

Ergebnisse der Relaxationstheorie der Plastizität für kreisförmige und Polygon-Verformung

G. Backhaus

1. Einleitung

Die nachfolgend mitgeteilten Rechnungsergebnisse basieren auf der vom Verfasser entwickelten „Relaxationstheorie der Plastizität“, die sich u. a. auf die umfangreichen mit verschiedenen Werkstoffen durchgeführten experimentellen Arbeiten von Mitarbeitern des Verfassers stützt [1], [2] und im Heft 2 dieser Zeitschrift (1981) dargestellt ist [5]. Obwohl diese Versuche schon vor längerer Zeit durchgeführt worden sind, liegen neuere aus Versuchen gewonnene Erkenntnisse hinsichtlich dieser Theorie nicht vor. Außer einer die sogen. Entfestigung betreffenden Ergänzung sind daher Korrekturen an den in [5] entwickelten theoretischen Ansätzen nicht vorgenommen.

Das auf der mit fortschreitender Verformung ($d\epsilon_v$) stattfindenden Relaxation der Bauschingerspannung beruhende Spannungs-Deformations-Gesetz ist für eine Folge endlicher Richtungsänderungen gegeben durch [3] bis [5]

$$S_{ij}(\epsilon_v > \epsilon_{vs}) = \frac{2}{3} k_w(\epsilon_v) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v) - \frac{2}{3} \sum_{s=1}^n z(\epsilon_{vs}) k_w(\epsilon_{vs}) \varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \Big|_s \quad (1)$$

mit $\epsilon_v = \int \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p$ als Vergleichsdehnung.

Hierin stellt k_w die einer reduzierten Vergleichsdehnung ϵ_w zugeordnete Fließspannung der monotonen Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ und $\Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \Big|_s$ eine endliche Änderung der durch $\frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}$ gegebenen Verformungsrichtung an der Stelle $\epsilon_v = \epsilon_{vs}$ dar.

Weiterhin ist $2z = \frac{\sigma_{Fo} + \sigma_{Fu}}{\sigma_{Fo}}$ die Bauschinger-Kennzahl und $\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs})$ die Relaxationsfunktion (vgl. Bild 1).

Die Einführung einer „wirksamen“ Fließspannung k_w
 $k_w = k_f(\epsilon_w) \quad (2)$

berücksichtigt das Auftreten einer bleibenden Entfestigung (Δk in Bild 1) nach einer endlichen Änderung der Verformungsrichtung. Bei einer Folge endlicher Richtungsänderungen (z. B. zyklische Verformung) kann daher, wie die Versuche zeigen, die Vergleichsdehnung ϵ_v nicht mehr als die das Spannungsniveau bestimmende Größe dienen. An ihre Stelle tritt die „wirksame“ Dehnung ϵ_w , gegeben durch

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \Delta\epsilon_v^* \quad (3)$$

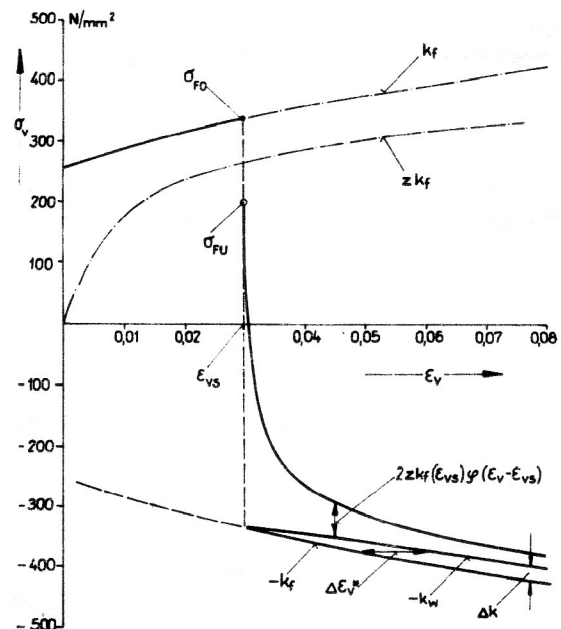


Bild 1 Darstellung der verwendeten Beziehungen anhand eines Meßergebnisses (St)

Es wird also in Übereinstimmung mit dem in [6] beschriebenen Verhalten die in Bild 1 dargestellte Entfestigung Δk durch eine Horizontalverschiebung der Fließkurve $k_f(\epsilon_v)$ um den „Schlupf“ $\Delta\epsilon_{vs}^*$ erfaßt. Wie in [3] näher ausgeführt, ist dabei von der Annahme auszugehen, daß der Wert Δk bzw. $\Delta\epsilon_{vs}^*$ nicht schlagartig im Augenblick des Richtungswechsels bei ϵ_{vs} auftritt, sondern mit Null beginnend allmählich seinen Endbetrag erreicht. Andernfalls würde bei einer Folge dicht beieinander liegender Richtungswechsel die Entfestigung durch Superposition Werte erreichen, die experimentell nicht bestätigt werden. In [3] ist daher angesetzt:

$$\Delta\epsilon_v^* = \Delta\epsilon_{vs}^* H(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \text{ mit } H(0) = 0, H(\infty) = 1. \quad (4)$$

2. „Wirksame“ Dehnung ϵ_w

Die in (4) auftretende Funktion $H(\epsilon_v - \epsilon_{vs})$ wird in [3] wie folgt angesetzt:

$$H(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) = 1 - e^{-\vartheta(\epsilon_v - \epsilon_{vs})} \quad (5)$$

Der Wert ϑ hängt von der Größe der Vorverformung ab (ϵ_{v1}) und erreicht bei einer Zyklensfolge mit der gleichbleibenden Verformungsamplitude $\Delta\epsilon_v/2$ einen stationären Wert:

$$\vartheta_{\infty} = \frac{1}{\Delta \epsilon_v} \ln \left(1 + \frac{\Delta \epsilon_v}{c} \right) \quad (\text{Gl. (27) in [5]}) \quad (6a)$$

mit $c = 0,037$ für die in [2] untersuchten Werkstoffe.

