

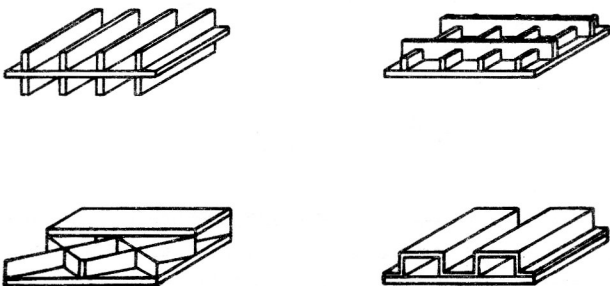
# Grundlagen einer verallgemeinerten halbmomentenfreien Schalentheorie für dünnwandige, anisotrope Konstruktionen

Hoim Altenbach, Johannes Altenbach, Volker Matzdorf

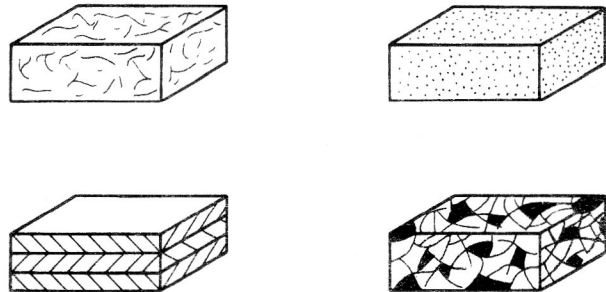
## 0. Einleitung

Dünnwandige räumliche Konstruktionen werden in vielen Bereichen der Technik, so zum Beispiel im Schiffbau, in der Luft- und Raumfahrt, im Bauwesen, aber auch im Maschinenbau, erfolgreich eingesetzt. Die Anwendungsbreite läßt sich u. a. mit den zunehmenden Forderungen nach leichteren und materialökonomischen Konstruktionen erklären. Eine Reihe solcher Konstruktionen lassen sich im Rahmen einer globalen Strukturanalyse als verallgemeinerte Stabmodelle darstellen. In [1] und [2] werden entsprechende Modelle für die statische Strukturanalyse bzw. für die Eigenschwingungsanalyse dünnwandiger Konstruktionen abgeleitet und mit bekannten Lösungen verglichen. Dabei werden ausschließlich prismatische Stabschalen betrachtet, d. h., die einzelnen Schalenstreifen sind eben und haben einen Rechteckgrundriß. Bei der Materialmodellierung wird von einem homogenen, isotropen, linear-elastischen Werkstoff ausgegangen.

Im modernen Leichtbau werden heute zunehmend auch Konstruktionselemente verwendet, deren Modellierung nicht mehr mit den in [1], [2] getroffenen Annahmen über das Materialverhalten realisierbar ist. Zu diesen Konstruktionselementen gehören dünnwandige Stäbe oder Stabschalen mit konstruktiv- oder materialbedingter Anisotropie im Steifigkeitsverhalten. So können Verstärkungsrippen in verschiedenen Richtungen, ein- bzw. beidseitig oder auch kreuzweise auf einer Blechwand zum Erhöhen der Biegesteifigkeit bzw. der Stabilität angebracht sein. Beispiele für konstruktive Ausführungen sind auf Bild 1 dargestellt. Eine ähnliche Situation kann sich ergeben, wenn die Schalenstreifen auf einem Verbundwerkstoff (Kompositwerkstoff), aus Werkstoffverbunden (z. B. Schichtverbunden) bzw. aus Faserverbunden vom Langfasertyp, die schichtweise aufgebaut werden, bestehen. Entsprechende Beispiele



**Bild 1**  
Beispiele für konstruktive Anisotropien:  
Längsrippenblech, Kreuzrippenblech, Sandwich, Faltblech



**Bild 2**  
Beispiele für Materialanisotropien:  
Faserkomposit, Teilchenkomposit, Schichtkomposit, gefüllter Komposit

können Bild 2 entnommen werden. Wichtigste Besonderheit bei der Modellierung der beiden hier aufgeführten Gruppen ist die notwendige Erfassung der Anisotropieeigenschaften.

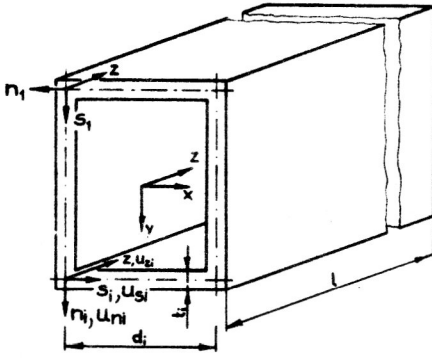
Auch in der neueren Fachliteratur gibt es zahlreiche Beispiele, anisotrope Stabmodelle bei unterschiedlichen Annahmen zu entwickeln. Dies geschieht entweder über Zusatzterme in den Bernoullischen bzw. St.-Venantschen Stabmodellen oder über Erweiterungen anderer klassischer Modelle (vgl. [3] bis [5]). Vielfach werden jedoch die Betrachtungen auf einfachste Fälle beschränkt.

Nachfolgend werden im Rahmen der linearen Elastizitätstheorie die Gleichungen einer allgemeinen klassischen Theorie dünnwandiger anisotroper biegesteifer Falwerke abgeleitet, die die klassischen Gleichungen dünnwandiger isotroper Stabtheorien als Sonderfälle enthalten. Betrachtet werden ausschließlich lange, aus geraden Abschnitten bestehende stabförmige Falwerke mit beliebig offenen oder geschlossenen Querschnitten. Die Anisotropieeigenschaften können sich mit der Profilkordinate und der Stablängskordinate abschnittsweise ändern. Der Aufbau über die Dicke sei symmetrisch zur jeweiligen Wandmittelfläche.

Einen weiteren Schwerpunkt stellt die Diskussion der Materialformulierung für die in den Bildern 1 und 2 dargestellten Wandformen dar.

## 1. Das elastische Potential für die anisotrope Stabschale

Betrachtet wird eine anisotrope prismatische Stabschale, die aus  $n$  dünnen, ebenen, im Grundriß rechteckigen Schalenstreifen besteht. Für die Längskan-



**Bild 3**  
Querschnitt einer Stabschale:  
Abmessungen, globale und lokale Koordinaten, Verschiebungen

ten sei vorausgesetzt, daß sie entweder biegesteif oder gelenkig miteinander verbunden sind. Ein entsprechendes Beispiel für eine solche Konstruktion ist auf Bild 3 dargestellt.

Zur geometrischen Beschreibung der Stabschale werden ein globales und  $n$  lokale Koordinatensysteme eingeführt. Das globale Koordinatensystem ist das kartesische  $x, y, z$ -System. Die  $x$ - und die  $y$ -Achse sind beliebig in den Querschnitt gelegte Achsen, die  $z$ -Achse eine beliebig wählbare Stablängsachse. Die Anzahl der lokalen Koordinatensysteme ist  $n$ , d. h., für den  $i$ -ten Streifen wird ein lokales System  $z, s_i, n_i$  definiert. Dabei ist  $z, s_i, n_i$  ebenfalls ein kartesisches System:  $s_i$  ist die Kontur- oder Profilkordinate,  $n_i$  die Koordinate in Normalenrichtung zur Schalenmittelfläche (SMF), die durch  $z$  und  $s_i$  definiert wird. Der Index  $i$  kann die Werte von 1 bis  $n$  annehmen.

Entsprechend den eingeführten lokalen Koordinaten erhält man für die Verschiebungen der  $i$ -ten SMF

$$\begin{aligned} u_{zi} &= u_{zi}(z, s_i), & u_{si} &= u_{si}(z, s_i), \\ u_{ni} &= u_{ni}(z, s_i) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dabei sind  $u_{zi}, u_{si}$  die Verschiebungen in der SMF und  $u_{ni}$  die senkrecht dazu (Durchbiegung).

