

# Anisotrope mathematisch-mechanische Modelle für Werkstoffe mit von der Belastung abhängigen Eigenschaften

Holm Altenbach, Michael Dankert und Alexander Zoločevskij

## 0. Einleitung

Eine der Hauptrichtungen der Festkörpermechanikforschung ist mit der Erarbeitung effektiver Berechnungsmethoden für die Strukturanalyse unterschiedlicher Bauteile und Konstruktionen verbunden. Dabei haben sich insbesondere numerische Methoden bewährt und es gibt zur Zeit international eine Vielzahl von erfolgreichen Anwendungsfällen. Eine Strukturanalyse ist hauptsächlich mit 3 Problemen verbunden:

- Modellierung der Geometrie der Struktur,
- Modellierung der Belastungen,
- Modellierung des Werkstoffverhaltens.

Aufgrund der Praxisanforderungen konnte man sich bei der Werkstoffmodellierung auf einfachste Modelle beschränken. Die traditionellen Konstruktionsvorschriften sahen eine Auslegung nur im linear-elastischen Bereich vor. Heute wird bei der Einschätzung des Tragverhaltens zunehmend dieser Bereich auch verlassen. Außerdem treten neben den klassischen Werkstoffen immer stärker andere Werkstoffe auf (insbesondere bei Hochtechnologien), die sich nicht im Rahmen linear-elastischer Werkstoffmodelle analysieren lassen.

Bei der Werkstoffmodellierung werden verschiedene Vorgehensweisen praktiziert, wobei sich insbesondere 2 Methoden bewährt haben:

- die Modellierung vom Standpunkt der Rationalen Mechanik und der Materialtheorie (vgl. z. B. [1] bis [3]), sowie
- die mikrostrukturelle Modellierung.

Die letztgenannte Methode ist derzeit im Rahmen der Kontinuumsmechanik schwer praktizierbar und soll daher hier auch nicht weiter besprochen werden.

Im Rahmen der Rationalen Mechanik und der Materialtheorie werden phänomenologische Ansätze gemacht, wobei diese weiter durch eine Reihe von physikalisch motivierten Kriterien eingeschränkt werden. Dabei erhält man sehr allgemeine Beziehungen, die aber bekannte Modelle als Sonderfälle enthalten [4]. Ein wichtiges mathematisches Hilfsmittel im Rahmen dieser Vorgehensweise stellt die Tensorfunktionentheorie dar (vgl. dazu [5] bis [7]). Um den Widerspruch zwischen den allgemeinen Materialgleichungen und den für die Ingenieurpraxis akzeptablen Werkstoffmodellen zu verringern, wird zunehmend versucht, mit rheologischen Modellrepräsentationen zu arbeiten [8] bis [10]. Die Formulierung und Kombination rheologischer Modelle, die das Werkstoffverhalten genauer wiedergeben, ist jedoch ebenfalls keine triviale Aufgabe.

Der nachfolgende Beitrag geht einen zur Materialtheorie entgegengesetzten Weg. Ausgehend von experimentellen Beobachtungen (Anfangsanisotropie, belastungsabhängiges Verhalten) bei traditionellen und neuen Konstruktionswerkstoffen (einige Stahl- und Graugußsorten, Plaste, Graphit-, Beton-, Keramik- und Kompositwerkstoffe) werden unterschiedliche physikalische Zustände (Elastizität, Plastizität, Kriechen) modelliert. Dabei werden nichtlineare physikalische Gleichungen verwendet, die die entsprechenden klassischen Gleichungen der Mechanik anisotroper, deformierbarer fester Körper verallgemeinern. Die erhaltenen Gleichungen verfügen über eine relativ große Allgemeingültigkeit und sind bezüglich ihrer Ableitungsmethodik einheitlich. Der Beitrag stellt eine Fortsetzung der in [11] bis [13] publizierten Arbeiten dar.

## 1. Formulierung der Konstitutivgleichungen

Für eine kontinuumsmechanische Analyse des Werkstoffverhaltens genügt im einfachsten Fall die Definition von kinematischen und dynamischen Feldgrößen sowie den entsprechenden Beziehungen zwischen diesen. Das zu analysierende anisotrope Kontinuum soll durch zwei koaxiale, symmetrische Tensoren gekennzeichnet sein:  $e_{kl}$  (kinematischer Tensor) und  $\sigma_{kl}$  (dynamischer Tensor). Diesem wird ein isotropes Modellkontinuum mit den entsprechenden Tensoren  $\eta_{kl}$  und  $\tau_{kl}$  gegenübergestellt. Als Äquivalenzkriterium wird die Gleichheit der gemischten Invarianten (d. h. der Potentiale) in beiden Kontinua angenommen

$$\sigma_{kl} e_{kl} = \tau_{kl} \eta_{kl} = L \quad (1.1)$$

In [12] wurden für isotrope Kontinua allgemeine physikalische Gleichungen auf der Grundlage von 3 Spannungsinvarianten formuliert. Diese lauteten entsprechend den hier verwendeten Bezeichnungen

$$\eta_{kl} = \lambda \left\{ (AJ_1 \delta_{kl} + C\tau_{kl})/\tau_0 + \alpha B\delta_{kl} + \gamma [DJ_1^2 \delta_{kl} + E\tau_{kn} \tau_{nl} + K/3 (J_2 \delta_{kl} + 2J_1 \tau_{kl})]/\tau_1^2 \right\} \quad (1.2)$$

Dabei bedeuten:

