungszustandes zu

$$\begin{aligned} \underline{p}_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= - \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \underline{W}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \\ &+ \frac{\alpha^{(e)} E^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \begin{bmatrix} \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{ix} \\ \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{iy} \end{bmatrix}^{(e)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Dabei sind wiederum  $\underline{P}^{(e)}$  eine Geometrie-Stoff-Matrix und die Matrix  $\underline{W}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  eine Funktion des Vektors der Variablen

$$\underline{w}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [\xi_1; \xi_2; \xi_3]^T. \quad (22)$$

#### 5. Fehlerbelastungen

Wie bereits in Abschnitt 2. erwähnt, ist der aus der FEM-Analyse folgende Vektor der Ansatzfunktionen  $\underline{u}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  gegenüber dem exakten Verschiebungsvektor  $\underline{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  nur eine Näherungslösung, die zwar die kinematischen Randbedingungen exakt erfüllt, aber zu einem Spannungszustand führt, der ebenfalls nur eine Näherung gegenüber dem exakten darstellt. Es liegt nun nahe, einen *Fehlerverschiebungsvektor*

$$\underline{u}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \underline{u}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \underline{u}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (23)$$

einzuführen, der nur dann verschwindet, wenn die Näherungslösung mit der exakten Lösung übereinstimmt. Das wird nur in ganz wenigen Spezialfällen eintreten. Im allgemeinen findet man über den *Vektor der Fehlerverzerrungen* [Gl. (9)]

$$\begin{aligned} \underline{\epsilon}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \underline{\epsilon}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \underline{\epsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \underline{\epsilon}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (24)$$

einen *Vektor des Fehlerzustandes* [Gl. (14)]

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \underline{\sigma}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \underline{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= \underline{C}^{(e)} [\underline{W}_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{H}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} - \\ &- \underline{\alpha}^{(e)} \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] - \underline{\sigma}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (25)$$

dem aus den Gleichgewichtsbedingungen am finiten Element [Gl. (19)] ein *Fehlervolumenbelastungsvektor im Element e* [Gl. (21)]

$$\begin{aligned} \underline{p}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \underline{p}_E^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - \underline{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ &= -\frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \underline{W}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \\ &\quad + \frac{E^{(e)} \alpha^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \begin{bmatrix} \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{|x} \\ \Delta T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_{|y} \end{bmatrix}^{(e)} - \underline{p}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \quad (26)$$

zugeordnet werden kann.

Neben der *Fehlervolumenbelastung* sind auch zwischen den Elementen bzw. an *freien* Elementrändern *Fehlerlinienbelastungen* vorhanden, die ihre Ursache in dem nicht übereinstimmenden Spannungsverlauf an den Rändern zweier zusammenstoßender Elemente bzw. in der Nichtübereinstimmung der FEM-Randspannungen mit vorgeschriebenen Linienbelastungen haben.

Betrachtet man den Elementrand  $\xi_1 = 0$  des Elements  $e$  bzw. den Elementrand  $\xi_1' = 0$  des Elements  $e'$  (Bild 3), so gelten die geometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned} b_1' &= -x_2' + x_3' = -b_1 = x_2 - x_3, \\ c_1' &= y_2' - y_3' = -c_1 = -y_2 + y_3, \\ \xi_2 + \xi_3 &= 1; \xi_3 = 1 - \xi_2; \xi_2 = \xi_3', \\ \xi_2' + \xi_3' &= 1; \xi_2' = 1 - \xi_3' = 1 - \xi_2 = \xi_3, \\ |l_1^{(e)}| &= |l_1^{(e')}|. \end{aligned} \quad (27)$$

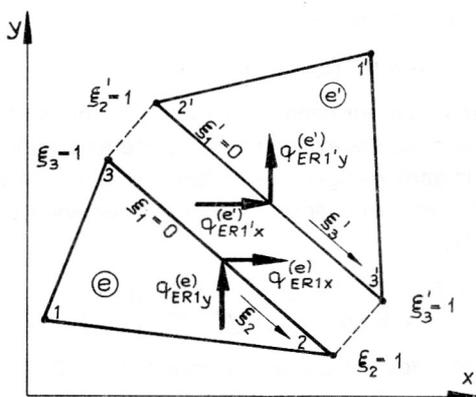
Da weiterhin  $\underline{z}_2 = \underline{z}_3'$  und  $\underline{z}_3 = \underline{z}_2'$  sind, definiert man zunächst einen *FEM-Differenzrandlinienbelastungsvektor am Elementrand  $\xi_1 = 0$*

$$\underline{q}_{DR1}^{(e)} = \underline{q}_{ER1}^{(e)} + \underline{q}_{ER1'}^{(e')}, \quad (28)$$

der mit Gl. (16) für gleiche Stoffwerte in den zusammenstoßenden Elementen die Form

$$\underline{q}_{DR1}^{(e)} = -\frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{|l_1^{(e)}|} \xi_2 \xi_3 \underline{H}_1^{(e)} \underline{z}^{(e)} + (\underline{H}_1^{(e')} \underline{z}^{(e')}) \quad (29)$$

annimmt. [Die Matrizen  $\underline{H}_i^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) sind Untermatrizen der Matrizen  $\underline{Q}_i^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) in den Gln. (16) bis (18).] Es ist