Zu Beginn der Zyklenfolge bei ϵ_{v1} ist ϑ_1 annähernd durch die gleiche Beziehung gegeben, wenn $\Delta \epsilon_v$ durch $2\epsilon_{v1}$ ersetzt wird. Für den Übergang in den stationären Zustand wurde aus den Versuchen ermittelt [5], [7]:

$$\vartheta_s = \vartheta_{\infty} - (\vartheta_{\infty} - \vartheta_1) e^{-0,6(\epsilon_{vs} - \epsilon_{v1})} \quad (6b)$$

$$\approx \vartheta_1 \quad \text{für einige wenige Zyklen.}$$

Der „Schlupf“ $\Delta \epsilon_{vs}^*$ kann – was durch systematische Messungen an Stählen [8] bestätigt wird – der Dehnung ϵ_{vs} proportional gesetzt werden: Faktor q ($q = 1$ bzw. $0,6$ für St bzw. Ms nach den Untersuchungen in [2] und [5]).

Weiterhin wird eine starke Abhängigkeit von der Größe der Richtungsänderung beobachtet. Dementsprechend wird allgemein angesetzt:

$$\Delta \epsilon_{vs}^* = q \epsilon_{vs} g \left(\sqrt{\frac{1}{6} \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s} \right). \quad (7)$$

Der Faktor $1/6$ bewirkt, daß der Wurzelausdruck bei Richtungskehr ($\Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s = -2 \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s$) den Wert Eins annimmt.

Für eine Folge endlicher Richtungsänderungen ergibt sich durch Superposition die wirksame Dehnung aus (3), (4) und (5):

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \sum_{s=1}^n \Delta \epsilon_{vs}^* (1 - e^{-\vartheta_s(\epsilon_v - \epsilon_{vs})}). \quad (8)$$

Bei der Ermittlung von $\Delta \epsilon_{vs}^*$ nach (7) sind die bereits erfolgten Entfestigungen in vollem Umfang zu berücksichtigen [3]:

$$\Delta \epsilon_{vs}^* = q \cdot (\epsilon_{vs} - \sum_{t=1}^{s-1} \Delta \epsilon_{vt}^*) \times g \left(\sqrt{\frac{1}{6} \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s} \right) \quad (9a)$$

Es gilt also:

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon_{v1}^* &= q \cdot \epsilon_{v1} \cdot g_1 \\ \Delta \epsilon_{v2}^* &= q \cdot (\epsilon_{v2} - q \epsilon_{v1} g_1) \cdot g_2 \\ \Delta \epsilon_{v3}^* &= q \cdot (\epsilon_{v3} - q \epsilon_{v1} g_1 - q(\epsilon_{v2} - q \epsilon_{v1} g_1) \cdot g_2) \cdot g_3 \\ &\quad \text{usw.} \end{aligned} \quad (9b)$$

Bei gleich großen Richtungsänderungen läßt sich hieraus ein einfacher Ausdruck zur sukzessiven Berechnung von $\Delta \epsilon_{vs}^*$ gewinnen. Mit $g_s = g$ und Einführung von

$$q^* = q \cdot g \left(\sqrt{\frac{1}{6} \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|_s} \right) = \text{const} \quad (10)$$

gilt für $s > 1$ und $\epsilon_{vs} - \epsilon_{vs-1} = \Delta \epsilon_{vs-1}$:

$$\Delta \epsilon_{vs}^* = q^* \Delta \epsilon_{vs-1} - (1 - q^*) \Delta \epsilon_{vs-1}^*. \quad (11)$$

3. Die Funktion g nach Versuchsergebnissen

Im Raum der (kleinen) Verzerrungsgrößen ϵ_{ij}^p wird der Verformungsvorgang durch eine Trajektorie dargestellt, deren Tangentenrichtung durch den Bildvektor des Richtungstensors $d\epsilon_{ij}^p/d\epsilon_v$ gegeben ist (Bild 2a). Der Bildvektor besitzt die Länge $\sqrt{3}/2$. Bei endlichen Richtungsänderungen ist daher der Betrag der Änderung des Richtungstensors (s. Bild 2b):

$$\left| \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right| = 2 \left| \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right| \sin \frac{\Delta \Theta}{2} = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \frac{\Delta \Theta}{2}, \quad (12a)$$

es gilt also:

$$\sqrt{\frac{1}{6} \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right| \Delta \left. \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right|} = \sin \frac{\Delta \Theta}{2}. \quad (12b)$$

Gl. (7) ergibt damit für die auf $\Delta \Theta = 180^\circ$ bezogenen Werte von $\Delta \epsilon_{vs}^*$:

$$\frac{\Delta \epsilon_{vs}^*(\Delta \Theta)}{\Delta \epsilon_{vs}^*(180^\circ)} = g \left(\sin \frac{\Delta \Theta}{2} \right). \quad (13)$$

Diese bezogenen Werte entsprechen (annähernd) den Verhältniswerten der Größen Δk (Bild 1), die Messungen für verschiedene Winkel $\Delta \Theta$ entnommen werden können.

Für die Funktion g wurde in [3] und [9] einfache Proportionalität angenommen, in einer späteren Untersuchung [10] eine quadratische Abhängigkeit benutzt. Die in [11] und [12] mitgeteilten Versuchsergebnisse deuten

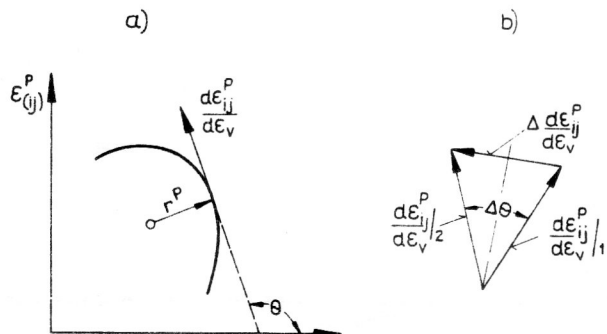


Bild 2
Verformungstrajektorie und Richtungstensor

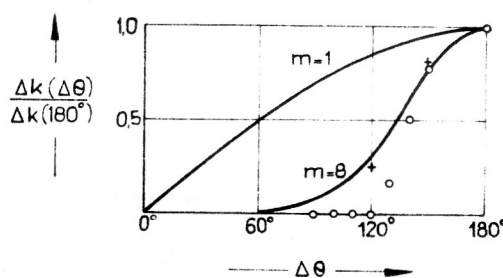


Bild 3
Bleibende Entfestigung Δk , bezogen auf den Wert von Δk bei Belastungsumkehr. Meßwerte aus Fig. 6 in [11]: +; Meßwerte aus Fig. 3b in [12]: o

jedoch auf eine wesentlich stärkere Abhängigkeit hin, wobei jedoch der starke Abfall der Werte Δk mit abnehmendem Winkel $\Delta\Theta$ (vgl. Bild 3) möglicherweise auf die Gestaltänderung der Fließgrenzfläche (Quereffekt) zurückzuführen ist, die in den vorliegenden theoretischen Beziehungen nicht berücksichtigt ist. Andere Meßergebnisse zeigen bis zu $\Delta\Theta = 45^\circ$ kleine, aber sehr unsichere Werte von Δk .