$\delta_{kl}$  – Kroneckersymbol,

A, B, C, D, E, K – Materialkonstanten,

$J_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) – Invarianten des Tensors  $\tau_{kl}$

$$(J_1 = \tau_{kk}, J_2 = \tau_{kl} \tau_{kl}, J_3 = \tau_{kn} \tau_{nl} \tau_{lk}), \text{ sowie } \tau = BJ_1, \tau_0^2 = AJ_1^2 + CJ_2, \tau_1^3 = DJ_1^3 + KJ_1 J_2 + EJ_3,$$

$$\tau_e = \tau_0 + \alpha\tau + \gamma\tau_1.$$

$\alpha, \gamma$  sind Koeffizienten (Zahlenwerte),  $\lambda$  ist ein skalarer Faktor. Die Gleichung (1.2) stellt eine Potentialformulierung dar, d. h., sie kann wie folgt geschrieben werden

$$\eta_{kl} = \lambda \partial \tau_e / \partial \tau_{kl} \quad (1.3)$$

Unter Beachtung der Gleichung (1.1) können folgende Gleichungen postuliert werden

$$\tau_{mn} = M_{klmn} \sigma_{kl}, \quad e_{kl} = M_{klmn} \eta_{mn} \quad (1.4)$$

Die Erfüllung der Gleichung (1.1) ist leicht zu überprüfen.  $M_{klmn}$  ist ein Tensor 4. Stufe, dessen Komponenten Konstanten darstellen. Aufgrund der offensichtlichen Symmetrie reduziert sich die Komponentenanzahl auf 36 ( $M_{klmn} = M_{lkmn} = M_{klnm}$ ).

Unter Verwendung der 1. Gleichung (1.4) lassen sich die Invarianten in anderer Form darstellen

$$J_1 = M_{ijpp} \sigma_{ij}, \quad J_2 = M_{ijpq} M_{klpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

$$J_3 = M_{ijrs} M_{klsp} M_{mnpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn},$$

$$\tau_0^2 = BM_{ijpp} \sigma_{ij}, \quad \tau_0^2 = AM_{ijpp} M_{klqq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + CM_{ijpq} M_{klpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

$$\tau_1^3 = DM_{ijpp} M_{klqq} M_{mnpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + KM_{ijpp} M_{klqr} M_{mnpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + EM_{ijrs} M_{klsp} M_{mnpq} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}. \quad (1.5)$$

Die Multiplikation beider Seiten der Gleichung (1.2) mit  $M_{ijkl}$  und anschließende Summation über sich wiederholende Indizes führt unter Beachtung der Gleichungen (1.4) auf

$$e_{ij} = \lambda \left[ (AM_{ijpp} M_{klqq} \sigma_{kl} + CM_{ijpq} M_{klpq} \sigma_{kl})/\tau_0 + \alpha BM_{ijpp} + \gamma (DM_{ijpp} M_{klqq} M_{mnpq} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + EM_{ijrs} M_{klsp} M_{mnpq} \sigma_{kl} \sigma_{mn} + KM_{ijpp} M_{klqr} M_{mnpq} \sigma_{kl} \sigma_{mn})/\tau_1^2 \right] \quad (1.6)$$

Folgende Tensoren werden eingeführt:

ein Tensor 2. Stufe  $b_{ij}$ , ein Tensor 4. Stufe  $a_{ijkl}$  und ein Tensor 6. Stufe  $c_{ijklmn}$ . Für sie gilt

$$b_{ij} = BM_{ijpp}, \quad a_{ijkl} = AM_{ijpp} M_{klqq} + CM_{ijpq} M_{klpq},$$

$$c_{ijklmn} = DM_{ijpp} M_{klqq} M_{mnpq} + KM_{ijpp} M_{klqr} M_{mnpq} + EM_{ijrs} M_{klsp} M_{mnpq}. \quad (1.7)$$

Werden weiterhin folgende Umbezeichnungen vorgenommen

$$\sigma = \tau, \quad \sigma_0 = \tau_0, \quad \sigma_1 = \tau_1, \quad \sigma_e = \tau_e,$$

erhält man die gemischten Invarianten in der Form

$$\sigma = b_{ij} \sigma_{ij}, \quad \sigma_0^2 = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl},$$

$$\sigma_1^3 = c_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}, \quad \sigma_e = \alpha\sigma + \sigma_0 + \gamma\sigma_1. \quad (1.8)$$

Damit geht die Konstitutivgleichung (1.6) in die nachfolgende Gleichung über

$$e_{ij} = \lambda (a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0 + \alpha b_{ij} + \gamma c_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn} / \sigma_1^2). \quad (1.9)$$

Zur Bestimmung des skalaren Faktors  $\lambda$  wird die Faltung  $\sigma_{ij} e_{ij} = L$  gebildet. Dazu ist Gleichung (1.9) mit  $\sigma_{ij}$  zu multiplizieren, und sich wiederholende Indizes werden summiert. Damit folgt

$$\lambda = L / \sigma_e \quad (1.10)$$

Die Anwendung der Konstitutivgleichung (1.9) ist somit mit der Konkretisierung der Größe  $L$  als Funktion von  $\sigma_e$  und möglicherweise weiteren Strukturparametern  $q_1, q_2, \dots, q_n$  verbunden. Eine solche Konkretisierung ist für jeden physikalischen Zustand des Materials (Elastizität, Plastizität und Kriechen) vorzunehmen.

Die eingeführten Tensoren  $b_{ij}, a_{ijkl}, c_{ijklmn}$  weisen bestimmte Symmetrien auf. Diese ergeben sich aus den Symmetrien für  $M_{ijkl}$  und den Gleichungen (1.6), (1.7)

$$b_{ij} = b_{ji}, \quad a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij},$$

$$c_{ijklmn} = c_{jiklmn} = c_{ijlkmn} = c_{ijklnm} = c_{klijmn} = c_{mnijkl} = c_{ijmnlk} = c_{mnlkij} = c_{klmnij}. \quad (1.11)$$

Damit erhält man folgende Anzahl unabhängiger Konstanten in den Tensoren:  $b_{ij} - 6$ ,  $a_{ijkl} - 21$ ,  $c_{ijklmn} - 56$ . Eine analoge Aussage erhält man bei der Darstellung des nichtlinear-elastischen Werkstoffverhaltens. Werden dabei Reihenentwicklungen realisiert, treten Tensoren unterschiedlicher Stufe auf. Bei Beachtung der Symmetrie des Spannungstensors, des Verzerrungstensors sowie unter der Voraussetzung, daß das Materialmodell auf einer Potentialformulierung beruht, ergeben sich im Falle der allgemeinen Anisotropie die gleichen Zahlenwerte (vgl. auch [14], [15]).