Folgende Belastungen werden für den  $i$ -ten Streifen zugelassen:

– Flächenlasten (auf der SMF des  $i$ -ten Schalenstreifens)

$$\begin{aligned} p_{zi} &= p_{zi}(z, s_i), & p_{si} &= p_{si}(z, s_i), \\ p_{ni} &= p_{ni}(z, s_i) \end{aligned} \quad (1.2)$$

– Randlasten (Linienlasten an den Rändern  $z = 0$  bzw.  $z = l$ )

$$\begin{aligned} q_{zi}|_{z=0} &= q_{zi}(0, s_i), & q_{zi}|_{z=l} &= q_{zi}(l, s_i), \\ q_{si}|_{z=0} &= q_{si}(0, s_i), & q_{si}|_{z=l} &= q_{si}(l, s_i), \\ q_{ni}|_{z=0} &= q_{ni}(0, s_i), & q_{ni}|_{z=l} &= q_{ni}(l, s_i). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Das anisotrope Elastizitätsgesetz lautet für den  $i$ -ten Streifen (vgl. [6], [7])

$$Q_i = C_i \cdot E_i. \quad (1.4)$$

Dabei enthält der Spaltenvektor  $Q_i$  die verallgemeinerten Kraftgrößen

$$Q_i = [N_i, M_i]^T \quad (1.5)$$

mit dem Schnittkräftevektor (nur Kräfte in der SMF)

$$N_i = [N_{zi}, N_{si}, N_{zsi}]^T \quad (1.6)$$

und dem Schnittmomentenvektor

$$M_i = [M_{zi}, M_{si}, M_{zsi}]^T, \quad (1.7)$$

der Spaltenvektor  $E_i$  die Deformationsgrößen

$$E_i = [\epsilon_i, \kappa_i]^T \quad (1.8)$$

mit den Dehnungen und Gleitungen in der SMF

$$\epsilon_i = [\epsilon_{zi}, \epsilon_{si}, \epsilon_{zsi}]^T \quad (1.9)$$

und den Krümmungen und Drillungen der SMF

$$\kappa_i = [\kappa_{zi}, \kappa_{si}, \kappa_{zsi}]^T. \quad (1.10)$$

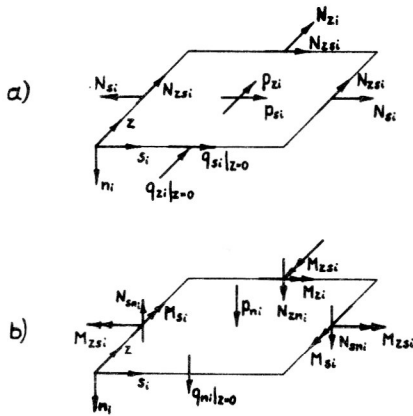
$C_i$  ist die Steifigkeitsmatrix (6 x 6-Matrix)

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{Si} & C_{Ki} \\ C_{Ki} & C_{Pi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11i} & C_{12i} & C_{13i} & C_{14i} & C_{15i} & C_{16i} \\ C_{12i} & C_{22i} & C_{23i} & C_{15i} & C_{25i} & C_{26i} \\ C_{13i} & C_{23i} & C_{33i} & C_{16i} & C_{26i} & C_{36i} \\ C_{14i} & C_{15i} & C_{16i} & C_{44i} & C_{45i} & C_{46i} \\ C_{15i} & C_{25i} & C_{26i} & C_{45i} & C_{55i} & C_{56i} \\ C_{16i} & C_{26i} & C_{36i} & C_{46i} & C_{56i} & C_{66i} \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Die Schnittkräfte und -momente werden aus den Spannungen wie folgt berechnet ( $\sigma_{zi}, \sigma_{si}$  Normalspannungen,  $\tau_{zsi}$  Tangentialspannungen)

$$\begin{aligned} N_{zi} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \sigma_{zi} dn_i, & M_{zi} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \sigma_{zi} n_i dn_i, \\ N_{si} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \sigma_{si} dn_i, & M_{si} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \sigma_{si} n_i dn_i, \\ N_{zsi} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \tau_{zsi} dn_i, & M_{zsi} &= \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \tau_{zsi} n_i dn_i. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ihre Orientierungen sind aus Bild 4 ersichtlich. In diesem Bild sind zur Vollständigkeit auch die Schubresultierenden  $N_{zni}$  und  $N_{sni}$  mit angegeben. Sie gehen aber nicht mit in das elastische Potential ein, da die entsprechenden Verformungen  $\epsilon_{zni}$  und  $\epsilon_{sni}$  im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden.



**Bild 4**  
Schnittgrößen des Scheibenzustandes (a) und des Plattenzustandes (b)

Als geometrische Beziehungen gelten entsprechend der Scheibentheorie

$$\epsilon_{zi} = u'_{zi}, \quad \epsilon_{si} = u'_{si}, \quad \epsilon_{zsi} = u_{zi} + u'_{si} \quad (1.13)$$

bzw. der Kirchhoffschen Plattentheorie

$$\kappa_{zi} = -u''_{ni}, \quad \kappa_{si} = -u''_{ni}, \quad \kappa_{zsi} = -2u''_{ni} \quad (1.14)$$

mit folgenden Abkürzungen für die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z} ( ) = ( )', \quad \frac{\partial}{\partial s} ( ) = ( )''$$

Die hier angeführten Grundgleichungen (1.1) bis (1.14) haben folgenden Gültigkeitsbereich. Bezüglich der Geometrie entsprechen sie den Annahmen für dünne Flächentragwerke, d. h. u. a., daß alle Hypothesen der Kirchhoffschen Plattentheorie erfüllt sein müssen. Außerdem sind im allgemeinen Fall Platten- und Scheibenwirkung miteinander gekoppelt [vgl. (1.4), (1.5), (1.8) und (1.11)]. In der Steifigkeitsmatrix (1.11) lassen sich Untermatrizen (3 x 3 Matrizen) wie folgt zusammenfassen:

$C_{Si}$  – Matrix der MembranstEIFigkeiten (Zug/Drucksteifigkeiten, Schubsteifigkeit bezüglich der Gleitungen in der SMF) bzw. Scheibenquadrant,

$C_{Pi}$  – Matrix der Plattensteifigkeiten (Biege- und Drillsteifigkeiten bzgl. der SMF) bzw. Plattenquadrant,

$C_{Ki}$  – Matrix der Koppelsteifigkeiten (Kopplung des Scheiben- und Plattenzustandes bzgl. der SMF) bzw. Koppelquadrant.

Der Ermittlung der einzelnen Matrixelemente der Steifigkeitsmatrix (1.11) sind zahlreiche Arbeiten gewidmet, so daß hier exemplarisch auf [6], [7], [8] verwiesen werden kann. Der eingeführte Index  $i$  deutet darauf hin, daß prinzipiell jeder Schalenstreifen einem anderen anisotropen elastischen Materialgesetz unterliegen kann. In den weiteren Ausführungen soll davon ausgegangen werden, daß das anisotrope Materialgesetz innerhalb

des jeweiligen Schalenstreifens konstant ist. Dies hat die Konsequenz, daß beispielsweise Versteifungen über den Streifen „verschmiert“ werden und stetig in die Modelle eingehen.

Die Annahme der Kirchhoff-Hypothesen hat aber auch für die Anwendung des Materialgesetzes und insbesondere der Steifigkeitsmatrix (1.11) Konsequenzen. Die Kirchhoff-Theorie hat sich für dünne Platten aus isotropem linear-elastischem Material bewährt, d. h. für Platten aus traditionellen Konstruktionswerkstoffen. Erfahrungen verschiedener Autoren zeigen (vgl. u. a. [14]), daß u. a. für anisotropes Materialverhalten von Schichtlaminaten, bei denen die Unterschiede im Elastizitätsmodul je Schicht mehr als eine Zehnerpotenz betragen, die Voraussetzungen für die Kirchhoff-Theorie nicht mehr erfüllt sind. In diesen Fällen müssen verbesserte Theorien [15] eingesetzt werden, die jedoch nicht Gegenstand der Diskussion in diesem Beitrag sind.

Die Steifigkeitsmatrix (1.11) kann auch Nullelemente haben, entsprechende Sonderfälle werden noch diskutiert. In diesem Beitrag werden nur Materialmodelle betrachtet, für die die Koppelsteifigkeiten identisch Null sind. Dies entspricht einer Entkopplung von Scheiben- und Plattenzustand. Für isotropes Steifigkeitsverhalten verschwinden die Koppelsteifigkeiten bei symmetrischem Wandaufbau bzw. bei geeigneter Wahl der Bezugsfläche. Für anisotropes Steifigkeitsverhalten verschwinden die Koppelsteifigkeiten nur bei symmetrischem Wandaufbau. Bei nichtsymmetrischem Wandaufbau kann eine Bezugsfläche, bei der alle Koppelsteifigkeiten verschwinden, nicht gefunden werden. Für einzelne Steifigkeiten ist dies möglich (vgl. [9], [10]).