**Bild 3:**  
Innerer Elementrand

ersichtlich, daß die beiden Komponenten der Vektoren  $\underline{q}_{DRi}^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) symmetrische quadratische Parabeln sind, die in der Mitte der Elementränder jeweils ihre Maxima besitzen und an den Eckpunkten Null sind. Damit wird es für diesen Ansatz *nie* möglich sein, an einem im Inneren des vernetzten Kontinuums liegenden Knoten eine von Null verschiedene äußere Belastungsgröße durch die Differenzbildung der Spannungen an diesem Knoten zu erhalten. An einem äußeren Rand gibt es keine Differenzbildung, so daß dort auch an einem Knoten eine äußere Spannung vorhanden sein kann.

Den gesuchten *Fehlerlinienbelastungsvektor am Elementrand  $\xi_1 = 0$*  ermittelt man nun zu

$$\begin{aligned} \underline{q}_{FR}^{(e)}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) &= \underline{q}_{DR}^{(e)}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) - \underline{q}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3) \\ &= -\frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{|l_1^{(e)}|} \xi_2 \xi_3 (\underline{H}_1^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \underline{H}_1^{(e')} \underline{z}^{(e')}) - \\ &\quad - \underline{q}(\xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3), \end{aligned} \quad (30)$$

bzw. für die Elementränder  $\xi_2 = 0$  und  $\xi_3 = 0$  des Elements  $e$

$$\begin{aligned} \underline{q}_{FR}^{(e)}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) &= \underline{q}_{DR}^{(e)}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) - \underline{q}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3) \\ &= -\frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{|l_2^{(e)}|} \xi_3 \xi_1 (\underline{H}_2^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \underline{H}_2^{(e')} \underline{z}^{(e')}) - \\ &\quad - \underline{q}(\xi_1, \xi_2 = 0, \xi_3), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \underline{q}_{FR}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) &= \underline{q}_{DR}^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) - \underline{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0) \\ &= -\frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \frac{1}{|l_3^{(e)}|} \xi_1 \xi_2 (\underline{H}_3^{(e)} \underline{z}^{(e)} + \underline{H}_3^{(e')} \underline{z}^{(e')}) - \\ &\quad - \underline{q}(\xi_1, \xi_2, \xi_3 = 0). \end{aligned} \quad (32)$$

## 6. Relative Fehler und Verfeinerungsindikatoren

Nachdem die Fehlerbelastungen in jedem Element und an jedem Elementrand bekannt sind, muß ein Kriterium gefunden werden, wie mit Hilfe dieser Fehlerbelastungen ein *Verfeinerungsindikator* bestimmt werden kann. Dieser Verfeinerungsindikator soll angeben, in welchen Gebieten des untersuchten Kontinuums eine Netzverfeinerung erforderlich ist. Es leuchtet ein, daß ein Fehler dort am größten sein wird, wo eine große Fehlerbelastung vorhanden ist. Berechnet man also eine *Norm* (absolute Größe) der Fehlerbelastungen in jedem Element und an jedem Elementrand, dann stellt die Summe der Quadrate aller dieser Normen den *Gesamtfehler* im vorliegenden Gebiet dar. Das Verhältnis des auf den Elementbereich bezogenen Quadrates der Norm jedes Elements (*Elementdurchschnittsfehler*) zum auf den Gesamtbereich bezogenen Gesamtfehler (*Gesamtdurchschnittsfehler*) liefert dann ein Maß zur Verteilung des Gesamtfehlers. Allerdings gibt diese Vorgehensweise nur die *relativen Fehler* an und besagt nichts über die *absoluten Fehler* in der FEM-Analyse. Dazu müssen andere Kriterien eingesetzt werden.

Als eine brauchbare Näherung für derartige Fehleruntersuchungen hat sich die sogenannte  $L_2$ -Norm erwiesen. Man erhält sie für eine Funktion  $f(x, y)$  in einem vorgeschriebenen Gebiet  $\Omega$  aus

$$\|\text{II}\|_0 = \left[ \int \int f^2(x, y) d\Omega \right]^{1/2}. \quad (33)$$