Für orthotrope Materialien erhält man für den Fall, daß die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen der Orthotropie zusammenfallen, folgende Darstellung

$$e_{11} = \lambda [\alpha b_{11} + (a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} + a_{1133} \sigma_{33}) / \sigma_0 + \gamma (c_{111111} \sigma_{11}^2 + c_{112222} \sigma_{22}^2 + c_{113333} \sigma_{33}^2 + 2c_{111122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2c_{111133} \sigma_{11} \sigma_{33} + 2c_{112233} \sigma_{22} \sigma_{33} + 4c_{111212} \sigma_{12}^2 + 4c_{112323} \sigma_{23}^2 + 4c_{113131} \sigma_{31}^2) / \sigma_1^2] \quad (1, 2, 3) \quad (1.12)$$

$$e_{12} = \lambda [2a_{1212} / \sigma_0 + \gamma (4c_{121211} \sigma_{12} \sigma_{11} + 4c_{121222} \sigma_{12} \sigma_{22} + 4c_{121233} \sigma_{12} \sigma_{33} + 8c_{122331} \sigma_{23} \sigma_{31}) / \sigma_1^2] \quad (1, 2, 3)$$

mit

$$\sigma = b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22} + b_{33} \sigma_{33}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= a_{1111} \sigma_{11}^2 + a_{2222} \sigma_{22}^2 + a_{3333} \sigma_{33}^2 + 2a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + 2a_{2233} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2a_{1133} \sigma_{11} \sigma_{33} + 4a_{1212} \sigma_{12}^2 + \\ &+ 4a_{2323} \sigma_{23}^2 + 4a_{3131} \sigma_{31}^2, \quad \sigma_1^3 = c_{111111} \sigma_{11}^3 + c_{222222} \sigma_{22}^3 + c_{333333} \sigma_{33}^3 + 3c_{111122} \sigma_{11}^2 \sigma_{22} + \\ &+ 3c_{111133} \sigma_{11}^2 \sigma_{33} + 3c_{222211} \sigma_{22}^2 \sigma_{11} + 3c_{222233} \sigma_{22}^2 \sigma_{33} + 3c_{333311} \sigma_{33}^2 \sigma_{11} + 3c_{333322} \sigma_{33}^2 \sigma_{22} + \\ &+ 6c_{112233} \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + 12c_{121211} \sigma_{12}^2 \sigma_{11} + 12c_{121222} \sigma_{12}^2 \sigma_{22} + 12c_{121233} \sigma_{12}^2 \sigma_{33} + 12c_{232311} \sigma_{23}^2 \sigma_{11} + \\ &+ 12c_{232322} \sigma_{23}^2 \sigma_{22} + 12c_{232333} \sigma_{23}^2 \sigma_{33} + 12c_{313111} \sigma_{31}^2 \sigma_{11} + 12c_{313122} \sigma_{31}^2 \sigma_{22} + 12c_{313133} \sigma_{31}^2 \sigma_{33} + \\ &+ 48c_{122331} \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{31}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

wobei sich die entsprechenden unabhängigen Tensorkomponenten erwartungsgemäß reduzieren:  $b_{ij} - 3$ ,  $a_{ijkl} - 9$ ,  $c_{ijklmn} - 20$ .

Die Gleichungen (1.9) verändern sich beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem nicht. Die Konstantentensoren für anisotrope Materialien werden nach den bekannten Regeln für Tensoren 2., 4. und 6. Stufe transformiert:

$$b_{ij}' = \alpha_{mi}\alpha_{nj}b_{mn}, \quad a_{ijkl}' = \alpha_{mi}\alpha_{nj}\alpha_{pk}\alpha_{ql}a_{mnpq}, \quad (1.14)$$

$$c_{ijklmn}' = \alpha_{ri}\alpha_{sj}\alpha_{tk}\alpha_{vl}\alpha_{pm}\alpha_{qn}c_{rstvpq},$$

mit  $\alpha_{ij}$  als Richtungskosinus zwischen den Hauptachsen  $x_i$  und den neuen Achsen  $x_j'$ . Im Sonderfall orthotropen Materials und ebenen Spannungszustand lassen sich die Formeln wie folgt angeben