Zur Anpassung an die angeführten Meßergebnisse wird angesetzt:

$$g\left(\sqrt{\frac{1}{6} \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}}\right) = \left(\sin \frac{\Delta\Theta}{2}\right)^m \text{ mit } m = 8. \quad (14)$$

Bild 3 zeigt sie aus Fig. 6 in [11] bzw. Fig. 3b in [12] entnommenen Meßwerte. Eingezeichnet ist außerdem der Verlauf der Funktion g für $m = 1$ und $m = 8$. Der Umstand, daß $m > 1$ ist, ist von entscheidender Bedeutung für das Stoffgesetz der stetigen Verformung. Es ist in diesem Fall – wie nachfolgend gezeigt wird: $k_w(\epsilon_v) = k_f(\epsilon_v)$.

4. Stetige Verformung

Bei stetiger Verformung treten an die Stelle der Werte ϵ_{vs} der endlichen Richtungsänderung die die Spanne zwischen Null und ϵ_v durchlaufenden Werte $\bar{\epsilon}_v$. Die endlichen Größen $\Delta\epsilon_{vs}^*$ werden mit Einführung der Bezeichnung Δy durch die Differentiale dy , die Änderung $\Delta \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}$ durch die Differentiale $d \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}$ ersetzt.

$$\text{Mit } \left| d \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v} \right| = \sqrt{\frac{3}{2}} d\Theta \quad (15)$$

$$\text{gilt } \sqrt{\frac{1}{6} \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2} \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2}} = \sqrt{\frac{1}{6}} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d\Theta}{d\epsilon_v} = \frac{1}{2} \frac{d\Theta}{ds} \frac{ds}{d\epsilon_v},$$

wobei $ds = \sqrt{d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p}$ das Bogenelement der Trajektorie ist. Bezeichnet r^p den örtlichen Hauptkrümmungsradius, dann ist mit $ds = r^p d\Theta$ und $ds/d\epsilon_v = \sqrt{3}/2$:

$$\sqrt{\frac{1}{6} \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2} \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{1}{2r^p}. \quad (16)$$

Der Faktor $\sqrt{3}/2$ kommt in Fortfall, wenn anstelle des 9-dimensionalen Raumes der von Iljushin eingeführte 5-dimensionale Vektorraum mit den folgenden Verzerrungsgrößen benutzt wird:

$$\begin{aligned} d\bar{\epsilon}_1^p &= d\epsilon_{11}^p; d\bar{\epsilon}_2^p = \frac{1}{\sqrt{3}} (d\epsilon_{11}^p + 2d\epsilon_{22}^p) = \frac{1}{\sqrt{3}} (d\epsilon_{22}^p - d\epsilon_{33}^p); \\ d\bar{\epsilon}_3^p &= \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_{12}^p; d\bar{\epsilon}_4^p = \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_{23}^p; d\bar{\epsilon}_5^p = \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_{31}^p. \end{aligned} \quad (17)$$

Das Linienelement $d\bar{s}$ in diesem Vektorraum entspricht der Vergleichdehnung $d\epsilon_v$:

$$d\bar{s} = \sqrt{d\bar{\epsilon}_i^p d\bar{\epsilon}_i^p} = \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p} = d\epsilon_v. \quad (18)$$

$$\text{Es ist dann } \frac{d\Theta}{d\epsilon_v} = \frac{d\Theta}{d\bar{s}} = \frac{1}{r^p}. \quad (19)$$

Bei stetiger Verformung gehen mit Ersatz von $\Delta\epsilon_{vs}^*$ durch dy die Gl. (8) und (9) über in:

$$\epsilon_w = \epsilon_v - \int_0^{\epsilon_v} (1 - e^{-\vartheta(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)}) d\bar{y} \quad (20)$$

$$\text{mit } d\bar{y} = q \cdot (\bar{\epsilon}_v - \int_0^{\bar{\epsilon}_v} d\bar{y}) \cdot g\left(\sqrt{\frac{1}{6} \frac{d^2\epsilon_{ij}}{d\epsilon_v^2} \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2}}(\bar{\epsilon}_v) d\bar{\epsilon}_v\right)$$

oder mit (14) und (15):

$$d\bar{y} = q \cdot (\bar{\epsilon}_v - \bar{y}(\bar{\epsilon}_v)) \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{d\Theta}{d\bar{\epsilon}_v}\right)^m d\bar{\epsilon}_v^m \quad (21)$$

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{\epsilon}_v}(\bar{\epsilon}_v) = q \cdot (\bar{\epsilon}_v - \bar{y}(\bar{\epsilon}_v)) \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{d\Theta}{d\bar{\epsilon}_v}\right)^m d\bar{\epsilon}_v^{m-1}$$

Mit $d\epsilon_v \rightarrow 0$ behält $dy/d\epsilon_v$ nur für $m = 1$ einen endlichen Wert, für $m > 1$ verschwindet der Differentialquotient. Damit gilt dann:

$$\epsilon_w = \epsilon_v; k_w = k_f. \quad (22)$$

Für einen nach Meßergebnissen anzunehmenden Wert $m > 1$ entfällt also in dem Stoffgesetz für stetige Verformungsvorgänge der Einfluß der Entfestigung. Analog zum Deformationsgesetz (1) lautet es [3]:

$$\begin{aligned} S_{ij}(\epsilon_v) &= \frac{2}{3} k_f(\epsilon_v) \frac{d\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v}(\epsilon_v) \\ &\quad - \frac{2}{3} \int_0^{\epsilon_v} z(\bar{\epsilon}_v) k_f(\bar{\epsilon}_v) \varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \frac{d^2\epsilon_{ij}^p}{d\epsilon_v^2}(\bar{\epsilon}_v) d\bar{\epsilon}_v. \end{aligned} \quad (23)$$