Unter der Voraussetzung elementweise konstanter Elementdicke  $h^{(e)}$  lauten die  $L_2$ -Normen des Fehlervolumenbelastungsvektors im Element  $e$  nach Gl. (20) und Gl. (26)

$$\begin{aligned} \|e_p^{(e)}\|_0 &= [h^{(e)} \int_{A^{(e)}} \underline{p}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \underline{p}_F^{(e)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dA]^{1/2} \\ &= \{h^{(e)} \int_{A^{(e)}} [ \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \underline{W}_3^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} - \frac{E^{(e)} \alpha^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \left[ \frac{\Delta T_{lx}}{\Delta T_{ly}} \right]^{(e)} + \underline{p} ]^T \cdot \\ &\quad \cdot [ \frac{E^{(e)}}{1-\nu^{(e)2}} \underline{W}_3^T \underline{P}^{(e)} \underline{z}^{(e)} - \frac{E^{(e)} \alpha^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \left[ \frac{\Delta T_{lx}}{\Delta T_{ly}} \right]^{(e)} + \underline{p} ] dA \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

Bei der Fehlerlinienbelastung geht man in analoger Weise vor. Die den Linienbelastungssprüngen zwischen zwei zusammenstoßenden Elementen entsprechenden Linienbelastungen sind in den Gln. (30) – (32) bereitgestellt. Ihre  $L_2$ -Normen des Fehlerlinienbelastungsvektors am Elementrand  $k$  betragen

$$\begin{aligned} \|e_{q_l}\|_0 &= [h_l \int_{l_l} \underline{q}_{FH}^{(e)}(\xi_1=0, \xi_2, \xi_3)^T \underline{q}_{FH}^{(e)}(\xi_1=0, \xi_2, \xi_3) ds]^{1/2} \\ &= \{h_l \int_{l_l} [ \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{1}{l_1} \xi_2 \xi_3 (H_1^{(e)} \underline{z}^{(e)} + H_1^{(e')} \underline{z}^{(e')}) + \underline{q}(\xi_1=0) ]^T \cdot \\ &\quad \cdot [ \frac{E_1}{1-\nu_1} \frac{1}{l_1} \xi_2 \xi_3 (H_1^{(e)} \underline{z}^{(e)} + H_1^{(e')} \underline{z}^{(e')}) + \underline{q}(\xi_1=0) ] ds \}^{1/2}. \end{aligned} \quad (35)$$

[Anmerkung: In Gl. (35) wird angenommen, daß der Rand  $k$  zwischen den Elementen  $e$  und  $e'$  der Rand  $\xi_1 = 0$  des Elements  $e$  ist. Dieser Rand besitzt die (konstante) Elementdicke  $h_l$  und die (evtl. zwischen den Elementen  $e$  und  $e'$  gemittelten) Materialkonstanten  $E_1$  und  $\nu_1$ .]

Mit den Quadraten der  $L_2$ -Normen in den Gln. (34) und (35) definiert man einen Gesamtfehler der Fehlervolumenbelastungen

$$f_p = \sum_e \|e_p^{(e)}\|_0^2 \quad (e: \text{ alle Elemente}) \quad (36)$$

und einen Gesamtfehler der Fehlerlinienbelastungen

$$f_q = \sum_e \|e_{q_n}\|_0^2 \quad (n: \text{ alle Elementränder}). \quad (37)$$

Die relativen Gesamtdurchschnittsfehler sind dann

$$\frac{f_p}{\sum_e h^{(e)} A^{(e)}} = \frac{\sum_e \|e_p^{(e)}\|_0^2}{\sum_e h^{(e)} A^{(e)}} \quad (38)$$

$$\frac{f_q}{\sum_n h_n l_n} = \frac{\sum_e \|e_{q_n}\|_0^2}{\sum_n h_n l_n} \quad (39)$$

Schließlich findet man die relativen Elementdurchschnittsfehler der Fehlervolumenbelastungen im Element  $e$  zu

$$f_{pr}^{(e)} = \frac{\|e_p^{(e)}\|_0^2 \sum_e h^{(e)} A^{(e)}}{h^{(e)} A^{(e)} \sum_e \|e_p^{(e)}\|_0^2} \quad (e: \text{ alle Elemente}) \quad (40)$$

und die relativen Randobermittlungsfehler der Fehlerlinienbelastungen am Elementrand  $k$  zu

$$f_{qrk} = \frac{\|e_{qk}\|_0^2 \sum_n h_n l_n}{h_k l_k \sum_n \|e_{q_n}\|_0^2} \quad (k, n: \text{ alle Elementränder}). \quad (41)$$

Diese relativen Elementdurchschnittsfehler und Randobermittlungsfehler können auch als die gesuchten Verfeinerungsindikatoren angesehen werden. Für alle Vernetzungsbereiche, deren Verfeinerungsindikatoren z. B. Werte  $f_{pr}^{(e)} > 1.0$  bzw.  $f_{qrk} > 1.0$  liefern, ist eine Netzverfeinerung zu empfehlen. Bereiche mit Verfeinerungsindikatoren  $< 1.0$  bedürfen dann zunächst keiner Korrektur.