$$\begin{aligned} b_{11}' &= \Psi^2 b_{11} + \xi^2 b_{22}, \quad b_{22}' = \xi^2 b_{11} + \Psi^2 b_{22}, \quad b_{12}' = \Psi \xi b_{11} - \Psi \xi b_{22}, \\ a_{1111}' &= \Psi^4 a_{1111} + \xi^4 a_{2222} + 2\Psi^2 \xi^2 a_{1122} + 4\Psi^2 \xi^2 a_{1212}, \\ a_{2222}' &= \xi^4 a_{1111} + \Psi^4 a_{2222} + 2\Psi^2 \xi^2 a_{1122} + 4\Psi^2 \xi^2 a_{1212}, \\ a_{1122}' &= \Psi^2 \xi^2 a_{1111} + \Psi^2 \xi^2 a_{2222} + (\Psi^4 + \xi^4) a_{1122} - 4\Psi^2 \xi^2 a_{1212}, \\ a_{1112}' &= \Psi^3 \xi a_{1111} - \Psi \xi^3 a_{2222} + (\Psi \xi^3 - \Psi^3 \xi) a_{1122} + (2\Psi \xi^3 - 2\Psi^3 \xi) a_{1212}, \\ a_{2212}' &= \Psi \xi^3 a_{1111} - \Psi^3 \xi a_{2222} + (\Psi^3 \xi - \Psi \xi^3) a_{1122} + (2\Psi^3 \xi - 2\Psi \xi^3) a_{1212}, \\ a_{1212}' &= \Psi^2 \xi^2 a_{1111} + \Psi^2 \xi^2 a_{2222} - 2\Psi^2 \xi^2 a_{1122} + (\Psi^4 + \xi^4 - 2\Psi^3 \xi) a_{1212}, \\ c_{111111}' &= \Psi^6 c_{111111} + \xi^6 c_{222222} + 3\Psi^4 \xi^2 c_{111122} + 3\Psi^2 \xi^4 c_{222211} + 12\Psi^4 \xi^2 c_{121211} + 12\Psi^2 \xi^4 c_{121222}, \\ c_{222222}' &= \xi^6 c_{111111} + \Psi^6 c_{222222} + 3\Psi^2 \xi^4 c_{111122} + 3\Psi^4 \xi^2 c_{222211} + 12\Psi^2 \xi^4 c_{121211} + 12\Psi^4 \xi^2 c_{121222}, \\ c_{111122}' &= \Psi^4 \xi^2 c_{111111} + \Psi^2 \xi^4 c_{222222} + (\Psi^6 + 2\Psi^2 \xi^4) c_{111122} + (\xi^6 + 2\Psi^4 \xi^2) c_{222211} + (4\Psi^2 \xi^4 - 8\Psi^4 \xi^2) c_{121211} + \\ &\quad + (4\Psi^4 \xi^2 - 8\Psi^2 \xi^4) c_{121222}, \\ c_{222211}' &= \Psi^2 \xi^4 c_{111111} + \Psi^4 \xi^2 c_{222222} + (\xi^6 + 2\Psi^4 \xi^2) c_{111122} + (\Psi^6 + 2\Psi^2 \xi^4) c_{222211} + (4\Psi^4 \xi^2 - 8\Psi^2 \xi^4) c_{121211} + \\ &\quad + (4\Psi^2 \xi^4 - 8\Psi^4 \xi^2) c_{121222}, \\ c_{121211}' &= \Psi^4 \xi^2 c_{111111} + \Psi^2 \xi^4 c_{222222} + (\Psi^2 \xi^4 - 2\Psi^4 \xi^2) c_{111122} + (\Psi^4 \xi^2 - 2\Psi^2 \xi^4) c_{222211} + (\Psi^6 - 6\Psi^4 \xi^2 + \\ &\quad + 5\Psi^2 \xi^4) c_{121211} + (\xi^6 - 6\Psi^2 \xi^4 + 5\Psi^4 \xi^2) c_{121222}, \\ c_{121222}' &= \Psi^2 \xi^4 c_{111111} + \Psi^4 \xi^2 c_{222222} + (\Psi^4 \xi^2 - 2\Psi^2 \xi^4) c_{111122} + (\Psi^2 \xi^4 - 2\Psi^4 \xi^2) c_{222211} + \\ &\quad + (\xi^6 + 5\Psi^4 \xi^2 - 6\Psi^2 \xi^4) c_{121211} + (\Psi^6 - 6\Psi^4 \xi^2 + 5\Psi^2 \xi^4) c_{121222}, \\ c_{111112}' &= -\Psi^5 \xi c_{111111} + \Psi \xi^5 c_{222222} + (\Psi^5 \xi - 2\Psi^3 \xi^3) c_{111122} + (2\Psi^3 \xi^3 - \Psi \xi^5) c_{222211} + \\ &\quad + (4\Psi^5 \xi - 8\Psi^3 \xi^3) c_{121211} + (8\Psi^3 \xi^3 - 4\Psi \xi^5) c_{121222}, \\ c_{222212}' &= -\Psi \xi^5 c_{111111} + \Psi^5 \xi c_{222222} + (\Psi \xi^5 - 2\Psi^3 \xi^3) c_{111122} + (2\Psi^3 \xi^3 - \Psi \xi^5) c_{222211} + \\ &\quad + (4\Psi \xi^5 - 8\Psi^3 \xi^3) c_{121211} + (8\Psi^3 \xi^3 - 4\Psi \xi^5) c_{121222}, \\ c_{121212}' &= -\Psi^3 \xi^3 c_{111111} + \Psi^3 \xi^3 c_{222222} + 3\Psi^3 \xi^3 c_{111122} - 3\Psi^3 \xi^3 c_{222211} + (6\Psi^3 \xi^3 - 3\Psi^5 \xi - 3\Psi \xi^5) c_{121211} + \\ &\quad + (3\Psi^5 \xi - 6\Psi^3 \xi^3 + 3\Psi \xi^5) c_{121222}, \\ c_{112212}' &= -\Psi^3 \xi^3 c_{111111} + \Psi^3 \xi^3 c_{222222} + (\Psi^3 \xi^3 - \Psi^5 \xi - \Psi \xi^5) c_{111122} + (\Psi^5 \xi + \Psi \xi^5 - \Psi^3 \xi^3) c_{222211} + \\ &\quad + (8\Psi^3 \xi^3 - 2\Psi^5 \xi - 2\Psi \xi^5) c_{121211} + (2\Psi^5 \xi - 8\Psi^3 \xi^3 + 2\Psi \xi^5) c_{121222}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dabei werden folgende Abkürzungen verwendet

$$\Psi = \cos \varphi, \quad \xi = \sin \varphi, \quad \varphi - \text{Winkel zwischen } x_1, x_1'.$$

Die hier abgeleiteten Konstitutivgleichungen (1.9) und (1.12) gehören zur Klasse der tensoriell-nichtlinearen Gleichungen. Sie haben den Vorteil, daß sie eine große Allgemeingültigkeit besitzen, dafür hat man die bekannten Schwierigkeiten bei der Konstantenermittlung, da dies mit erheblichem Aufwand verbunden sein kann. Nachfolgend werden daher Sonderfälle der Gleichung (1.9) analysiert, die weniger Konstanten enthalten.