5. Verformung längs Polygonen

In den Bildern 5 bis 8 sind Ergebnisse von Rechnungen für zyklische Verformungen dargestellt, die einem Kreis vom Radius r^p eingeschriebene gleichseitige Polygone durchlaufen (vgl. Bild 4a). Bei Benutzung des in Gl. (17) dargestellten Vektorraumes handelt es sich um einen ebene Verformung mit den Größen:

$$d\bar{\epsilon}_1^p = d\epsilon_{11}^p = d\epsilon^p; d\bar{\epsilon}_3^p = \frac{2}{\sqrt{3}} d\epsilon_{12}^p = \frac{d\gamma^p}{\sqrt{3}}. \quad (24)$$

Die in der Deformationsbeziehung (1) auftretenden Größen $d\epsilon_{ij}^p/d\epsilon_v$ können damit (vgl. Bild 4b) wie folgt ausgedrückt werden:

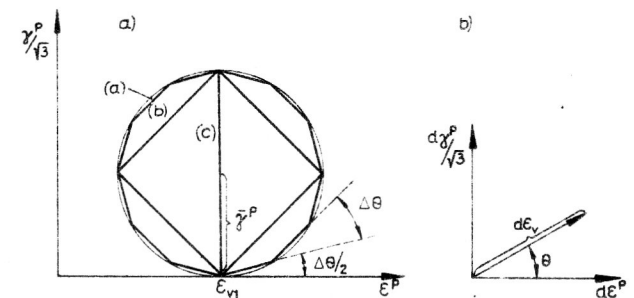


Bild 4

Zur Kreis- und Polygon-Verformung

- a) Verformungstrajektorien, Polygone für $\Delta\Theta = 30^\circ$ (a), $\Delta\Theta = 90^\circ$ (b), $\Delta\Theta = 180^\circ$ (c),
b) Verzerrungsgrößen

$$\frac{d\epsilon_{11}^p}{d\epsilon_v} = \cos\Theta; \quad \frac{d\epsilon_{12}^p}{d\epsilon_v} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\Theta. \quad (25)$$

Die Deformationsbeziehung (1) erhält die Form:

$$\sigma(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = k_w(\epsilon_v) \cos\Theta_n$$

$$- \sum_{s=1}^n z(\epsilon_{vs}) k_w(\epsilon_{vs}) \varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \Delta \cos\Theta \Big|_s, \quad (26a)$$

$$\sqrt{3} \tau(\epsilon_v > \epsilon_{vn}) = k_w(\epsilon_v) \sin\Theta_n$$

$$- \sum_{s=1}^n z(\epsilon_{vs}) k_w(\epsilon_{vs}) \varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs}) \Delta \sin\Theta \Big|_s. \quad (26b)$$

Für den die Relaxationsfunktion $\varphi(\epsilon_v - \epsilon_{vs})$ darstellenden Ansatz:

$$\varphi = e^{-\kappa(\epsilon_v - \epsilon_{vs})^\rho} \quad (27)$$

sind in [5] die aus den Versuchen ermittelten Materialwerte κ und ρ für die Bauschingerkennzahl $2z = 1$ angegeben.

Die Polygonverformung beginne nach einer Vorverformung in Richtung $\Theta_0 = 0$ von der Größe ϵ_{v1} mit der ersten Richtungsänderung ($s = 1$) auf den Winkel $\Theta_1 = \frac{\Delta\Theta}{2}$ (vgl. Bild 4a). Für n Richtungsänderungen bestehen folgende Beziehungen:

$$\epsilon_v = \epsilon_{vn} + \delta\epsilon_v$$

$$\epsilon_{vn} = \epsilon_{v1} + (n-1)\Delta\epsilon_v; \quad \Delta\epsilon_v = 2\bar{r}^p \sin\frac{\Delta\Theta}{2}$$

$$\epsilon_v - \epsilon_{vs} = (n-s)\Delta\epsilon_v + \delta\epsilon_v. \quad (28)$$

Dabei bedeutet $\delta\epsilon_v$ einen Verformungszuwachs nach der n -ten Richtungsänderung mit der Richtung Θ_n .

Die zur Bestimmung von k_w nach Gl. (1) erforderliche Berechnung der wirksamen Dehnung ϵ_w erfolgt nach Gl. (8) mit den aus Gl. (9) ermittelten Größen

$$\Delta\epsilon_{v1}^* = q\epsilon_{v1} g_1 \text{ mit } g_1 = \left(\sin\frac{\Delta\Theta}{4}\right)^m \quad (29a)$$

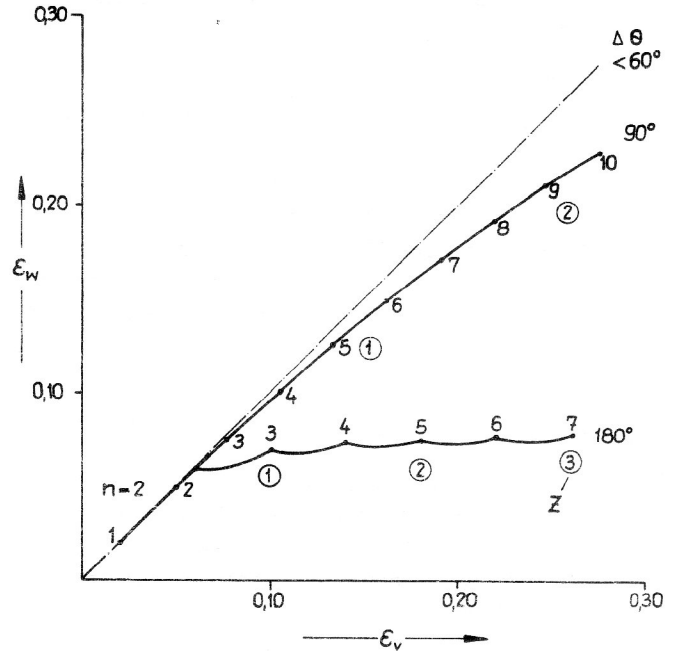


Bild 5
Wirksame Dehnung ϵ_w bei Polygon-Verformung $\bar{r}^p = 0,02$
(n = Anzahl der Richtungsänderungen, z = Zyklenzahl)