## 7. Absolute Fehler

Um den absoluten Fehler einer FEM-Berechnung angeben zu können, müßte man die exakte Lösung des betrachteten Problems kennen. Da dies im allgemeinen nicht der Fall sein wird, muß man die Erfüllung gewisser statischer Randbedingungen zu Hilfe nehmen. In dem vorliegenden FEM-Programm BAF\_E87 der Bergakademie Freiberg werden die kinematischen Randbedingungen durch die Vorgabe von Knotenvektorkomponenten exakt erfüllt. Demzufolge stehen zur Fehlerabschätzung erstens noch Spannungen zu Verfügung, wobei die aus der FEM-Analyse folgenden FEM-Linienbelastungen an den Elementrändern mit dort gegebenen äußeren Randlinienbelastungen verglichen werden können. Das ist aber oft nicht möglich, da bei vielen Problemen keine Randlinienbelastungen vorgeschrieben sind bzw. deren Größe im Vergleich zum Einfluß anderer Kraftgrößen (Einzelkräfte, Temperatur) vernachlässigbar ist. Auch ist zweitens das Verhältnis zwischen berechneter FEM-Volumenbelastung und eingetragener Volumenbelastung nur als Fehlerkriterium heranzuziehen, wenn es eine eingetragene Volumenbelastung gibt (Eigengewicht, Zentrifugalkraft). Man wird daher nach anderen Möglichkeiten suchen müssen, um eine brauchbare Abschätzung des absoluten Fehlers zu erhalten.

In dem Datenausdruck des FEM-Programms BAF\_E87 erscheint in jedem Knoten des Kontinuums die Vergleichsspannung  $\sigma_v$  nach der Gestaltsänderungsenergiemethode von Huber/Hencky/v. Mises. Die maximale bei einem Problem auftretende Vergleichsspannung  $\sigma_{vmax}$  oder – um den Einfluß einzelner sehr hoher in Knotenpunkten mit singulären Spannungszuständen vorhandener Spannungsspitzen auszuschließen – der Durchschnittswert der höchsten in dem Kontinuum berechneten Vergleichsspannungen (deren Anzahl festgelegt werden muß) wird als Bezugsspannung  $\bar{\sigma}_v$  bestimmt. Zu dieser Bezugsspannung werden in das Verhältnis gesetzt

1. die gemittelte Fehlerspannung in jedem Element,
2. die gemittelte Fehlerspannung an jeden inneren Elementrand,
3. die gemittelte Fehlerspannung an jedem belasteten oder unbelasteten äußeren Elementrand.

Die Berechnung einer Fehlerspannung in jedem Element  $e$  ist nicht möglich, da zwar der Spannungszustand aus der FEM-Belastung bekannt ist [Gl. (14)], der exakte Spannungsverlauf aber nicht. Deshalb wird aus dem Fehlervolumenbelastungsvektor im Element  $e$  nach Gl. (26) eine re-

sultierende Kraft bestimmt und diese dann auf eine repräsentative Fläche jedes Elements bezogen.

Dieser Wert stellt die gemittelte Spannung infolge der Fehlervolumenbelastung im Element e dar.

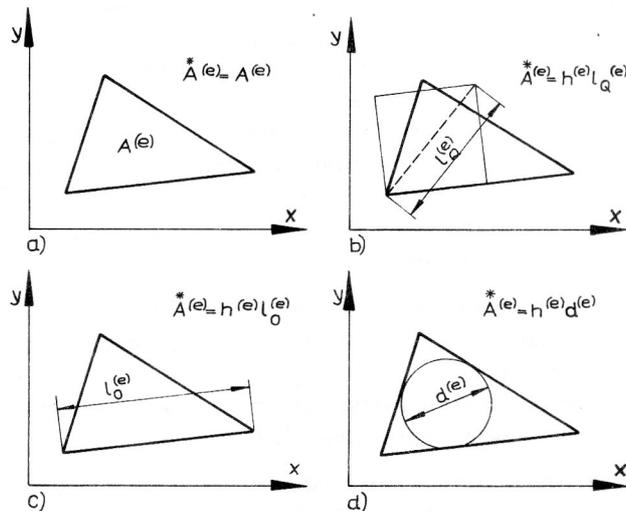
Die resultierende Kraft der Fehlervolumenbelastung im Element e findet man zu

$$\begin{aligned}
 F_p^{(e)} &= h^{(e)} \left[ \left( \int_{A^{(e)}} p_{Fx}^{(e)} dA \right)^2 + \left( \int_{A^{(e)}} p_{Fy}^{(e)} dA \right)^2 \right]^{1/2} \\
 &= h^{(e)} \left\{ \left[ \frac{E^{(e)}}{6(1-\nu^{(e)2})} r_{px}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \frac{E^{(e)} \alpha^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \Delta T_{ix} dA - \int_{A^{(e)}} p_x dA \right]^2 + \left[ \frac{E^{(e)}}{6(1-\nu^{(e)2})} r_{py}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + \frac{E^{(e)} \alpha^{(e)}}{1-\nu^{(e)}} \int_{A^{(e)}} \Delta T_{iy} dA - \int_{A^{(e)}} p_y dA \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (42)
 \end{aligned}$$

wobei sich die Geometrie-Stoff-Vektoren  $r_{px}^{(e)}$  und  $r_{py}^{(e)}$  durch die Integration entsprechender Teile von Gl. (20) über die Elementfläche ergeben.