Für den Fall, daß im Ausdruck für  $\sigma_e$  (Gl. 1.8)  $\gamma = 0$  gesetzt wird, erhält man statt der Gleichung (1.9) eine tensoriell-lineare Beziehung [16], [17]

$$e_{ij} = \lambda (\alpha b_{ij} + a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0) \quad (1.16)$$

Für den ebenen Spannungszustand ergibt sich hieraus

$$e_{11} = \lambda [\alpha b_{11} + (a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22}) / \sigma_0] \quad (1, 2), \quad (1.17)$$

mit

$$\sigma = b_{11} \sigma_{11} + b_{22} \sigma_{22}, \quad \sigma_0^2 = a_{1111} \sigma_{11}^2 + 2a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22} + a_{2222} \sigma_{22}^2$$

Für den Fall, daß in Gleichung (1.8)  $\alpha = 0$  gesetzt wird, erhält man folgende Konstitutivgleichung

$$e_{ij} = \lambda (a_{ijkl} \sigma_{kl} / \sigma_0 + \gamma c_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn} / \sigma_1^2) \quad (1.18)$$

Diese reduziert sich unter Annahme orthotropen Materials, zweiachsiger Spannungen, sowie

$$\gamma^3 c_{111122} = \gamma^3 c_{111133} = \gamma^3 c_{222211} = \gamma^3 c_{222233} = \gamma^3 c_{333311} = \gamma^3 c_{333322} = 0$$

auf folgende Form

$$e_{11} = \lambda [a_{1111} \sigma_{11} + a_{1122} \sigma_{22} / \sigma_0 + \gamma c_{111111} \sigma_{11}^2 / \sigma_1^2] \quad (1, 2), \quad (1.19)$$

mit

$$\sigma_0^2 = a_{1111} \sigma_{11}^2 + a_{2222} \sigma_{22}^2 + 2a_{1122} \sigma_{11} \sigma_{22},$$

$$\sigma_1^3 = c_{111111} \sigma_{11}^3 + c_{222222} \sigma_{22}^3.$$

**Anmerkung:** Die Bedingung, daß einige Produkte  $\gamma^3 c_{ijklno} = 0$  gesetzt werden können, ist eine Annahme. Damit wird die Gesamtzahl der Konstanten  $c_{ijklmn}$  eingeschränkt (d. h., die Anzahl der benötigten experimentellen Daten wird eingeschränkt). Die getroffene Annahme wird auch durch das Experiment bestätigt.

Die in diesem Abschnitt angeführten Beziehungen lassen sich auf beliebige physikalische Beziehungen anwenden, was nachfolgend exemplarisch gezeigt wird.

## 2. Elastizität

Bei elastischen Deformationen sind in Gleichung (1.9)  $e_{ij}$  und  $\sigma_{ij}$  die Komponenten der Tensoren der elastischen Verzerrungen und Spannungen. Der Faktor  $\lambda$  ist eine Funktion der äquivalenten Spannung  $\sigma_e$ , d. h.

$$\lambda = v(\sigma_e) \quad (2.1)$$

Die einfachsten Varianten sind folgende Funktionen:

$$- \text{Potenzgesetz: } v(\sigma_e) = \sigma_e^n \quad (2.2)$$

$$- \text{hyperbolische Sinusfunktion: } v(\sigma_e) = \sinh(\sigma_e/d) \quad (2.3)$$

$$- \text{Exponentialform: } v(\sigma_e) = \exp(\sigma_e/m) \quad (2.4)$$

$m, n, d$  sind dabei Materialkonstanten.

Die vorgeschlagenen Konstitutivgleichungen können auch für elastisches Werkstoffverhalten oberhalb der Proportionalitätsgrenze verwendet werden. Man kann aber auch andere Darstellungen verwenden. Eine besteht in der Aufspaltung des Verzerrungstensors  $\epsilon_{ij}$  als Summe von linearem ( $h_{ij}$ ) und nichtlinearem ( $e_{ij}$ ) Anteil, d. h.

$$\epsilon_{ij} = h_{ij} + e_{ij}. \quad (2.5)$$

Die Komponenten  $h_{ij}$  werden aus dem Hookeschen Gesetz ermittelt

$$h_{ij} = A_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (2.6)$$

wobei  $A_{ijkl}$  der entsprechende Nachgiebigkeitstensor ist. Die Komponenten  $e_{ij}$  werden entsprechend Gleichung (1.9) bestimmt. Bei geringem Spannungsniveau gilt  $e_{ij} \ll h_{ij}$ , und man kann für  $\epsilon_{ij} \approx h_{ij}$  setzen. Diese Aussage wird auch durch das Experiment bestätigt. Der Elastizitätsmodul bei Zug und Druck ist im Anfangsbereich der Spannungs-Verzerrungs-Diagramme gleich. Bei höherem Spannungsniveau gilt  $e_{ij} \gg h_{ij}$  und das Werkstoffverhalten wird hauptsächlich durch die nichtlinearen Komponenten  $e_{ij}$  definiert. Diese geben insbesondere den Einfluß der Belastungsart wieder.

### 3. Elastisch-plastisches Verhalten

Plastisches Materialverhalten kann durch die inkrementelle Theorie oder die Deformationstheorie beschrieben werden. Im Rahmen der Fließtheorie ist in den Konstitutivgleichungen (1.9), (1.10)  $e_{ij} = \dot{P}_{ij}$  zu setzen ( $\dot{P}_{ij}$ -Komponenten des Tensors der plastischen Verzerrungsgeschwindigkeiten). Weiterhin sind  $\sigma_{ij}$  die Komponenten des Spannungstensors,  $L$  die spezifische Leistung der dissipierten Energie und  $\sigma_e$  die äquivalente Spannung. Der Punkt über dem Formelzeichen bedeutet Ableitung nach dem Belastungsparameter  $t$ .