Entsprechend den in diesem Kapitel gemachten Voraussetzungen erhält man das elastische Potential der Stabschale durch Summation der elastischen Potentiale aller  $n$  Schalenstreifen in der Form der Gleichung 1.15.

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \int_0^{d_i} C_{11i} u_{zi}'^2 + C_{22i} u_{si}'^2 + C_{33i} (u_{zi}' + u_{si}')^2 \\ & + C_{44i} u_{zi}''^2 + C_{55i} u_{si}''^2 + 4C_{66i} u_{zi}''^2 \\ & + 2C_{12i} u_{zi}' u_{si}' + 2C_{13i} u_{zi}' (u_{zi}' + u_{si}') \\ & + 2C_{23i} u_{si}' (u_{zi}' + u_{si}') + 2C_{45i} u_{ni}'' u_{ni}'' \\ & + 4C_{46i} u_{ni}'' u_{ni}'' + 4C_{56i} u_{ni}'' u_{ni}'' \\ & - 2(p_{zi} u_{zi} + p_{si} u_{si} + p_{ni} u_{ni}) ds_i dz \\ & - \int_0^{d_i} [(q_{zi} u_{zi} + q_{si} u_{si} + q_{ni} u_{ni})]_{z=0} \\ & + (q_{zi} u_{zi} + q_{si} u_{si} + q_{ni} u_{ni})]_{z=d_i} ds_i \end{aligned} \quad (1.15)$$

## 2. Reduktion der zweidimensionalen Aufgabe und Matrizenformulierung für das elastische Potential

Durch geeignete Produktansätze für die Verschiebungen

$$u_{zi}(z, s_i) = \sum_{(j)} U_j(z) \varphi_{ji}(s_i) = U^T \varphi_i = \varphi_i^T U$$

$$u_{si}(z, s_i) = \sum_{(k)} V_k(z) \psi_{ki}(s_i) = V^T \psi_i = \psi_i^T V \quad (2.1)$$

$$u_{ni}(z, s_i) = \sum_{(k)} V_k(z) \xi_{ki}(s_i) = V^T \xi_i = \xi_i^T V$$

mit den Koordinatenfunktionen  $\varphi_{ji}(s_i)$ ,  $\psi_{ki}(s_i)$  und  $\xi_{ki}(s_i)$  und den verallgemeinerten Verschiebungen  $U_j(z)$  und  $V_k(z)$ , kann die zweidimensionale Aufgabe entsprechend dem Verfahren nach Vlasov-Kantorovitsch auf ein eindimensionales Problem reduziert werden. Die Koordinatenfunktionen legen dabei die möglichen Deformationszustände des Gesamtquerschnittes in Abhängigkeit von der Profilkordinate  $s$  (Gesamtheit aller Profilkordinaten  $s_i$ ) fest und bestimmen damit entscheidend die Qualität des eindimensionalen Modells. In [1] sind zum Beispiel solche Koordinatenfunktionen für den einzelligen Kastenquerschnitt angegeben.

Setzt man in das elastische Potential der anisotropen prismatischen Schale (1.15) die Produktansätze (2.1) ein, so läßt sich durch Einführen der Matrizen  $A_k$ ,  $k = 1, \dots, 16$  und der Vektoren  $f_q$  und  $r_q$ ,  $q = z, s, n$

$$A_1 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{11i} \varphi_i \varphi_i^T ds_i,$$

$$A_2 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{13i} \overset{\circ}{\varphi}_i \varphi_i^T ds_i,$$

$$A_3 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{33i} \overset{\circ}{\varphi}_i \overset{\circ}{\varphi}_i^T ds_i,$$

$$A_4 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{33i} \psi_i \psi_i^T ds_i,$$

$$A_5 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{23i} \overset{\circ}{\psi}_i \psi_i^T ds_i,$$

$$A_6 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{22i} \overset{\circ}{\psi}_i \overset{\circ}{\psi}_i^T ds_i,$$

$$A_7 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{44i} \xi_i \xi_i^T ds_i,$$

$$A_8 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{46i} \overset{\circ}{\xi}_i \xi_i^T ds_i,$$

$$A_9 = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{66i} \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_i^T ds_i,$$

$$A_{10} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{45i} \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_i^T ds_i, \quad (2.2)$$

$$A_{11} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{56i} \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_i^T ds_i,$$

$$A_{12} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{55i} \overset{\circ}{\xi}_i \overset{\circ}{\xi}_i^T ds_i,$$

$$A_{13} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{13i} \varphi_i \psi_i^T ds_i,$$

$$A_{14} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{12i} \varphi_i \overset{\circ}{\psi}_i^T ds_i,$$

$$A_{15} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{33i} \overset{\circ}{\varphi}_i \psi_i^T ds_i,$$

$$A_{16} = \sum_{(i)0}^{d_i} C_{23i} \overset{\circ}{\varphi}_i \overset{\circ}{\psi}_i^T ds_i,$$

$$f_z = \sum_{(i)0}^{d_i} p_{zi} \varphi_i ds_i,$$

$$f_s = \sum_{(i)0}^{d_i} p_{si} \psi_i ds_i,$$

$$f_n = \sum_{(i)0}^{d_i} p_{ni} \xi_i ds_i,$$

$$r_z|_{z=0,l} = \sum_{(i)0}^{d_i} q_{zi}|_{z=0,l} \varphi_i ds_i,$$

$$r_s|_{z=0,l} = \sum_{(i)0}^{d_i} q_{si}|_{z=0,l} \psi_i ds_i,$$

$$r_n|_{z=0,l} = \sum_{(i)0}^{d_i} q_{ni}|_{z=0,l} \xi_i ds_i.$$

das elastische Potential (1.15) in einer etwas einfacheren und für die weitere Rechnung günstigeren Vektor-Matrix-Form (2.3) schreiben.

$$\begin{aligned} \Pi = & 1/2 \int_0^l [U^T A_1 U' + 2U^T A_2 U' + U^T A_3 U + V^T A_4 V' \\ & + 2V^T A_5 V' + V^T A_6 V + V''^T A_7 V'' \\ & + 4V'^T A_8 V'' + 4V'^T A_9 V' + 2V^T A_{10} V'' \\ & + 4V^T A_{11} V' + V^T A_{12} V + 2U'^T A_{13} V' \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + 2U^T A_{14} V + 2U^T A_{15} V' + 2U^T A_{16} V \\
& - 2(U^T f_z + V^T f_s + V^T f_n) dz \\
& - (U^T r_z + V^T r_s + V^T r_n) |_{z=0} \\
& - (U^T r_z + V^T r_s + V^T r_n) |_{z=1}
\end{aligned} \quad (2.3)$$

Bei der Berechnung der angeführten Matrizen und Vektoren gibt es Sonderfälle, die sich aus dem Aufbau der Stabschale ableiten lassen und einfacher zu berechnen sind als in der angegebenen Form. Sind zum Beispiel die Steifigkeiten aller Schalenabschnitte unabhängig von der Profilkordinate, so brauchen sie nicht im Integral zu stehen. Dies ist in vielen Fällen möglich und setzt den Rechenaufwand entscheidend herab. Die Matrix  $A_1$  hat dann zum Beispiel die Form

$$A_1 = \sum_{(i)} C_{11i} \int_0^{d_i} \varphi_i \varphi_i^T ds_i.$$

Sind weiterhin die entsprechenden Steifigkeiten für alle Schalenabschnitte gleich, so lassen sich die Steifigkeiten auch aus der Summe herausnehmen. Dies ist mit einer enormen Einsparung an Rechenarbeit verbunden, da nicht für jeden Schalenabschnitt  $i$  eine Steifigkeitsmatrix gespeichert werden muß. Statt  $n$  Multiplikationen ist für den Aufbau einer Matrix nur noch eine notwendig. Die Matrix  $A_1$  wird dann beispielsweise nach

$$A_1 = C_{11} \sum_{(i)} \int_0^{d_i} \varphi_i \varphi_i^T ds_i$$

berechnet.

Analog gilt das natürlich auch für die Lastvektoren, wenn die Belastungen für jeden Schalenabschnitt nicht von der Profilkordinate abhängen bzw. die Belastungen für jeden Schalenabschnitt gleich sind.