Für die Wahl der repräsentativen Fläche  $\check{A}^{(e)}$  bestehen verschiedene Möglichkeiten. In die Spannungsermittlung sollen natürlich die Größe der Fläche  $A^{(e)}$  und die Dicke  $h^{(e)}$  des Dreiecks eingehen, aber auch die topologische Form des Dreiecks sollte berücksichtigt werden. Erfahrungsgemäß sind sehr schmale Dreiecke ungünstiger als „gut konditionierte“, so daß erstere fehlerempfindlicher sind.

1. Ist die repräsentative Fläche  $\check{A}^{(e)}$  mit der Dreieckfläche  $A^{(e)}$  identisch (Bild 4.a), erhalten unterschiedlich dicke Elemente die gleiche Fehlerspannung.
2. Setzt man die repräsentative Fläche  $\check{A}^{(e)}$  aus der Elementdicke  $h^{(e)}$  und der Diagonalen  $l_0^{(e)}$  eines mit dem Dreieck flächengleichen Quadrats zusammen (Bild 4.b), findet die Form des Dreiecks keine Berücksichtigung.
3. Besteht die repräsentative Fläche  $\check{A}^{(e)}$  aus der Elementdicke  $h^{(e)}$  und dem größten im Dreieck vorhandenen Abstand  $l_0^{(e)}$  (Bild 4.c), treten in schmalen Dreiecken kleinere Fehlerspannungen als in „gut konditionierten“ auf.



**Bild 4:**  
Repräsentative Fläche

4. Die beste Möglichkeit scheint eine repräsentative Fläche  $\check{A}^{(e)}$  zu sein, die von der Elementdicke  $h^{(e)}$  und dem Durchmesser  $d^{(e)}$  des dem Dreieck eingeschriebenen Inkreises gebildet wird (Bild 4.d). Hier liefern schmale Dreiecke größere Fehlerspannungen. Deshalb wird diese Variante für die Fehlerabschätzung vorgeschlagen.

Mit

$$\check{A}^{(e)} = h^{(e)} \sqrt{\frac{(-l_1 + l_2 + l_3)(l_1 - l_2 + l_3)(l_1 + l_2 - l_3)}{l_1 + l_2 + l_3}} \quad (43)$$

nehmen die gesuchten gemittelten Spannungen infolge der Fehlervolumenbelastung im Element e dann den Wert

$$\sigma_{pF}^{(e)} = \frac{F_p^{(e)}}{\check{A}^{(e)}} \quad (e: \text{alle Elemente}) \quad (44)$$

an.

Im Vergleich mit der Bezugsspannung  $\delta_v$  ergeben sich die prozentualen absoluten Elementdurchschnittsfehler der Fehlervolumenbelastung im Element e

$$f_{pa}^{(e)} = \frac{\sigma_{pF}^{(e)}}{\delta_v} 100 \% \quad (e: \text{alle Elemente}). \quad (45)$$

Die gemittelte Fehlerspannung an jedem inneren Elementrand wird ebenfalls aus einer resultierenden Randkraft und der Seitenfläche des Dreiecks gebildet. Die resultierende Kraft der Fehlerlinienbelastung am Elementrand k folgt nach Gl. (30) bis Gl. (32) zu

$$\begin{aligned}
 F_{qk} &= h_k \left\{ \left[ \int_k q_{FRx}^{(e)}(\xi_i = 0) ds \right]^2 + \left[ \int_k q_{FRy}^{(e)}(\xi_i = 0) ds \right]^2 \right\}^{1/2} \\
 &= h_k \left\{ \left[ -\frac{E_k}{6(1-\nu_k^2)} (r_{qix}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + r_{qix}^{(e)T} \underline{z}^{(e)}) - \int_k q_x(\xi_i = 0) ds \right]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -\frac{E_k}{6(1-\nu_k^2)} (r_{qiy}^{(e)T} \underline{z}^{(e)} + r_{qiy}^{(e)T} \underline{z}^{(e)}) - \int_k q_y(\xi_i = 0) ds \right]^2 \right\}^{1/2}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

[In Gl. (46) ist wiederum die Anmerkung hinter Gl. (35) zu beachten. Die Vektoren  $r_{qix}^{(e)}$  und  $r_{qiy}^{(e)}$  ( $i \triangleq 1, 2, 3$ ) entstehen durch Integration entsprechender Funktionen in den Gln. (30) bis (32) über die Randlänge.]