Als Verfestigungsmaß wird  $q = \int L / \sigma_e dt$  verwendet. Die Plastizitätsbedingung lautet damit

$$\sigma_e = \varphi(q) \quad (3.1)$$

Bei  $\sigma_e < \varphi(q)$  treten nur elastische Verzerrungen auf, daher ist  $L = 0$ . Bei Erfüllung von (3.1) und  $\dot{\sigma}_e > 0$  (Belastung) ist  $L > 0$ . Bei Erfüllung von (3.1) und  $\dot{\sigma}_e \leq 0$  gilt  $L = 0$ , d. h., es tritt Entlastung bzw. neutrale Belastung auf.

Bei einfacher Belastung ändern sich die Komponenten des Spannungstensors  $\sigma_{ij}$  proportional zum Parameter  $t$ . In diesem Fall kann die inkrementelle Theorie durch die Deformationstheorie ersetzt werden, wobei sich die Komponenten des Verzerrungstensors  $\epsilon_{ij}$  im elastisch-plastischen Material aus einem elastischen Anteil  $h_{ij}$  und einem plastischen Anteil  $P_{ij}$  zusammensetzen

$$\epsilon_{ij} = h_{ij} + P_{ij} \quad (3.2)$$

$h_{ij}$  wird dann aus Gleichung (1.9) bestimmt, wobei

$$e_{ij} = h_{ij}, \quad a_{ijkl} = a_{ijkl}^0, \quad b_{ij} = b_{ij}^0, \quad c_{ijklmn} = c_{ijklmn}^0$$

gilt und der skalare Faktor  $\lambda$  aus (2.1) ermittelt werden kann.

Die Komponenten  $P_{ij}$  werden ebenfalls aus (1.9) bestimmt, wobei

$$e_{ij} = P_{ij}, \quad a_{ijkl} = a_{ijkl}^*, \quad b_{ij} = b_{ij}^*, \quad c_{ijklmn} = c_{ijklmn}^*,$$

$$\sigma = \sigma^* = b_{ij}^* \sigma_{ij}, \quad \sigma_0 = \sigma_0^* = \sqrt{a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}},$$

$$\sigma_1 = \sigma_1^* = \sqrt[3]{c_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}}, \quad \sigma_e = \sigma_e^* = \alpha^* \sigma^* + \sigma_0^* + \gamma^* \sigma_1^*,$$

$$\alpha^* = \alpha, \quad \gamma^* = \gamma, \quad \lambda = \chi(\sigma_e^*).$$

Im einfachsten Fall wird die Funktion  $\chi(\sigma_e^*)$  in Analogie zu den Gleichungen (2.2) – (2.4) definiert.

Zur Illustration wird ein Beispiel aus [16] betrachtet. Im Experiment ergab sich für Grafit ein zweiachsiger Spannungszustand, der Werkstoff besaß außerdem Orthotropieeigenschaften und unterschiedliches Verhalten bei Zug und Druck für elastische und plastische Verzerrungen. Die theoretischen Berechnungen erfolgten nach 2 Methoden entsprechend den tensoriell-linearen Beziehungen (1.17) und den tensoriell-nichtlinearen Beziehungen (1.19). Ausgehend von den einachsigen Versuchsergebnissen bezüglich der Hauptanisotropieachsen [3] konnte für den elastischen Bereich  $v(\sigma_e) = \sigma_e$  und dem plastischen Bereich  $\chi(\sigma_e^*) = (\sigma_e^*)^{2.47}$  gesetzt werden. Im Fall der Gleichungen (1.17) erhält man folgende Materialkonstanten

$$a_{1111}^0 = 11.56 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-1}, \quad a_{2222}^0 = 89.78 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1},$$

$$a_{1122}^0 = -20.85 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1}, \quad \alpha b_{11}^0 = -14.68 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-0.5},$$

$$\alpha b_{22}^0 = -92.64 \cdot 10^{-4} \text{ GPa}^{-0.5}, \quad a_{1111}^* = 49.51 \cdot 10^{-1} \text{ GPa}^{-2m},$$

$$a_{2222}^* = 27.06 \cdot 10^{-1} \text{ GPa}^{-2m}, \quad a_{1122}^* = 10.08 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-2m},$$

$$\alpha^* b_{11}^* = 19.16 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-m}, \quad \alpha^* b_{22}^* = -45.29 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-m},$$

$$m = n/(n+1), \quad n = 2.47.$$

In den Gleichungen (1.19) gilt

$$a_{1111}^0 = 11.56 \cdot 10^{-2} \text{ GPa}^{-1}, \quad a_{2222}^0 = 89.78 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1},$$

$$a_{1122}^0 = -17.70 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-1},$$

$$\gamma^3 c_{111111}^0 = -3.165 \cdot 10^{-6} \text{ GPa}^{-1.5},$$

$$\gamma^3 c_{222222}^0 = -7.949 \cdot 10^{-7} \text{ GPa}^{-1.5},$$

$$a_{1111}^* = 49.51 \cdot 10^{-1} \text{ GPa}^{-2m}, \quad a_{2222}^* = 27.06 \cdot 10^{-1} \text{ GPa}^{-2m},$$

$$a_{1122}^* = 0, \quad \gamma^3 c_{111111}^* = 7.806 \cdot 10^{-3} \text{ GPa}^{-3m},$$

$$\gamma^3 c_{222222}^* = -9.426 \cdot 10^{-5} \text{ GPa}^{-3m}, \quad m = n/(n+1), \quad n = 2.47.$$