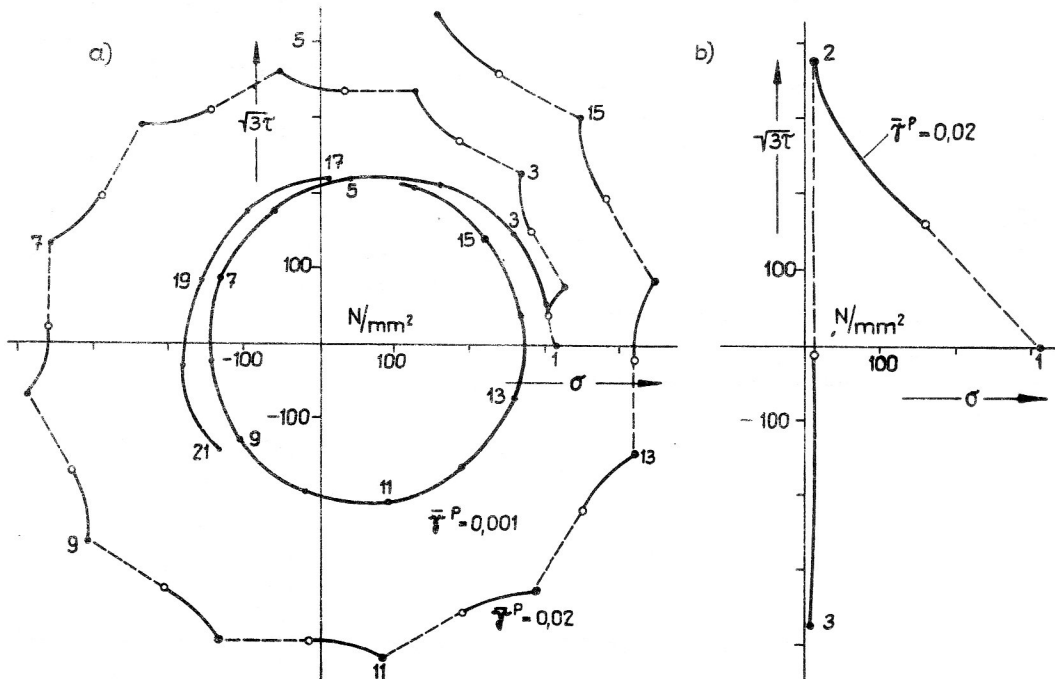


Bild 6
Polygon-Verformung in der Spannungsebene:
a) $\Delta\Theta = 30^\circ$; $\bar{r}^p = 0,02$ bzw. $0,001$,
b) $\Delta\Theta = 180^\circ$; $\bar{r}^p = 0,02$

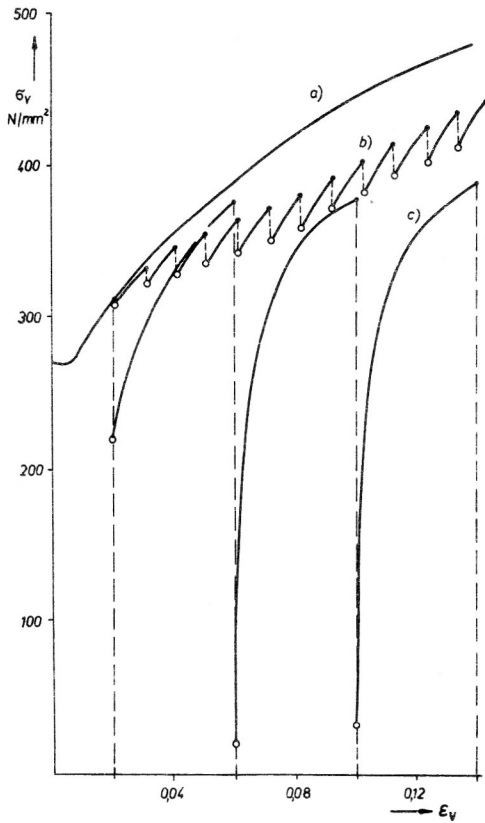


Bild 7

Verlauf der Vergleichsspannung über der Vergleichsdehnung für
a) monotone Fließkurve,
b) Polygon $\Delta\Theta = 30^\circ$; $\bar{r}^P = 0,02$,
c) Polygon $\Delta\Theta = 180^\circ$; $\bar{r}^P = 0,02$

$$\Delta\epsilon_{v2}^* = q g \Delta\epsilon_v + \left(\frac{g}{g_1} - q g\right) \Delta\epsilon_{v1}^* \quad \text{mit } g = \left(\sin\frac{\Delta\Theta}{2}\right)^m \quad (29b)$$

und für $s \geq 3$:

$$\Delta\epsilon_{vs}^* = q g \Delta\epsilon_v + (1 - q g) \Delta\epsilon_{vs-1}^* \quad \text{gemäß Gl. (11)}. \quad (29c)$$

Für die Polygonwinkel $\Delta\Theta = 90^\circ$ und 180° berechnete Werte ϵ_w zeigt Bild 5 für den Fall $\epsilon_{v1} = 0,02$ und $\bar{r}^P = 0,02$. Weitere Rechnungswerte sind: $q = 1$ nach den Versuchen an Stahl, $\vartheta_\infty \approx \vartheta_1 \approx 18$ nach Gl. (6a) für $2\epsilon_{v1} = 0,04$. Aus Bild 5 ist ersichtlich, daß für den gewählten Wert $m = 8$ bereits bei $\Delta\Theta = 90^\circ$ die Unterschiede zwischen ϵ_w und ϵ_v nur noch gering sind.

Zur Berechnung der Spannungen nach den Gl. (26) werden die in [5] für den untersuchten Stahl ermittelten Werte benutzt: $\kappa = 10,4$; $\rho = 0,45$ für $2z = 1$. Für die Fließkurve wurde der folgende den Versuchsergebnissen angepaßte Ausdruck verwendet:

$$k_f = 455 - 390 \epsilon_v - 200 e^{-14 \epsilon_v}$$

Rechnungsergebnisse für die Fälle $\Delta\Theta = 30^\circ$ und 180° mit $\bar{r}^P = 0,02$ sind in Bild 6a und 6b dargestellt. Eine Vorverformung von 2 % wurde gewählt, weil zahlreiche Versuche zeigen, daß oberhalb dieses Wertes mit einer praktisch konstanten Größe z gerechnet werden kann (hier $z = 0,5$).