Mit der Fläche des Elementrandes

$$A_k = h_k l_k \quad (k: \text{alle Elementränder}) \quad (47)$$

findet man die gesuchten gemittelten Spannungen infolge der Fehlerlinienbelastung am Elementrand k in der Form

$$\sigma_{qFk} = \frac{F_{qk}}{A_k} = \frac{F_{qk}}{h_k l_k} \quad (k: \text{alle Elementränder}). \quad (48)$$

Die prozentualen absoluten Randdurchschnittsfehler der Fehlerlinienbelastung am Elementrand k besitzen die Größe

$$f_{qak} = \frac{\sigma_{qFk}}{\delta_v} 100 \% \quad (k: \text{alle Elementränder}). \quad (49)$$

Schließlich wird die gemittelte Fehlerspannung an einem unbelasteten oder auch belasteten äußeren Rand aus

einer resultierenden Randkraft und der Seitenfläche des Dreieckselements gebildet. Die *resultierende Kraft der Fehlerlinienbelastung am Elementrand k* nimmt mit Gl. (16) bis Gl. (18) und Gl. (30) bis Gl. (32) die Form

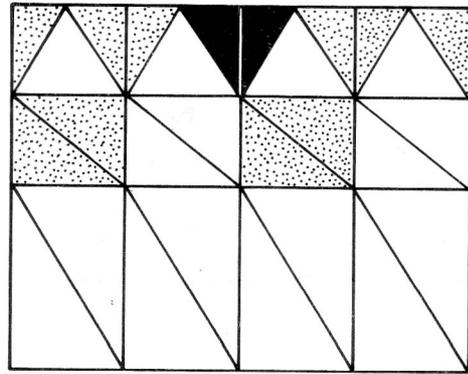
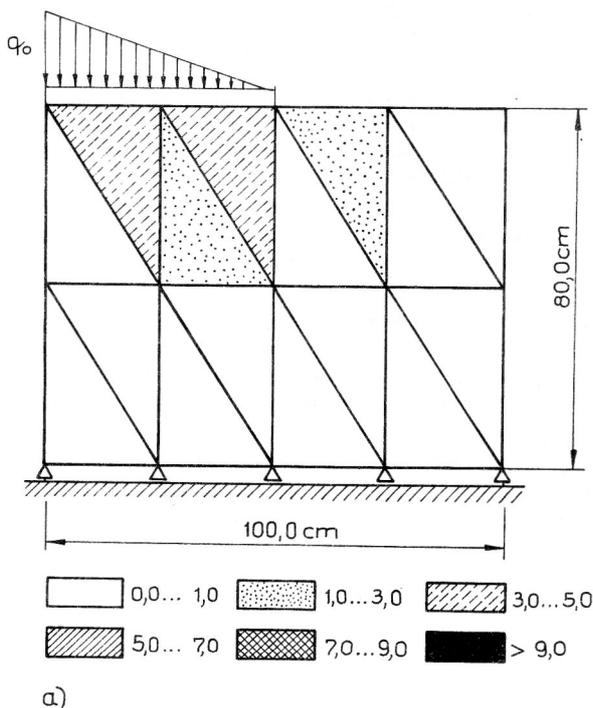
$$\begin{aligned}
 F_{qk} &= h_k \left\{ \left[ \int_{l_k} q_{FRx}^{(e)}(\xi_i=0) ds \right]^2 + \left[ \int_{l_k} q_{FRy}^{(e)}(\xi_i=0) ds \right]^2 \right\}^{1/2} \\
 &= h_k \left\{ \left[ - \frac{E_k}{6(1-\nu_k^2)} r_{qkx}^T \underline{z}^{(e)} + \frac{\alpha_k E_k}{1-\nu_k} \frac{c_i}{l_i} \int_{l_k} \Delta T(\xi_i=0) ds - \int_{l_k} q_x(\xi_i=0) ds \right]^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ - \frac{E_k}{6(1-\nu_k^2)} r_{qky}^T \underline{z}^{(e)} + \frac{\alpha_k E_k}{1-\nu_k} \frac{b_i}{l_i} \int_{l_k} \Delta T(\xi_i=0) ds - \int_{l_k} q_y(\xi_i=0) ds \right]^2 \right\}^{1/2} \\
 &\quad (i \cong 1, 2, 3)
 \end{aligned}
 \tag{50}$$

an. [Die Vektoren  $r_{qkx}$  und  $r_{qky}$  entsprechen am äußeren Elementrand  $k$  den Vektoren  $r_{qly}^{(e)}$  ( $i \cong 1, 2, 3$ ) in Gl. (46), die für die inneren Elementränder gültig sind.]

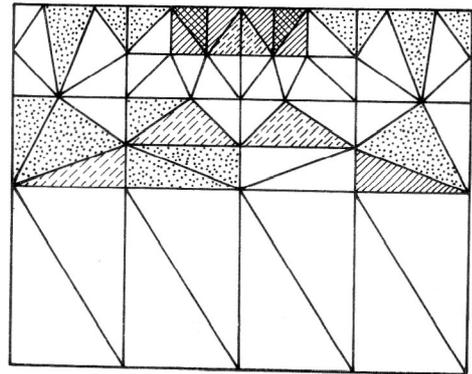
Die gemittelten Spannungen infolge der Fehlerlinienbelastung am Elementrand  $k$  und die prozentualen absoluten Randdurchschnittsfehler der Fehlerlinienbelastung am Elementrand  $k$  erhält man aus den Gl. (48) und (49).