### 3. Ableitung der Differentialgleichungen und Randbedingungen

Die Variation  $\delta\Pi = 0$  des elastischen Potentials der anisotropen Stabschale in Vektor-Matrix-Schreibweise (2.3) ergibt die Eulerschen Differentialgleichungen des Variationsproblems  $\Pi \Rightarrow \text{Min}$ .

$$\begin{aligned}
& - A_1 U'' + (A_2 - A_2^T) U' + A_3 U \\
& - A_{13} V''' + (-A_{14} + A_{15}) V' + A_{16} V = f_z, \\
& - A_{13}^T U'' + (A_{14}^T - A_{15}^T) U' + A_{16}^T U + A_7 V'''' \quad (3.1) \\
& + 2(A_8^T - A_8) V'''' - (A_4 + 4A_9 - A_{10} - A_{10}^T) V'' \\
& + (A_5 - A_5^T + 2A_{11} - 2A_{11}^T) V' \\
& + (A_6 + A_{12}) V = f_s + f_n
\end{aligned}$$

und die Randbedingungen für  $z = 0, 1$

$$\begin{aligned}
\delta U^T [A_1 U' + A_2^T U + A_{13} V' + A_{14} V \pm r_z] &= 0, \\
\delta V^T [A_7 V'' + 2A_8^T V' + A_{10}^T V] &= 0, \quad (3.2) \\
\delta V^T [A_{13}^T U' + A_{15}^T U - A_7 V'' \\
& + (2A_8 - 2A_8^T) V'' + (A_4 + 4A_9 - A_{10}^T) V' \\
& + (A_5^T + 2A_{11}^T) V \pm (r_s + r_n)] &= 0.
\end{aligned}$$

Dabei gelten die oberen Vorzeichen in den Randbedingungen für den Rand  $z = 0$ , die unteren für den Rand  $z = 1$ .

Die Gleichungen (3.1) und (3.2) stellen den in dieser Arbeit betrachteten allgemeinsten Fall dar. Für praktische Rechnungen lassen sich oftmals Vereinfachungen vornehmen. Diese haben den Vorteil, daß sich der Lösungsaufwand herabsetzen läßt. Eine Gruppe von Sonderfällen erhält man durch Vernachlässigung bestimmter Deformationen (einzeln oder kombiniert) im elastischen Potential. Zu diesen vernachlässigbaren Deformationen können die Längskrümmungen, die Querdehnungen, die Schubverzerrungen und die Drillungen der Schalenmittelfläche gehören. Eine zweite Gruppe von Sonderfällen wird durch die Auswahl der Koordinatenfunktionen gebildet. Diese Auswahl der Koordinatenfunktionen wird entsprechend den Annahmen über die Querschnittsverformungen und -verformungen vorgenommen, womit sich u. a. auch der Effekt der mittragenden Breite berücksichtigen bzw. Gelenkfaltwerke modellieren lassen. Weitere Sonderfälle leiten sich entsprechend den gewählten Ersatzmodellen für das Steifigkeitsverhalten (isotropes, orthotropes, anisotropes) der Schalenstreifen ab.

In Analogie zu [1] und [2] bzw. [13] sind im Anhang 1 die Gleichungen für ausgewählte anisotrope Stabschalenmodelle mit mittensymmetrischem Wandaufbau zusammengestellt. Zum Vergleich sind auch die Gleichungen für isotrope Modelle in der hier eingeführten Matrixnomenklatur einer anderen Weise dargestellt, um noch besser die verschwindenden Anteile zu verdeutlichen.

### 4. Steifigkeiten anisotroper Schalenstreifen

Die einzelnen  $n$  Schalenstreifen, aus denen der Querschnitt besteht, können sehr verschieden aufgebaut sein. Es kann sich um ausgesteifte Bleche, faserverstärkte Materialien oder Schichtkonstruktionen handeln (vgl. Bild 1 und 2). Für eine gute Modellqualität ist es notwendig, die Steifigkeiten für den jeweils vorliegenden Wandaufbau zu bestimmen.

Aufgrund der Symmetrie der Steifigkeitsmatrix sind für den hier betrachteten Fall eines mittensymmetrischen Wandaufbaus im allgemeinen anisotropen Fall 12 Steifigkeiten zu bestimmen, die aber nicht alle unabhängig voneinander sind. Für bestimmte Wandaufbauten verringert sich diese Zahl aber.

Betrachtet sei in diesem Abschnitt ein komplex strukturierter Schalenstreifen der Stabschalenkonstruktion. Der zu seiner Kennzeichnung eingeführte Index  $i$  wird aus Gründen der Übersichtlichkeit dort weggelassen, wo er in diesem Abschnitt nicht unbedingt notwendig ist. Eine solche Steifigkeitsbetrachtung ist aber für jeden der  $n$  Schalenstreifen notwendig.

In den meisten Fällen läßt sich ein solcher Schalenstreifen in  $m$  Einzelschichten zerlegen, die orthotrop oder isotrop beschrieben werden können. So ist es zum Beispiel möglich, ein ausgesteiftes Blech in die Einzelschichten „Blechschiicht“ und „Rippenschiicht“ zu zerlegen. Bei einem Laminat sind dies Schichten, die nur in einer Richtung verstärkt sind. Das Steifigkeitsverhalten einer solchen orthotropen Einzelschicht (Orthotropieachsen  $|$  und  $=$ ) läßt sich durch folgende Größen beschreiben.

(Der Index  $m$  zum Kennzeichnen der Schichtnummer wird hier ebenfalls weggelassen, da er die Aussage nicht verbessert.)

– Dehnsteifigkeit (längs)

$$C_{11}^* = E_{|} t / (1 - \nu_{|} \nu_{=}) ,$$

– Dehnsteifigkeit (quer)

$$C_{22}^* = E_{=} t / (1 - \nu_{|} \nu_{=}) ,$$

– Kontraktionssteifigkeit

$$C_{12}^* = \nu_{=} C_{11}^* = \nu_{|} C_{22}^* ,$$

– Schubsteifigkeit

$$C_{33}^* = G_{\#} t$$

– Biegesteifigkeit (längs)

$$C_{44}^* = E_{|} t^3 / [12(1 - \nu_{|} \nu_{=})] ,$$

– Biegesteifigkeit (quer)

$$C_{55}^* = E_{=} t^3 / [12(1 - \nu_{|} \nu_{=})] ,$$

– Querkrümmungssteifigkeit

$$C_{45}^* = \nu_{=} C_{44}^* = \nu_{|} C_{55}^* ,$$

– Drillsteifigkeit

$$C_{66}^* = G_{\#} t^3 / 12$$

Für eine Parallelsteifenschar in Längsrichtung (vgl. Bild 5) erhält man die Dehnsteifigkeit  $EA$ , die Biegesteifigkeit  $EI$  und die Drillsteifigkeit  $GJ$ . Werden diese über die Abstände  $b$  der Steifen verschmiert, erhält man die Steifigkeiten für das kontinuierliche Modell

$$C_{11}^* = EA/b; \quad C_{44}^* = EI/b; \quad C_{66}^* = GJ/4b.$$

Für Steifen in Querrichtung ergeben sich analog die Steifigkeiten  $C_{22}^*$ ,  $C_{55}^*$ ,  $C_{66}^*$ , und für Kreuzsteifen erhält man die Steifigkeiten  $C_{11}^*$ ,  $C_{22}^*$ ,  $C_{44}^*$ ,  $C_{55}^*$  und  $C_{66}^*$  (vgl. [10]).

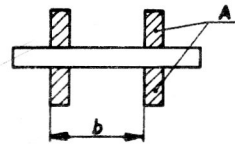


Bild 5  
Rippenblech

Zum Bestimmen der Steifigkeiten für unidirektionale Faserverbunde gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Die Berechnung nach verschiedenen Theorien und die experimentelle Bestimmung der erforderlichen Werte.

In [12] sind verschiedene Berechnungsmodelle (Puck, Förster, Beer u. a.) aufgeführt und miteinander sowie mit experimentell ermittelten Werten verglichen.