**Tabelle 1**

Vergleich der experimentell ermittelten Werte und der berechneten Werte [nach Gl. (1.17)] für die Verzerrungen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  bei unterschiedlichen Spannungen (Material Grafit)

$ \sigma_{11} $ MPa	$\sigma_{22}$ MPa	$ \epsilon_1  \cdot 10^3$	$\epsilon_2 \cdot 10^3$	$ \epsilon_{11}  \cdot 10^3$	$\epsilon_{22} \cdot 10^3$	$ h_{11}  \cdot 10^3$	$h_{22} \cdot 10^3$	$ P_{11}  \cdot 10^3$	$P_{22} \cdot 10^3$
2,76	32,34	0,80	3,40	1,10	3,80	1,10	2,80	0	1,00
15,51	23,52	2,80	3,04	3,10	2,92	2,43	2,30	0,67	0,62
16,82	25,57	3,10	3,40	3,40	3,30	2,60	2,50	0,80	0,80
23,73	23,52	4,65	3,43	4,90	3,29	3,44	2,46	1,46	0,83
24,22	23,52	4,85	3,43	5,02	3,31	3,50	2,47	1,52	0,84

**Tabelle 2**

Vergleich der experimentell ermittelten Werte und der berechneten Werte [nach Gl. (1.19)] für die Verzerrungen  $\epsilon_1, \epsilon_2$  bei unterschiedlichen Spannungen (Material Grafit)

$ \sigma_{11} $ MPa	$\sigma_{22}$ MPa	$ \epsilon_1  \cdot 10^3$	$\epsilon_2 \cdot 10^3$	$ \epsilon_{11}  \cdot 10^3$	$\epsilon_{22} \cdot 10^3$	$ h_{11}  \cdot 10^3$	$h_{22} \cdot 10^3$	$ P_{11}  \cdot 10^3$	$P_{22} \cdot 10^3$
2,76	32,34	0,80	3,40	1,02	3,84	0,87	2,77	0,15	1,07
15,51	23,52	2,80	3,04	3,53	2,79	2,80	2,09	0,73	0,70
16,82	25,57	3,10	3,40	3,96	3,11	3,06	2,25	0,90	0,86
23,73	23,52	4,65	3,43	5,03	3,50	3,47	2,55	1,56	0,95
24,22	23,52	4,85	3,43	5,14	3,53	3,52	2,56	1,62	0,97

In den Tabellen 1 und 2 sind die entsprechend den Gleichungen (1.17) und (1.19) berechneten Verzerrungen für bestimmte Spannungswerte angegeben. Die theoretischen und experimentellen Ergebnisse zeigen befriedigende Übereinstimmung. Es konnten jedoch keine Vorteile der einen oder anderen Konstitutivgleichung festgestellt werden.

#### 4. Kriechen

Die Beziehungen für anisotropes Kriechen ergeben sich aus Gleichung (1.9) unter der Annahme  $e_{ij} = \dot{P}_{ij}$  ( $\dot{P}_{ij}, \sigma_{ij}$ -Komponenten der Tensoren der Kriechgeschwindigkeitsverzerrungen und der Spannungen).  $L$  ist die spezifische Leistung der dissipierten Kriechenergie und  $\sigma_e$  die äquivalente Spannung. Der Punkt stellt die Differentiation nach der Zeit  $t$  dar. Die Beschreibung der Materialverfestigung soll mit Hilfe des Parameters  $q$  erfolgen. Dieser wird durch eine kinetische Gleichung definiert

$$dq/dt = R \quad (4.1)$$

Der rechte Teil in Gleichung (4.1) ist nicht eindeutig definierbar. Beispielsweise kann  $R = 1$ ,  $R = L$  oder  $R = L/\sigma_e$  angenommen werden. Hier wird  $L/\sigma_e = \xi(\sigma_e)w(q)$  gesetzt. Bei einfachen Situationen werden die Funktionen  $\xi(\sigma_e)$  und  $w(q)$  analog den Gleichungen (2.2) – (2.4) postuliert. Im Falle sich nicht verfestigendem Materials ist  $w = 1$  zu setzen.

Zur Begründung der aufgestellten Gleichungen werden experimentelle Daten zum Kriechen der Legierung D16T bei einer Temperatur von 523 K betrachtet [17], [18]. Die Experimente führten auf  $L/\sigma_e = \sigma_e^n$ ,  $n = 6.5$  und die Konstanten

$$a_{1111} = 1.58 \cdot 10^m \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r}, \quad a_{2222} = 2.03 \cdot 10^m \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r},$$

$$a_{1122} = 7.63 \cdot 10^{m+k+r} \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r}, \quad \alpha b_{11} = 1.74 \cdot 10^{m-k} \text{ MPa}^k \text{ h}^r,$$

$$\alpha b_{22} = 9.57 \cdot 10^{m+r} \text{ MPa}^k \text{ h}^r \quad [\text{für die Gleichungen (1.17)}]$$

$$a_{1111} = 1.58 \cdot 10^m \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r}, \quad a_{2222} = 2.78 \cdot 10^m \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r},$$

$$a_{1122} = -8.01 \cdot 10^{m+k+r} \text{ MPa}^{2k} \text{ h}^{2r},$$

$$\gamma^3 c_{111111} = 5.27 \cdot 10^{3m-3k} \text{ MPa}^{3k} \text{ h}^{3r},$$

$$\gamma^3 c_{222222} = -3.02 \cdot 10^{2m+r} \text{ MPa}^{3k} \text{ h}^{3r} \quad [\text{für die Gleichungen (1.19)}]$$

Dabei ist  $r = -1/(n+1)$ ,  $k = nr$ ,  $m = 5k + 3r$ . In Tabelle 3 werden Vergleichswerte (Experiment und Theorie) angeführt. Auch in diesem Fall gibt es befriedigende Übereinstimmung, jedoch können auch hier keine Vorteile der Gleichungen (1.17) bzw. der Gleichungen (1.19) erkannt werden.