## 8. Beispiel

Für die dargelegte Theorie wurde ein Programmteil „Randfehler“ erarbeitet und in das FEM-Programm BAF\_E87 eingefügt. Die Testung erfolgte an Beispielen mit bekannten exakten Lösungen (Biegebalken unter reiner Biegebelastung, Kreisscheibe mit Loch unter Rotation), wobei es sich als günstig erwies, die repräsentative Dreieckfläche  $\bar{A}^{(e)}$  nach Gl. (43) mit einem Korrekturfaktor  $k = 2,5$  zu vergrößern, um an einem Element annähernd gleiche prozentuale absolute Elementdurchschnittsfehler der Fehlervolu-



b)



c)

**Bild 5a bis c:**

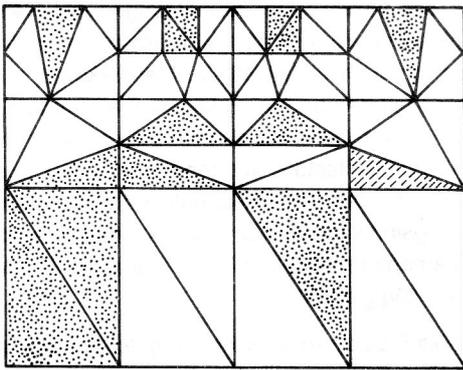
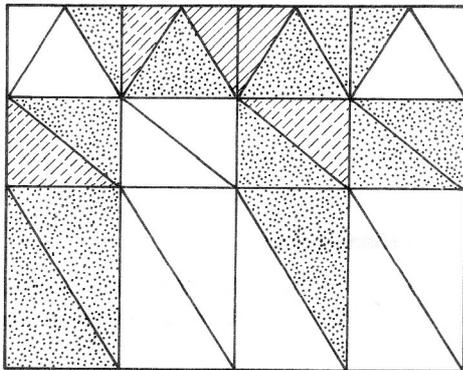
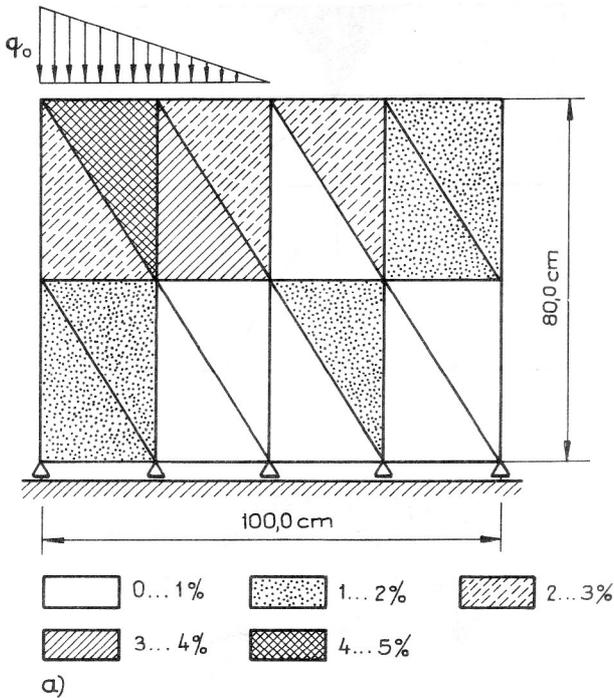
### Relative Elementdurchschnittsfehler

menbelastung nach Gl. (45) und prozentuale absolute Randdurchschnittsfehler der Fehlerlinienbelastung nach Gl. (49) zu erhalten [(14)].

In den Bildern 5.a bis 5.c ist für eine durch eine dreieckförmige Linienlast beanspruchte Scheibe (ebener Spannungszustand) die Verteilung der relativen Elementdurchschnittsfehler der Fehlervolumenbelastungen [Gl. (40)] (Verfeinerungsindikatoren) für drei Vernetzungsvarianten unterschiedlicher Feinheit dargestellt. Man erkennt, daß sich die Gebiete mit den größten relativen Elementdurchschnittsfehlern immer mehr auf den Belastungsrand und dort auf die Unstetigkeitsstelle konzentrieren. Es ist aber auch zu bemerken, daß bei fortschreitendem Ausgleich der Verfeinerungsindikatoren über die gesamte Scheibe der relative Elementdurchschnittsfehler in einigen Gebieten wieder geringfügig ansteigt.

Die Bilder 6.a bis 6.c zeigen die Verteilung der prozentualen absoluten Elementdurchschnittsfehler der Fehlervolumenbelastungen nach Gl. (45). Der für die grobe Vernetzungsvariante berechnete maximale prozentuale Fehler von 4,4 % geht bei der feinen Vernetzung auf 2,3 % zurück. (Zugegebenermaßen sind bei FEM-Analysen Fehler von 4 % im allgemeinen immer zu tolerieren; es geht hier jedoch um die Tendenz, und dafür erscheint das einfache Beispiel geeignet.)