Dabei wird festgestellt, daß die Formeln nach Förster die Werte liefern, die denen aus dem Versuch am nächsten kommen. Auch andere Autoren kommen zu dem Schluß, daß es bei entsprechenden Möglichkeiten günstiger ist, die Werte für die unidirektionale Schicht aus dem Experiment zu bestimmen, als sie zu berechnen. Dies ist aus den Ungenauigkeiten zu erklären, die auch bei noch so sorgfältiger Herstellung auftreten, und zu einem Abweichen von den theoretischen Werten führen.

Zur Illustration seien hier die Formeln nach Beer angegeben, die auch in [10] zu finden sind.

Durch Linearkombination der Matrix- ( $E_M, \nu_M$ ) und Faserkennwerte ( $E_F, \nu_F$ ) können der Längsmodul  $E_{|}$  und die Querkontraktionszahl  $\nu_{|}$  in Abhängigkeit vom Faservolumenanteil  $\varphi_F$  berechnet werden.

$$E_{|} = \varphi_F E_F + (1 - \varphi_F) E_M$$

$$\nu_{|} = \varphi_F \nu_F + (1 - \varphi_F) \nu_M$$

Zum Berechnen des Elastizitätsmoduls quer zur Faserichtung  $E_{=}$ , des Schubmoduls  $G_{\#}$  und der Querkontraktionszahl  $\nu_{=}$  sind folgende Formeln verwendbar.

$$E_{=} = \frac{E_M [E_F \sqrt{\varphi_F} + E_M (1 - \sqrt{\varphi_F})]}{E_M \sqrt{\varphi_F} + (1 - \nu_M^2) (1 - \sqrt{\varphi_F}) [E_F \sqrt{\varphi_F} + E_M (1 - \sqrt{\varphi_F})]}$$

$$\nu_{=} = \nu_{|} E_{=} / E_{|}$$

$$G_{\#} = \frac{G_M [G_F \sqrt{\varphi_F} + G_M (1 - \sqrt{\varphi_F})]}{G_M \sqrt{\varphi_F} + (1 - \sqrt{\varphi_F}) [G_F \sqrt{\varphi_F} + G_M (1 - \sqrt{\varphi_F})]}$$

Meistens stimmen die Orthotropieachsen ( $|, =$ ) der unidirektionalen Schicht  $m$  nicht mit den Koordinatenachsen  $z$  und  $s_i$  des Schalenstreifens  $i$  überein, so daß es notwendig ist, die Steifigkeiten jeder Einzelschicht entsprechend zu transformieren. Um die Steifigkeiten vom Bezugssystem ( $|, =$ ) auf das Bezugssystem ( $z, s_i$ ) um den Winkel  $\alpha$  zu drehen, gelten folgende Formeln (vgl. Bild 6):

$$C_{11} = C_{11}^* \cos^4 \alpha + C_{22}^* \sin^4 \alpha + 0.5 (C_{12}^* + 2 C_{33}^*) \sin^2 2\alpha ,$$

$$C_{22} = C_{11}^* \sin^4 \alpha + C_{22}^* \cos^4 \alpha + 0.5 (C_{12}^* + 2 C_{33}^*) \sin^2 2\alpha,$$

$$C_{12} = C_{12}^* + [(C_{11}^* + C_{22}^*)/4 - 0.5 (C_{12}^* + 2 C_{33}^*)] \sin^2 2\alpha,$$

$$C_{33} = C_{33}^* + [(C_{11}^* + C_{22}^*)/4 - 0.5 (C_{12}^* + 2 C_{33}^*)] \sin^2 2\alpha,$$

$$C_{13} = (C_{12}^* + 2 C_{33}^* - C_{22}^*) \sin^3 \alpha \cos \alpha - (C_{12}^* + 2 C_{33}^* - C_{11}^*) \sin \alpha \cos^3 \alpha,$$

$$C_{23} = (C_{12}^* + 2 C_{33}^* - C_{22}^*) \sin \alpha \cos^3 \alpha - (C_{12}^* + 2 C_{33}^* - C_{11}^*) \sin^3 \alpha \cos \alpha.$$

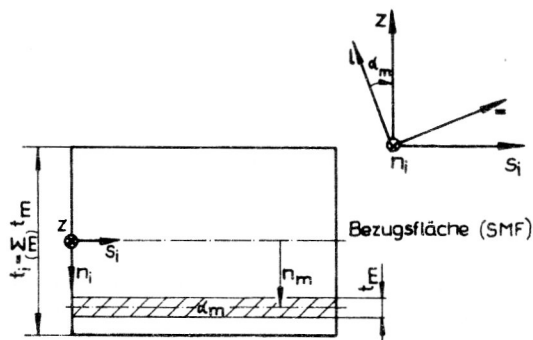
Die Transformationsformeln für die Steifigkeiten im Plattenquadranten erhält man durch Erhöhen der Werte der Indizes um drei ( $C_{ij} \Rightarrow C_{i+3 j+3}$  mit  $i, j = 1, 2, 3$ ).

In dieser Weise sind die Steifigkeiten aller zum Wandaufbau gehörenden Schichten zu bestimmen. Diese Schichtsteifigkeiten, ob nun von einzelnen Laminatschichten oder von Trägerblech und zur Schicht „verschmierten“ Versteifungen, lassen sich dann nach Wahl einer günstigen Bezugsfläche  $n = 0$  mit

$$C_S = \sum_{(m)} C_{Sm}$$

$$C_P = \sum_{(m)} [C_{Pm} + n_m^2 C_{Sm}]$$

zu den Steifigkeiten des Schalenstreifens summieren.  $n_m$  ist hierbei der Abstand der  $m$ -ten Einzelschicht von der gewählten Bezugsfläche (z. B. Schalenmittelfläche, Blechhaut). Die geometrische Beschreibung einer Einzelschicht im Verbund ist in Bild 6 dargestellt.



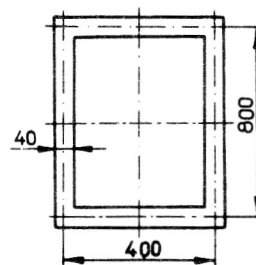
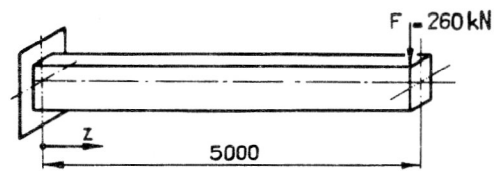
**Bild 6**  
Geometrische Beschreibung der  $m$ -ten Schicht im Verbund

## 5. Beispielrechnung

Die in dieser Arbeit abgeleiteten Gleichungen sollen zum Berechnen der Verformungen eines einseitig eingespannten Kastenträgers mit exzentrischer Einzelast am Ende (Bild 7) angewendet werden. Dieses sehr einfache Beispiel soll den prinzipiellen Lösungsweg veranschaulichen und gleichzeitig zeigen, daß es möglich ist, bei entsprechenden Vereinfachungen schon bestehende Lösungsverfahren für isotrope Stabschalenkonstruktionen auch auf solche aus anisotropen Werkstoffen anzuwenden.

Im Berechnungsmodell des Beispielträgers sind in Analogie zu [11] die Querdehnungen, die Längskrümmungen und die Drillungen der Schalenmittelfläche vernachlässigt. Das entspricht der halbmomentenfreien Schalentheorie nach Vlasov mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen für geschlossene Stabschalen (vgl. Modell 3 im Anhang 1).

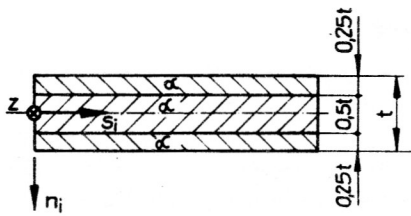
Die Wände des Kastenträgers sollen aus Stahl, glasfaserverstärktem bzw. im dritten Fall aus kohlenfaserverstärktem Kunststoff bestehen. Die Materialkennwerte sind in Tabelle 1 zusammengestellt.