**Tabelle 3**

Vergleich der experimentell ermittelten Werte für die Verzerrungsgeschwindigkeiten  $\dot{P}_1, \dot{P}_2$  mit den berechneten Werten bei verschiedenen Spannungen

$\sigma_{11} \cdot 10^{-1}$	$\sigma_{22} \cdot 10^{-1}$	$\dot{P}_1 \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>	$\dot{P}_2 \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>	$\dot{P}_{11} \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>	$\dot{P}_{22} \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>	$\dot{P}_{11} \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>	$\dot{P}_{22} \cdot 10^3$ h <sup>-1</sup>
MPa		Experiment		nach Gleichung (1.17)		nach Gleichung (1.19)	
-10,98	5,49	-1,60	1,60	-0,93	0,91	-0,89	0,84
- 8,06	8,06	-0,92	1,38	-0,82	1,05	-0,78	1,01
7	14	0	1,65	0,08	1,44	0	1,34
- 3,76	11,28	-0,79	1,59	-0,76	1,49	-0,73	1,47
12,4	12,4	0,59	1,18	0,71	1,04	0,38	0,79

## 5. Ausblick

Aus den im Artikel enthaltenen Darlegungen lassen sich offene Probleme aufzeigen, die einer weiteren Klärung bedürfen. Dazu gehört u. a. eine Begründung (möglichst physikalisch) der Auswahl von bestimmten Komponenten der Materialtensoren. Offensichtlich sind bestimmte Komponenten bei einigen Praxisproblemen wesentlicher als andere. Damit im Zusammenhang stehen auch Fragen der Identifikation der Materialkennwerte im Experiment. Ebenso offen ist die Einbeziehung weiterer Materialeigenschaften in die Materialmodelle, wobei insbesondere auch die Veränderungen im Material infolge Alterung bzw. Schädigung modellierbar sein müssten.

## LITERATUR

- [ 1 ] Truesdell, C., Noll, W.: The Non-linear Field Theories of Mechanics. In: Handbuch der Physik (Herausgeber S. Flügge). Berlin (West) u. a.: Springer, 1965. : Vol. III/3.
- [ 2 ] Müller, I.: Thermodynamik – Die Grundlagen der Materialtheorie. Düsseldorf: Bertelsmann Universitätsverlag 1973.
- [ 3 ] Пальмов, В. А.: Колебания упруго-пластических тел. Москва: Наука, 1976.
- [ 4 ] Schneider, M.: Satellitengeodäsie – Grundlagen. Mannheim u. a.: B. I. Wissenschaftsverlag, 1988.
- [ 5 ] Betten, J.: Tensorrechnung für Ingenieure. Stuttgart: B. G. Teubner, 1987.
- [ 6 ] Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics (ed. by J. P. Boehler). Wien u. a.: Springer, 1987 (CISM-Cours Nr. 292).
- [ 7 ] Лурье, А. И.: Нелинейная теория упругости. Москва: Наука, 1980.
- [ 8 ] Palmow, W. A.: Rheologische Modelle für Materialien bei endlichen Deformationen. In: Technische Mechanik. Magdeburg 5 (1984) 4. S. 20 – 31.
- [ 9 ] Lemaitre, J., Chaboche, J.-L.: Mécanique des matériaux solides. Paris: Dunod, 1985.
- [ 10 ] Krawietz, A.: Materialtheorie – Mathematische Beschreibung des phänomenologischen thermomechanischen Verhaltens. Berlin (West) u. a.: Springer, 1986.
- [ 11 ] Zoločevskij, A., Konkin, V., Moračkovskij, O., Koczyk, S.: Eine Theorie zur nichtlinearen Verformung anisotroper Körper und ihre Anwendung auf die Berechnung des Kriechverhaltens dünner Schalen. In: Technische Mechanik 6 (1985) 4, S. 27 – 36.
- [ 12 ] Zoločevskij, A. A.: Kriechen von Konstruktionselementen aus Materialien mit von der Belastung abhängigen Charakteristiken. In: Technische Mechanik 9 (1988) 3, S. 177 – 184.
- [ 13 ] Altenbach, H., Dankert, M., Zoločevskij, A. A.: Konstitutive Gleichungen der nichtlinearen Elastizitätstheorie auf der Grundlage von 3 Invarianten des Spannungstensors. – In: Technische Mechanik 10 (1989) 4, S. 211.
- [ 14 ] Malmeisters, A., Tamuzs, V., Teters, G.: Mechanik der Polymerwerkstoffe. Berlin: Akademie-Verlag, 1977.
- [ 15 ] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Berlin: Akademie-Verlag, 1983.
- [ 16 ] Золочевский, А. А.: К тензорной связи в теориях упругости и пластичности анизотропных композитных материалов, разносопротивляющих растяжению и сжатию. В: Механика композитных материалов. Рига (1985) 1, с. 53 – 58.
- [ 17 ] Золочевский, А. А.: Об учете разносопротивляемости и теории ползучести изотропных и анизотропных материалов. В: Журнал прикладной механики и технической физики. Москва (1982) 4, с. 140 – 144.
- [ 18 ] Никитенко, А. Ф., Цвелодуб, И. Ю.: О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие. В: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1979, вып. 43, с. 69 – 78.

### Anschrift der Verfasser:

Dr. sc. techn. H. Altenbach  
Sektion Technologie der metallverarbeitenden Industrie  
WB Werkstofftechnik

M. Dankert  
Sektion Maschinenbau  
WB Festkörpermechanik

Technische Universität „Otto von Guericke“  
PSF 124  
Magdeburg  
DDR – 3010

к. т. н., доц. А. А. Золочевский  
кафедра „Динамика и прочность машин“  
Харьковский политехнический институт им. Ленина  
ул. Фрунзе  
Харьков  
СССР – 310 018