Abschließend sei bemerkt, daß die Verteilungen der relativen Randdurchschnittsfehler der Fehlerlinienbelastungen nach Gl. (41) und der prozentualen absoluten Randdurch-



**Bild 6a bis c:**  
Absolute Elementdurchschnittsfelder

schnittsfehler der Fehlerlinienbelastungen nach Gl. (49) im wesentlichen den Ergebnissen der Fehlervolumenbelastungen entsprechen. Auf ihre grafische Darstellung muß ebenso wie auf weitere Beispiele aus Platzgründen verzichtet werden.

## 9. Zusammenfassung

Das Vertrauen in die Ergebnisse einer FEM-Analyse wird wesentlich erhöht, wenn u. a. gesicherte Aussagen über die (unvermeidlichen) Vernetzungsfehler vorliegen. Zu diesem Zwecke werden in die FEM-Einzelprogramme der Bergakademie Freiberg Fehlerabschätzungen implementiert, die speziell für den ebenen Spannungszustand und den ebenen Verzerrungszustand auf der Berechnung der Differenz zwischen den zum Lösungsvektor  $\underline{z}$  eines Problems gehörenden (exakten) FEM-Volumenbelastungen bzw. FEM-Linienbelastungen und den vorgegebenen Belastungsfunktionen beruhen. Aus diesen Fehlerbelastungen folgen dann über  $L_2$ -Normen die relativen Fehler und über die Wahl einer Bezugsspannung die absoluten Fehler in jedem Element und an jedem Elementrand. Diese Untersuchungen werden für weitere FEM-Programme (stationäre Wärmeleitung, axialsymmetrische Probleme, Platten u. a.) fortgesetzt.

## LITERATUR

- [1] Rank, E., A. Roßmann: „Fehlerabschätzung und automatische Netzanpassung bei Finite-Element-Berechnungen“. *Bauingenieur* 62(1987), S. 449 – 454.
- [2] Babuska, I.: „The self adaptive approach in finite element methods“. In: *The Mathematics of Finite Elements and Applications. MAFELAP 1975*, J. R. Whiteman (ed.), Acad. Press New York 1976.
- [3] Babuska, I.; W. C. Rheinboldt: „Error estimates for adaptive finite elements computations“. *SIAM J. Numer. Anal.* Vol. 15(1978), No. 4.
- [4] Babuska, A. Miller: „A-posteriori error estimates and adaptive techniques for the finite element method“. Univ. of Maryland, Inst. f. Physic. Sci. and Tech., Tech. Note BN-968, 1981.
- [5] Rank, E.: „A-posteriori Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegralmethoden“. *Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I*, TU München 1985.
- [6] Zienkiewicz, Zhu: „A simple error estimation and adaptive procedure for practical engineering analysis“. In: *Intern. J. for Numerical Methods in Engineering*. Vol. 24(1987), S. 337 – 367.
- [7] Pallacks, R.: „Adaptive Netzgenerierung zur Berechnung der Spannungen an einspringenden Ecken mit kreisförmigen Ausrundungen bei Festigkeitsanalysen mit finiten Elementen“. Diss. Hamburg, Univ. d. Bundeswehr Hamburg 1989.
- [8] Brendler, H.: „Kontrolle der Elementgröße bei FEM-Programmen“. *Dipl.-Arbeit TU Dresden* 1981.
- [9] Hartmann, F., S. Pickhardt: „Der Fehler bei finiten Elementen“. *Bauingenieur* 60(1985), S. 463 – 468.

- [10] Altenbach, J., R. Mücke: „Testung von Fehlerindikatoren für Finite-Element-Lösungen der linearen Elastizitätstheorie“. Technische Mechanik 11 (1990), H. 1, S. 49 – 54.
- [11] Weiß, E., U. Krieg: „Beurteilung des Aussagegehalts von Finite-Element-Festigkeitsberechnungen“. Maschinenbautechnik 38 (1989), H. 5, S. 212 – 216.
- [12] Franeck, H., R. Hoffmann, M. Zille: „Berechnung ebener Probleme der linearen Elastizitätstheorie und der stationären Wärmeleitung“. Anwenderhandbuch E87E, Bergakademie Freiberg 1989.
- [13] Kämmel, G., H. Franeck: „Einführung in die Methode der finiten Elemente“. 2. Auflage 1990, VEB Fachbuchverlag Leipzig.
- [14] Wulf, H.: „Abschätzung von FEM-Vernetzungsfehlern“. Bergakademie Freiberg, FB Maschinenbau und Energietechnik (Großer Beleg).

**Anschrift der Verfasser:**

Prof. Dr. rer. nat. habil. H. Franeck  
cand. ing. H. Wulf  
Bergakademie Freiberg  
Fachbereich Maschinenbau und Energietechnik  
Institut für Mechanik und Maschinenelemente  
O-9200 Freiberg