**Bild 7**  
Kragträger mit exzentrischer Einzelast, Querschnittsabmessungen

**Tabelle 1**  
Materialkennwerte für das Beispiel

Kennwert	$E_l$	$E_s$	$\nu_l$	$G_{\#}$	$\rho$
Einheit	GPa	GPa		GPa	g/cm <sup>3</sup>
Stahl	210	210	0.3	80.8	7.85
GFK S-Glas/XP-251 $\varphi_F = 0.65$	57.2	20.1	0.262	5.9	2.0
CFK T300/5208 $\varphi_F = 0.7$	153	10.9	0.3	5.6	1.6



**Bild 8**  
Wandaufbau des GFK- und des CFK-Trägers im Beispiel

Bild 8 zeigt den Aufbau der Wände in den Fällen mit Faserverstärkungen. Der angegebene Faserwinkel beträgt in den Gurten des Trägers in jedem Fall 0 Grad. In den Stegen soll er variabel sein. Dies ist eine Annahme, die herstellungstechnologisch allerdings nicht oder nur sehr schwer zu realisieren ist, da solche Träger aus faserverstärkten Materialien meist durch Wickeltechniken hergestellt werden. Eine genauere Modellierung der Schichtungen erfordert aber einen erweiterten Lösungsalgorithmus. Dieser Beispielträger könnte aber ein einfaches Modell für einen gewickelten Kastenträger mit unidirektional verstärkten Gurten sein.

Die hier betrachtete Schichtfolge mit den angegebenen Dickenverhältnissen erzeugt eine Steifigkeitsmatrix, deren Koppelquadrant, gemäß den in diesem Beitrag gemachten Einschränkungen, nicht besetzt ist. Der Scheibenquadrant gleicht in seiner Form dem des isotropen Falls, der Plattenquadrant dagegen ist vollbesetzt. Die errechneten Werte sind für alle drei betrachteten Fälle bei ausgewählten Winkeln im Anhang 3 angegeben.

Der spezielle Aufbau des Scheibenquadranten bedingt eine weitere Entkopplung der Differentialgleichungen und Randbedingungen, deren Struktur dann mit denen des isotropen Falls übereinstimmen. Nach dem Berechnen der Matrizen  $A_k$  erhält man die Differentialgleichungen (5.1). Sie sind nun nicht mehr in Vektor-Matrix-Form geschrieben. Zu erkennen ist, daß das System in vier voneinander unabhängige Teilsysteme zerfällt. Das erste beschreibt die Verformung in Stabschalenlängsrichtung (Zug – Druck), das zweite und dritte die Biegung um die beiden Querschnittsachsen, und das vierte Teilsystem beinhaltet die Torsion und die Querschnittsdeformation.

$$\begin{aligned}
 & -A_1(1,1)U_1'' = f_{z1}, \\
 & \text{-----} \\
 & -A_1(2,2)U_2'' + A_3(2,2)U_2 + A_{15}(2,1)V_1' = f_{z2}, \\
 & \quad -A_{15}(2,1)U_2' \quad -A_4(1,1)V_1'' = f_{s1} + f_{n1}, \\
 & \text{-----} \\
 & -A_1(3,3)U_3'' + A_3(3,3)U_3 + A_{15}(3,2)V_2' = f_{z3}, \\
 & \quad -A_{15}(3,2)U_3' \quad -A_4(2,2)V_2'' = f_{s2} + f_{n2}, \\
 & \text{-----} \\
 & -A_1(4,4)U_4'' + A_3(4,4)U_4 \\
 & + A_{15}(4,3)V_3' + A_{15}(4,4)V_4'' = f_{z4}, \\
 & \hspace{15em} (5.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -A_{15}(4,3)U_4' - A_4(3,3)V_3'' - A_4(3,4)V_4'' = \\
 & \hspace{10em} = f_{s3} + f_{n3}, \\
 & -A_{15}(4,4)U_4' - A_4(4,3)V_3'' \\
 & -A_4(4,4)V_4'' + A_{12}(4,4)V_4 = f_{s4} + f_{n4}
 \end{aligned}$$

Der in [11] beschriebene Lösungsweg mit der Methode der Anfangsparameter läßt sich ohne Schwierigkeiten auf diese Gleichungen anwenden. Natürlich sind auch andere Methoden zur Lösung der Differentialgleichungen anwendbar. So zum Beispiel die Lösung über kanonische Differentialgleichungssysteme oder eine Finite-Element-Diskretisierung.

Als Randbedingungen erhält man für den hier vorliegenden Lagerungs- und Belastungsfall

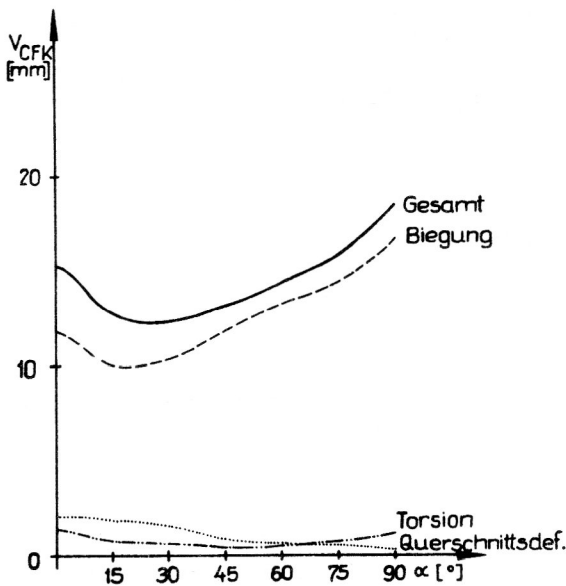
$$\begin{aligned}
 U_1|_{z=0} = 0, & \quad r_{z1}|_{z=1} = 0, \\
 U_2|_{z=0} = 0, & \quad r_{z2}|_{z=1} = 0, \\
 U_3|_{z=0} = 0, & \quad r_{z3}|_{z=1} = 0, \\
 U_4|_{z=0} = 0, & \quad r_{z4}|_{z=1} = 0, \\
 V_1|_{z=0} = 0, & \quad r_{s1}|_{z=1} + r_{n1}|_{z=1} = 0, \\
 V_2|_{z=0} = 0, & \quad r_{s2}|_{z=1} + r_{n2}|_{z=1} = -260 \text{ kN}, \\
 V_3|_{z=0} = 0, & \quad r_{s3}|_{z=1} + r_{n3}|_{z=1} = -52 \text{ kNm}, \\
 V_4|_{n=0} = 0, & \quad r_{s4}|_{z=1} + r_{n4}|_{z=1} = 52 \text{ kNm}.
 \end{aligned}$$

Als Ergebnisgröße wurde die vertikale Absenkung des belasteten Steges

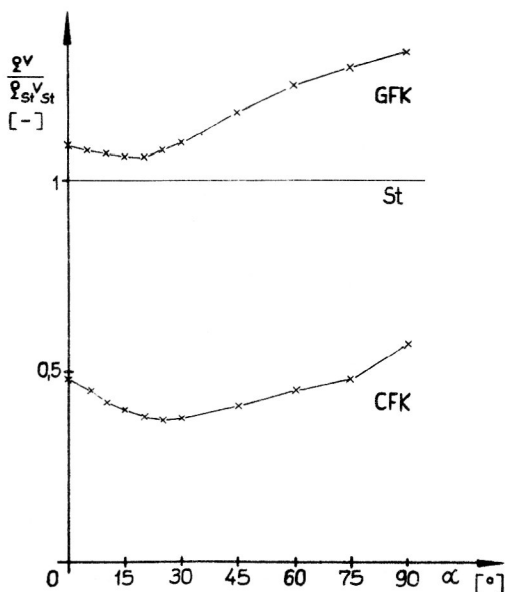
$$\begin{aligned}
 v &= u_{s3}(z = 500 \text{ cm}, s_3 = 0 \text{ cm}) = \\
 &= \sum_{(k)} V_k \psi_{k3} \\
 &= V_2 + d_2/2 * V_3 - d_2/2 * V_4
 \end{aligned}$$

berechnet. Für den Träger aus CFK ist diese Größe in Bild 9 in Abhängigkeit vom Faserwinkel in den Stegen dargestellt. Außerdem sind in diesem Bild auch noch die verschiedenen Anteile dargestellt, aus denen sich die vertikale Absenkung zusammensetzt. Die einzelnen Anteile lassen sich durch die Koordinatenfunktionen sehr schön voneinander unterscheiden. Zu erkennen ist, daß die Biegung den größten Anteil beiträgt, während die Anteile aus Torsion und Querschnittsdeformation recht gering sind.