In den Bildern 6a – 6b sind die am Ende jeder Verformungs-Teilstrecke erreichten Spannungen durch stärkere Punkte hervorgehoben. Die durch kleine Kreise gekennzeichneten Punkte zeigen den Wiederbeginn der pla-

stischen Verformung nach einem Richtungswechsel an. Dazwischen liegt die im nichtplastischen (elastischen) Gebiet auftretende Änderung des Spannungszustandes (gestrichelt).

Für die zyklische Verformung mit $\Delta\Theta = 180^\circ$ zeigt Bild 6b ein rasches Abklingen der durch die Vorverformung erzeugten Asymmetrie. Ein solches Verhalten wird auch für den in Bild 6a noch dargestellten Fall $\Delta\Theta = 30^\circ$ mit $\bar{r}^P = 0,001$ deutlich. Im Bild sind für diesen Fall nur die am Ende jeder Verformungs-Teilstrecke erreichten Spannungen durch einen Kurvenzug verbunden.

Eine andere Art der Darstellung der Ergebnisse für $\Delta\Theta = 30^\circ$ bzw. 180° mit $\bar{r}^P = 0,02$ zeigt Bild 7, in dem die resultierende Vergleichsspannung $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + 3 \tau^2}$ über der Vergleichsspannung ϵ_v aufgetragen ist. Die für $\Delta\Theta = 180^\circ$ bei Richtungswechsel auftretenden großen Spannungssprünge sind erwartungsgemäß für $\Delta\Theta = 30^\circ$ stark reduziert und leiten zu dem stetigen Verlauf der Verformung längs eines Kreises über. Für $\Delta\Theta = 180^\circ$ macht sich die Entfestigung ($\epsilon_w < \epsilon_v$) in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen in einer wesentlich geringeren Zunahme der maximalen Spannungen mit ϵ_v bemerkbar.

6. Verformung längs Kreisen

Für die längs eines Kreises gegebene stetige Verformung, beginnend im Ursprung der Vektorebene bei $\epsilon_{v1} = 0$, geht mit den Beziehungen (25) und den daraus folgenden

$$\frac{d^2 \epsilon_{11}^p}{d\epsilon_v^2} = -\sin\Theta \frac{d\Theta}{d\epsilon_v}; \quad \frac{d^2 \epsilon_{12}^p}{d\epsilon_v^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\Theta \frac{d\Theta}{d\epsilon_v} \quad (30)$$

die Gl. (23) über in die den Gl. (26) analogen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen:

$$\sigma(\epsilon_v) = k_f(\epsilon_v) \cos\Theta + \int_0^\Theta z(\bar{\epsilon}_v) k_f(\bar{\epsilon}_v) \varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \sin\bar{\Theta} d\bar{\Theta} \quad (31a)$$

$$\sqrt{3} \tau(\epsilon_v) = k_f(\epsilon_v) \sin\Theta - \int_0^\Theta z(\bar{\epsilon}_v) k_f(\bar{\epsilon}_v) \varphi(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v) \cos\bar{\Theta} d\bar{\Theta} \quad (31b)$$

$$\text{mit } \epsilon_v = \bar{r}^P \Theta; \quad \bar{\epsilon}_v = \bar{r}^P \bar{\Theta}.$$

Bei Beginn der Zyklen mit $\epsilon_v = 0$ ist die Abhängigkeit der Bauschingerkennzahl von der Vergleichsdehnung zu berücksichtigen. In Anlehnung an die zugrundeliegenden und auch andere Versuchsergebnisse (vgl. Bild 1 in [3]) wird angesetzt:

$$z = (1 - e^{-\zeta \epsilon_v}) z_\infty \quad \text{mit } \zeta = 150. \quad (32)$$

Zur besseren Anpassung an die Versuchsergebnisse [2], die für Stahl ein Einsetzen der plastischen Rückverformung bereits vor der völligen Entlastung zeigen ($z_\infty = 0,8$) wird eine Korrektur der oben benutzten Funktion $2z\varphi$ in der Weise vorgenommen, daß sich für $\epsilon_v = \bar{\epsilon}_v$ der Wert $2z_\infty = 1,6$ ergibt:

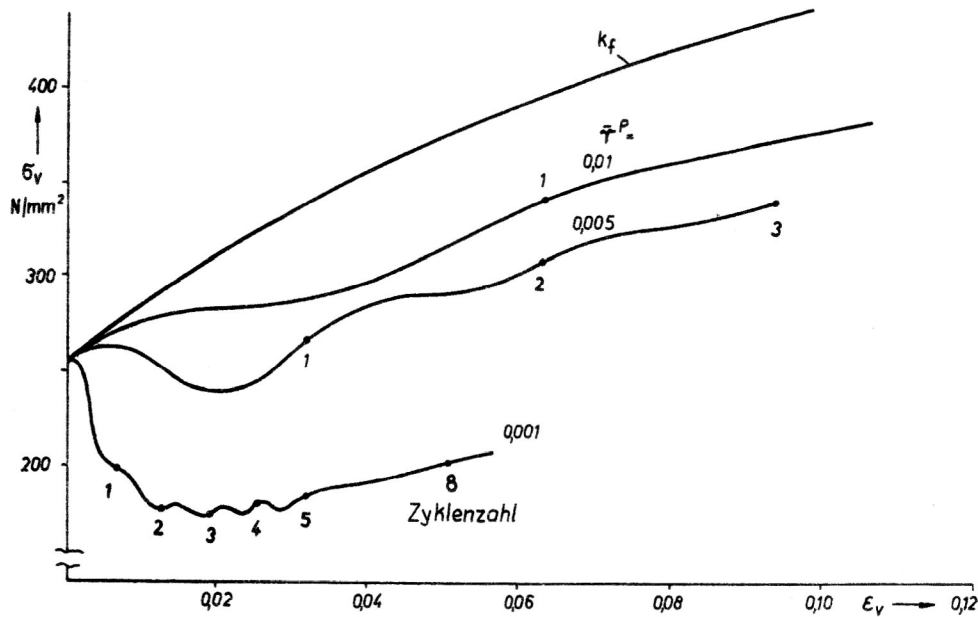


Bild 8
Spannungsverlauf bei Kreisverformung mit verschiedenen Kreisradien

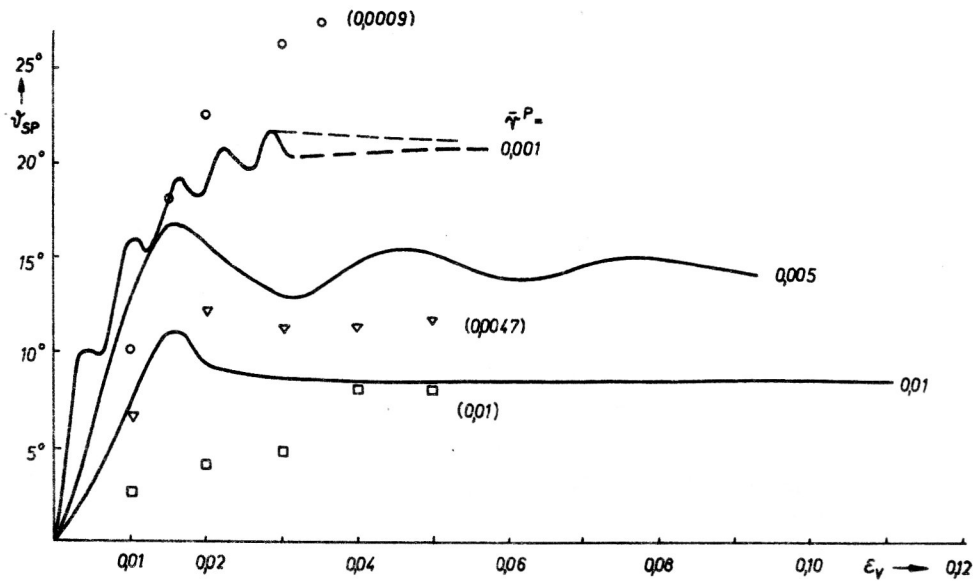


Bild 9
Nachteilwinkel ϑ_{sp} des Spannungsvektors bei Kreis-Verformung.
Versuchswerte (Mittelwerte) nach [13] $\circ \nabla \square$

$$2z_{\infty}\varphi = (1 + 0,6e^{-300(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)})e^{-\kappa(\epsilon_v - \bar{\epsilon}_v)^\rho} \quad (33)$$

(Die Werte κ und ρ sind geringfügig geändert: 10 bzw. 0,42).

Obige Korrektur wirkt sich nur auf den anfänglichen steilen Ast der Funktion aus. Ihren Verlauf für $\epsilon_{vs} = 0,03$ zeigt Bild 1. Die ebenfalls eingezeichnete Kurve

z_{k_f} stellt die kinematische Verschiebung dar, die Differenz $k_f(1 - z)$ die Mises-Fließspannung.

Rechnungsergebnisse sind in den folgenden Bildern dargestellt. In Bild 8 ist der Verlauf der resultierenden Vergleichsspannung über der Vergleichsdehnung aufgetragen für die Kreisradien $\bar{r}^P = 0,01; 0,005; 0,001$. Mit kleiner werdender Amplitude \bar{r}^P der Zyklen steigt der

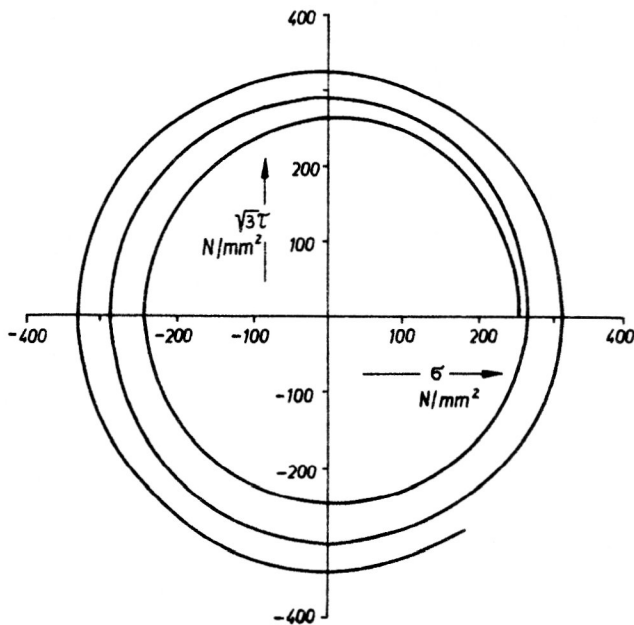


Bild 10
Kreis-Verformung mit $\bar{r}^P = 0,005$ in der Spannungsebene

Einfluß des Bauschingerffekts und führt zu einer zunehmenden Absenkung des Spannungsniveaus, das aber nach einem Übergangsbereich dem Verlauf der monotonen Fließkurve folgt.

Die durch den Bauschingerffekt bewirkte verzögerte Einstellung des Spannungszustandes auf den geänderten Verzerrungszustand ist in Bild 9 dargestellt. Der „Nacheilwinkel“ ϑ_{sp} des Spannungsvektors in der Vektorebene gegenüber der durch Θ gegebenen augenblicklichen Verformungsrichtung ist:

$$\vartheta_{sp} = \Theta - \Theta_{sp} \text{ mit } \Theta_{sp} = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{3} \tau}{\sigma} \right). \quad (34)$$

Die zum Vergleich mit experimentellen Ergebnissen eingetragenen Versuchswerte (Mittelwerte) sind [13] entnommen.

Den Verlauf der Spannungen in der Spannungsebene zeigt Bild 10 für den Fall $\bar{r}^P = 0,005$. Während in diesem Fall eine größer werdende Spannungsspirale entsteht, ist – wie aus dem Verlauf von σ_v in Bild 8 geschlossen werden kann – für $\bar{r}^P = 0,001$ eine zunächst enger werdende Spirale zu erwarten.

In Bild 11 sind die für $\bar{r}^P = 0,005$ auftretenden Spannungen σ_v über der Anzahl der Halbzyklen aufgetragen und zum Vergleich die für den gleichen Fall mit $\Delta\Theta = 180^\circ$ errechneten Spannungen. Letztere besitzen einen mit ϵ_v zunehmenden Abstand von den Spannungen der Kreisverformung, vor allem bedingt durch die auftretende „Entfestigung“ ($\epsilon_w < \epsilon_v$).