Um die drei verschiedenen Materialien vergleichen zu können, ist es möglich, das Verhältnis der notwendigen Trägermasse zur erreichten Steifigkeit zu berechnen. Bild 10 zeigt das Diagramm der berechneten Werte Dichte \* Absenkung in Abhängigkeit vom Faserwinkel in den Stegen. Dabei wurden die Werte für den GFK-



**Bild 9**  
Absenkung des belasteten Steges des CFK-Trägers



**Bild 10**  
Spezifischer Masseaufwand (bezogen auf den Stahlträger)

bzw. CFK-Träger auf den Wert des Stahlträgers bezogen. Das Produkt Dichte \* Absenkung ist bei gleichen Trägerabmessungen und -belastungen proportional dem oben erwähnten Verhältnis Masse zu Steifigkeit.

Aus diesem Diagramm ist zu erkennen, daß bezüglich des Masseaufwandes der Stahl- und der GFK-Träger annähernd dieselben Werte aufweisen. Der CFK-Träger dagegen erfordert einen niedrigeren Masseaufwand. Aus dem Diagramm nicht erkennbar ist, daß faserverstärkte Träger auch hinsichtlich des Verhältnisses Masse/Festigkeit den Stahlträgern überlegen sind.

## 6. Zusammenfassung

Ausgehend von einem vollständigen elastischen Potential wurden in diesem Beitrag Differentialgleichungen und Randbedingungen für die globale statische Strukturanalyse stabförmiger dünnwandiger Konstruktionen aus anisotropem Material hergeleitet. Sie stellen eine Verallgemeinerung der Modelle dar, die zur globalen Strukturanalyse isotroper Stabschalen abgeleitet wurden, und enthalten diese als Sonderfall. Als weiterer Sonderfall sind Konstruktionen aus orthotropem Material berechenbar.

Prinzipiell sind mit diesen Berechnungsmodellen alle konstruktiven und Materialanisotropien erfaßbar, da sich z. B. zahlreiche regelmäßig angeordnete Rippen und Faserverstärkungen in der gleichen Weise auf das Steifigkeitsverhalten der Konstruktion auswirken. Der Schwerpunkt der weiteren Arbeit wird aber auf der Untersuchung von Faserverbundwerkstoffen liegen, da hier die weit größeren Probleme auftreten.

Am Beispiel eines faserverstärkten Kunststoffträgers wird der prinzipielle Weg gezeigt, wie solche Konstruktionen berechnet werden können. Dabei wurde festgestellt, daß bei entsprechenden Vereinfachungen des Berechnungsmodells die vorhandenen Lösungsverfahren für isotrope Materialien auch auf anisotrope angewendet werden können. Solche Vereinfachungen sind aber nur für bestimmte Schichtfolgen möglich. Solche Schichtungen haben dann aber einen recht akademischen Charakter und sind in der Praxis nur schwer herstellbar. Für realere Schichtstrukturen sind die vorhandenen Lösungsverfahren prinzipiell anwendbar, müssen aber entsprechend den zusätzlich auftretenden Koppelgliedern in den Differentialgleichungen erweitert werden. Aufgrund der Komplexität der Gleichungssysteme ist aber der Lösung mit numerischen Verfahren (z. B. mit FEM oder über kanonische Dgln.) in jedem Fall der Vorzug zu geben. Im Anschluß an die hier dargestellte Verformungsanalyse ist es notwendig, auch eine Spannungs- und Festigkeitsanalyse durchzuführen. Eine solche weitergehende Analyse erfordert allerdings umfangreichere Überlegungen, so zum Beispiel die Auswahl einer geeigneten Versagenshypothese. Dies soll Gegenstand einer weiteren Arbeit sein.

### Anhang 1

#### Differentialgleichungen und Randbedingungen für ausgewählte Stabschalenmodelle

##### 1. Modell mit Vernachlässigung der Querdehnungen der Schalenmittelfläche

Die Querdehnungen der Schalenmittelfläche haben einen sehr geringen Einfluß und können deshalb oft vernachlässigt werden. Mit  $\epsilon_{si} = \dot{v}_i = 0$  verschwinden im elastischen Potential alle entsprechenden Anteile, und es entfallen die Matrizen  $A_5$ ,  $A_6$ ,  $A_{14}$  und  $A_{16}$ .

Die oberen Vorzeichen in den Randbedingungen gelten für den Rand  $z = 0$ , die unteren für den Rand  $z = l$ .

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + (A_2 - A_2^T)U' + A_3 U - A_{13} V'' + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{13}^T U'' - A_{15}^T U' + A_7 V'''' + (2A_8^T - 2A_8)V'' \\
& - (A_4 + 4A_9 - A_{10} - A_{10}^T)V'' \\
& + (2A_{11} - 2A_{11}^T)V' + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' + A_2^T U + A_{13} V' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_7 V'' + 2A_8^T V' + A_{10}^T V] = 0 \\
& \delta V^T [A_{13}^T U' + A_{15}^T U - A_7 V'''' + (2A_8 - 2A_8^T)V'' \\
& + (A_4 + 4A_9 - A_{10}^T)V' + 2A_{11}^T V \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

Im isotropen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + A_3 U + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{15}^T U' + A_7 V'''' - (A_4 + 4A_9 - A_{10} - A_{10}^T)V'' \\
& + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_7 V'' + A_{10}^T V] = 0 \\
& \delta V^T [A_{15}^T U - A_7 V'''' \\
& + (A_4 + 4A_9 - A_{10}^T)V' \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

## 2. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen und Querdehnungen der SMF

Mit  $\kappa_{zi} = 0$  und  $\epsilon_{si} = 0$  entfallen im elastischen Potential die Matrizen  $A_5, A_6, A_7, A_8, A_{10}, A_{14}$  und  $A_{16}$ . Durch die Vernachlässigung der Längskrümmungen wird der Grad des entstehenden Differentialgleichungssystems herabgesetzt, was besonders bei der Lösung mit Finiten Elementen vorteilhaft ist.

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + (A_2 - A_2^T)U' + A_3 U - A_{13} V'' + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{13}^T U'' - A_{15}^T U' - (A_4 + 4A_9)V'' \\
& + (2A_{11} - 2A_{11}^T)V' + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' + A_2^T U + A_{13} V' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_{13}^T U' + A_{15}^T U + (A_4 + 4A_9)V' \\
& + 2A_{11}^T V \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

Im isotropen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + A_3 U + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{15}^T U' - (A_4 + 4A_9)V'' + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_{15}^T U + (A_4 + 4A_9)V' \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

## 3. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen, Drillungen und Querdehnungen der SMF

Mit  $\kappa_{zi} = 0, \kappa_{zsi} = 0$  und  $\epsilon_{si} = 0$  entfallen die Matrizen  $A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{14}$  und  $A_{16}$  im elastischen Potential. Dieses Modell entspricht der halbmomentenfreien Schalentheorie nach Vlasov mit Berücksichtigung der Schubverzerrungen.

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + (A_2 - A_2^T)U' + A_3 U - A_{13} V'' + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{13}^T U'' - A_{15}^T U' - A_4 V'' + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' + A_2^T U + A_{13} V' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_{13}^T U' + A_{15}^T U + A_4 V' \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

Im isotropen Fall gilt:

$$\begin{aligned}
& -A_1 U'' + A_3 U + A_{15} V' = f_z \\
& -A_{15}^T U' - A_4 V'' + A_{12} V = f_s + f_n \\
& \delta U^T [A_1 U' \pm r_z] = 0 \\
& \delta V^T [A_{15}^T U + A_4 V' \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

## 4. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen, Drillungen, Querdehnungen und Schubverzerrungen der SMF

Mit  $\kappa_{zi} = 0, \kappa_{zsi} = 0, \epsilon_{si} = 0$  und  $\epsilon_{zsi} = 0$  erhält man das Modell der halbmomentenfreien Schalentheorie nach Vlasov ohne Berücksichtigung der Schubverzerrungen.

$$\begin{aligned}
& A_1 V'''' + A_{12} V = f_z' + f_s + f_n \\
& \delta V^T [A_1 V'' \mp r_z] = 0 \\
& \delta V^T [-A_1 V'''' + f_z \pm (r_s + r_n)] = 0
\end{aligned}$$

Im isotropen Fall gelten dieselben Gleichungen.



Anhang 2:

Übersicht über Differentialgleichungen für ausgewählte Stabschalenmodelle

	U''	U'	U	V'''	V''''	V''	V'	V	RS
1. Modell anisotrop	$-A_1$ $-A_{13}^T$	$A_2 - A_2^T$ $-A_{15}^T$	$A_3$	$A_7$	$2A_8^T - 2A_8$	$-A_{13}$ $-A_4 - 4A_9 + A_{10} + A_{10}^T$	$A_{15}$ $2A_{11} - 2A_{11}^T$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
isotrop	$-A_1$	$-A_{15}^T$	$A_3$	$A_7$		$-A_4 - 4A_9 + A_{10} + A_{10}^T$	$A_{15}$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
2. Modell anisotrop	$-A_1$ $-A_{13}^T$	$A_2 - A_2^T$ $-A_{15}^T$	$A_3$			$-A_{13}$ $-A_4 - 4A_9$	$A_{15}$ $2A_{11} - 2A_{11}^T$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
isotrop	$-A_1$	$-A_{15}^T$	$A_3$			$-A_4 - 4A_9$	$A_{15}$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
3. Modell anisotrop	$-A_1$ $-A_{13}^T$	$A_2 - A_2^T$ $-A_{15}^T$	$A_3$			$-A_{13}$ $-A_4$	$A_{15}$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
isotrop	$-A_1$	$-A_{15}^T$	$A_3$			$-A_4$	$A_{15}$	$A_{12}$	$f_z$ $f_s + f_n$
4. Modell anisotrop				$A_1$				$A_{12}$	$f_z' + f_s + f_n$
isotrop				$A_1$				$A_{12}$	$f_z' + f_s + f_n$

1. Modell mit Vernachlässigung der Querdehnungen der SMF
2. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen und Querdehnungen der SMF
3. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen, Drillungen und Querdehnungen der SMF
4. Modell mit Vernachlässigung der Längskrümmungen, Drillungen, Querdehnungen und Schubverzerrungen der SMF

Anhang 3:

Steifigkeitsmatrizen für die Werkstoffe des Beispiels

STAHL

8.400E+04	2.520E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
2.520E+04	8.400E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	3.231E+04	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.120E+05	3.360E+04	0.0
0.0	0.0	0.0	3.360E+04	1.120E+05	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	4.308E+04

GFK: 0 GRAD

2.345E+04	2.159E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
2.159E+03	8.239E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	2.360E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	3.126E+04	2.878E+03	0.0
0.0	0.0	0.0	2.878E+03	1.098E+04	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.147E+03

GFK: 30 GRAD

1.628E+04	5.520E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
5.520E+03	8.679E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	5.721E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	2.171E+04	7.360E+03	5.233E+03
0.0	0.0	0.0	7.360E+03	1.157E+04	1.352E+03
0.0	0.0	0.0	5.233E+03	1.352E+03	7.628E+03

GFK: 60 GRAD

8.679E+03	5.520E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
5.520E+03	1.628E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	5.721E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.157E+04	7.360E+03	1.352E+03
0.0	0.0	0.0	7.360E+03	2.171E+04	5.233E+03
0.0	0.0	0.0	1.352E+03	5.233E+03	7.628E+03

GFK: 90 GRAD

8.239E+03	2.159E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
2.159E+03	2.345E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	2.360E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.098E+04	2.878E+03	0.0
0.0	0.0	0.0	2.878E+03	3.126E+04	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.147E+03

CFK: 0 GRAD

6.159E+04	1.316E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
1.316E+03	4.388E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	2.240E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	8.213E+04	1.755E+03	0.0
0.0	0.0	0.0	1.755E+03	5.851E+03	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.987E+03

CFK: 30 GRAD

3.710E+04	1.151E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
1.151E+04	8.492E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.244E+04	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	4.946E+04	1.535E+04	1.827E+04
0.0	0.0	0.0	1.535E+04	1.132E+04	6.498E+03
0.0	0.0	0.0	1.827E+04	6.498E+03	1.658E+04

CFK: 60 GRAD

8.492E+03	1.151E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
1.151E+04	3.710E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.244E+04	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.132E+04	1.535E+04	6.498E+03
0.0	0.0	0.0	1.535E+04	4.946E+04	1.827E+04
0.0	0.0	0.0	6.498E+03	1.827E+04	1.658E+04

CFK: 90 GRAD

4.388E+03	1.316E+03	0.0	0.0	0.0	0.0
1.316E+03	6.159E+04	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	2.240E+03	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	5.851E+03	1.755E+03	0.0
0.0	0.0	0.0	1.755E+03	8.213E+04	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.987E+03

## LITERATUR

- [ 1 ] Altenbach, J., Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die statische Strukturanalyse dünnwandiger komplexer Konstruktionen. Technische Mechanik 7 (1986) 3, S. 52 – 64.
- [ 2 ] Altenbach, J., Zwicke, M.: Theoretische Ableitung und Bewertung unterschiedlicher quasi-eindimensionaler Modelle für die Eigenschwingungsanalyse dünnwandiger Konstruktionen. Technische Mechanik 7 (1986) 4, S. 5 – 14.
- [ 3 ] Bauchau, O. A.: A Beam Theory for Anisotropic Materials. Trans. ASME: Journal of Applied Mechanics New York, 52 (1985) 2, p. 416 – 422.
- [ 4 ] Кобелев, В. В.: Модель анизотропных тонкостенных стержней. — В.: Механика композитных материалов. — Рига / 1988 / 1. — с. 102 – 109.
- [ 5 ] Григолюк, Э. И., Куликов, Г. М.: Обобщенная модель механики тонкостенных конструкций композитных материалов. — В.: Механика композитных материалов. — Рига / 1988 / 4. — с. 698 – 704.
- [ 6 ] Алфутов, Н. А., Зиновьев, П. А., Попов, Б. Г.: Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — Москва: Машиностроение, 1984. — 264 с.
- [ 7 ] Vinson, J. R., Sierakowski, R. L.: The Behavior of Structures Composed of Composite Materials. Dordrecht u. a.: Martinus Nijhoff, 1987, 323 p.
- [ 8 ] Altenbach, H.: Die Ermittlung der Deformationsenergie für dünne Platten und Schalen mit in Dickenrichtung veränderlichen Materialeigenschaften. Wiss. Zeitschrift der TH „Otto von Guericke“ Magdeburg, Magdeburg 28 (1984) 2, S. 29 – 33.
- [ 9 ] Васильев, В. В.: Некоторые проблемы теории оболочек, связанные с особенностями современных конструкционных материалов. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела. — Москва / 1987 / 5. — с. 178 – 188.
- [ 10 ] Wiedemann, J.: Leichtbau, Band 1: Elemente. Springer-Verlag Berlin/W. u. a. 1986, 430 S.
- [ 11 ] Altenbach, J.; Kissing, W.: Verallgemeinerte Stabmodelle als Grundlage von Spannungs- und Verformungsberechnungen für dünnwandige geschlossene Konstruktionen unter statischen und thermischen Belastungen. Reprint from Publications of the Technical University for Heavy Industry, Series C. Mechanical Engineering, Volume 41, Fasc. 3 – 4. Teil 1, S. 161 – 193, Teil 2, S. 195 – 240. Miscoic, 1987.
- [ 12 ] Desserich, G. M.: Beitrag zur Spannungs- und Verformungsanalyse mehrschichtiger Flächentragwerke. Zürich, ETH, Diss., 1983, 248 S.
- [ 13 ] Zwicke, M.: Ein quasieindimensionales Finites Element für die globale mechanische Strukturanalyse dünnwandiger, stabähnlicher Konstruktionen. Magdeburg, TUM, Diss., 1987, 100 S.
- [ 14 ] Присяжнюк, В. К., Пискунов, В. Г.: Модель пологих оболочек и пластин из слоистых композитных материалов для решения задач статики, динамики и контактного взаимодействия. — В.: Механика композитных материалов. — Рига / 1987 / 6. с. 1014 – 1021.
- [ 15 ] Refined Dynamical Theories of Beams, Plates and Shells and their Applications — Proceedings of the Euromech — Colloquium 219 (Ed. by J. Elishakoff and H. Irretier). — Berlin (West) u. a.: Springer-Verlag, 1987, 436 p.

### Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach  
Sektion Maschinenbau  
WB Festkörpermechanik  
Dr. sc. techn. Holm Altenbach  
Sektion Technologie der metallverarbeitenden  
Industrie  
WB Werkstofftechnik  
Dipl.-Ing. Volker Matzdorf  
Sektion Maschinenbau  
WB Festkörpermechanik  
Technische Universität „Otto von Guericke“  
PSF 124  
Magdeburg, 3010