Die in den Bildern 10 und 11 dargestellten Spannungsverläufe entsprechen in ihrem Verhalten den in [14] (Fig. 3b bzw. Fig. 4) veröffentlichten Meßergebnissen, wobei bei diesen die in Bild 10 und 11 gezeigten Eigenschaften in wesentlich stärkerem Maße in Erscheinung treten, wohl bedingt durch den andersartigen Werkstoff (Kupfer).

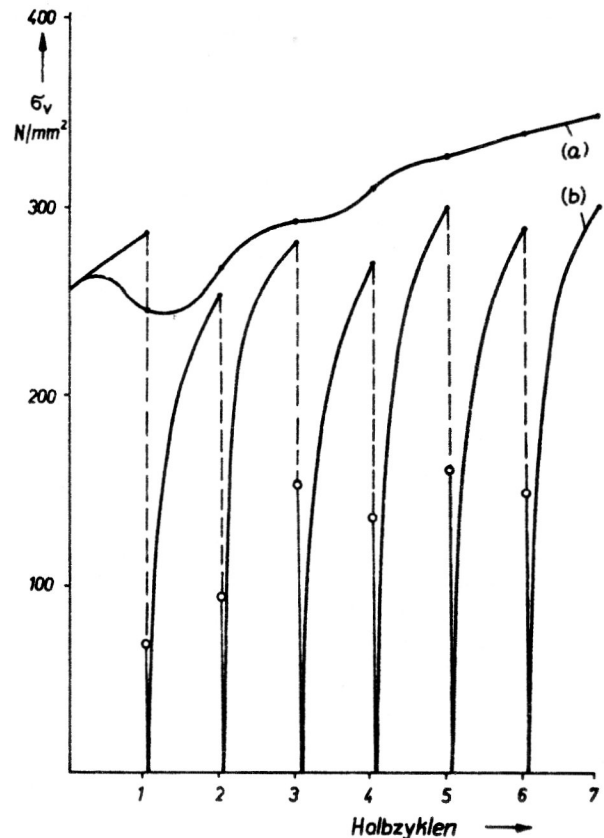


Bild 11
Darstellung der Vergleichsspannung, aufgetragen über der Zahl der Halbzyklen, für Kreis-Verformung (a) und Verformung mit Lastumkehr (b)

7. Abschließende Bemerkungen

Die vorstehenden Rechnungsergebnisse stützen sich auf die aus der Analyse von Versuchsergebnissen gewonnenen Materialgesetze und Materialwerte. Die betrachteten zyklischen Verformungen sind kleinen plastischen Verformungen zuzurechnen, wenn auch die Vergleichsdehnung dabei sehr große Werte erreichen kann. Der Einfluß einer Starrkörperdrehung ist für diese Verformungen praktisch ausgeschaltet, wenn das in [4] beschriebene Achsenkreuz benutzt wird (vgl. hierzu die Ausführungen in [15]). Hinzuweisen wäre noch auf die experimentell festgestellte Tatsache, daß bei Vorverformung und nachfolgenden Zyklen mit Richtungsumkehr eine Verzögerung der Relaxation auftritt. Die analytische Erfassung dieses Effektes ist in Auswertung der vorliegenden Versuchsergebnisse für Stahl und Messing in [16] eingehend dargestellt.

LITERATUR

- [1] Fritsche, G.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum mechanischen Verhalten von Metallen bei Zug-Druck-Belastung im plastischen Bereich. Dissertation der Techn. Universität Dresden 1976.
- [2] Richter, K.: Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Spannungs-Verformungs-Verhalten von St38 und Ms58 bei Zug-Torsions-Belastung im plastischen Bereich. Dissertation der Techn. Universität Dresden 1978.

- [3] Backhaus, G.: Fließspannungen und Fließbedingung bei zyklischen plastischen Verformungen. ZAMM 56 (1976) 337 – 348.
- [4] Backhaus, G.: Constitutive equations for the plastic behaviour of metals and the influence of the deformation induced rotation. Acta Mechanica 41 (1981) 73 – 83.
- [5] Backhaus, G. und Richter, K.: Deformationsgesetze des plastischen Materialverhaltens auf der Grundlage von Versuchsergebnissen. Technische Mechanik 2 (1981), Heft 2, 36 – 46.
- [6] Orovan, E.: Causes and effects in internal stresses, enthalten in: Internal stresses and fatigue in metals. Elsevier Publishing Comp. 1959.
- [7] Backhaus, G.: Deformationsgesetze. Akademie-Verlag Berlin 1983.
- [8] Dietz, M.: Beitrag zum Wesen und den Ursachen des Bau-schingereffekts. Dissertation der Ingenieur-Hochschule Zwickau 1977.
- [9] Backhaus, G.: Zum Stoffgesetz des elastisch-plastischen Körpers. ZAMM 52 (1972) T293 – T305.
- [10] Backhaus, G.: Plastic deformation in form of strain trajectories of constant curvature – Theory and comparison with experimental results. Acta Mechanica 34 (1979) 193 – 204.
- [11] Ohashi, Y.; K. Kawashima; S. Nagahiko: Precise experimental results and an analytical formulation of the subsequent plastic deformation of mild steel subjected to pre-stressing. Bull. JSME, Vol. 18, No. 125 (1975).
- [12] Ohashi, Y.; M. Tokuda; Sh. Itoh and T. Miyake: Experimental investigation on history-dependence of plastic behaviour of brass under combined loading. JSME Vol. 23 No. 182 (1980).
- [13] Ohashi, Y.; M. Tokuda; H. Yamashita: Plastic deformation of mild steel under combined load of axial force and torsion with strain trajectories of constant curvature. Bull. JSME, Vol. 18, No. 120 (1975).
- [14] Lamba, M. S.; Sidebottom, O. M.: Cyclic plasticity for non-proportional paths. Journ. of Engineering Materials and Technology, Vol. 100, 96 – 111 (1978).
- [15] Backhaus, G.: Ein objektives Stoffgesetz des plastischen Materialverhaltens. ZAMM 65 (1985) 525 – 535.
- [16] Backhaus, G.: Anisotropic behaviour at cyclic plastic deformation, enthalten in: Boehler, J. P. (ed.): Mechanical behaviour of anisotropic solids. Proceedings of the Euro-mech Colloquium 115, Villard-de-Lane 1979, Editions du CNRS Paris 1982.

Anschrift des Verfassers:
 Prof. (em.) Dr.-Ing. G. Backhaus
 Herkulesstr. 3
 Dresden
 8020