

Testung von Fehlerindikatoren für Finite-Element-Lösungen der linearen Elastizitätstheorie

Johannes Altenbach, Roland Mücke

1. Einleitung

Einen Schwerpunkt bei der Weiterentwicklung der Methode der Finiten Elemente (FEM) bildet die Schaffung adaptiver Lösungsverfahren, bei denen über eine automatische Netzsteuerung die Qualität der FE-Lösung schrittweise erhöht wird. Grundlage einer automatischen Netzverbesserung ist die Kenntnis der Fehlerverteilung einer vorhandenen FE-Lösung.

Da sich die Genauigkeit einer FE-Lösung wegen der Vielfältigkeit der Einflußparameter nur in Ausnahmefällen vor einer Berechnung abschätzen läßt, muß aus der Näherungslösung selbst, also a-posteriori, eine Fehlerschätzung hergeleitet werden.

Bereits 1976 wurden von Babuska (Laboratory for Numerical Analysis der University of Maryland) ein grundlegendes Konzept adaptiver FE-Verfahren entwickelt und wichtige Begriffe der Fehlerabschätzung eingeführt [1]. Zunächst waren aber die Möglichkeiten einer a-posteriori Fehleranalyse auf einfachste Lösungsgebiete beschränkt und somit für praxisrelevante Problemstellungen kaum anwendbar. Eng verbunden mit der Weiterentwicklung der Fehleranalyse war die Lösung praktischer und theoretischer Fragestellungen der automatischen Netzverbesserung. Man unterscheidet dabei die p-Version von der h-Version der Netzverbesserung, kann aber auch beide Versionen gleichzeitig anwenden. In der p-Version wird das Elementnetz beibehalten, aber die Ordnung der Ansatzfunktionen erhöht. Die h-Version beinhaltet eine Verfeinerung der Vernetzung, wobei sich die Ordnung der Ansatzfunktionen nicht ändert. Die p-Version, speziell bei Verwendung des hierarchischen Elementkonzeptes, stand zu Beginn der Entwicklung im Vordergrund. Für die p-Version konnten Fehlerindikatoren abgeleitet werden, die sich für praxisnahe Problemstellungen eignen, wobei zunächst eine Beschränkung auf ein- und zweidimensionale Aufgabenklassen erfolgte (1981 Zienkiewicz, Kelly, Gago, Babuska [2], 1983 Babuska, Kelly, Gago, Zienkiewicz [3]). Der Nachteil der p-Version besteht in der Notwendigkeit, daß ein breit angelegter Elementkatalog auch mit höhergradigen Ansatzfunktionen bereitgestellt werden muß. Deshalb ist die Eignung der p-Version besonders für universelle FE-Programmsysteme umstritten.

In neueren Veröffentlichungen werden daher auch Fehlerindikatoren vorgestellt, die eine Fehleranalyse auf der Grundlage der h-Version der Netzverbesserung ermöglichen (1987 Zienkiewicz, Zhu [4], 1987 Roberti, Melanoff [5]). Diese Fehlerindikatoren lassen sich mit vertretbarem Aufwand aus lokalen Größen einer FE-Lösung berechnen und sind für praxisnahe Aufgabenstellungen einsetzbar.

Die Anwendbarkeit der Fehlerindikatoren ist bisher vorrangig auf lineare Randwertaufgaben beschränkt. Für einige nichtlineare Randwertprobleme liegen erste theoretische Ansätze einer Fehlerindikation vor (1984 Löhner, 1984 Rheinbolt) [1].

Im vorliegenden Beitrag wird die Realisierung und Testung dreier Fehlerindikatoren für eine Fehleranalyse bei h-Version der Netzverbesserung beschrieben. Um die Anschaulichkeit der Ergebnisse zu erhöhen, werden nur 2D-Probleme der linearen Elastizitätstheorie betrachtet. Die Vorgehensweise einer Fehleranalyse ist bei anderen Aufgaben mit positiv definiten Differentialoperatoren analog.

2. Theoretische Grundlagen

Betrachtet wird das Differentialgleichungssystem der linearen Elastizitätstheorie

$$\underline{L} \underline{u} + \underline{\bar{p}} = \underline{D}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} + \underline{\bar{p}} = \underline{0} \quad (1)$$

mit den Randbedingungen

$$\underline{u} = \underline{\bar{u}} \quad \text{auf } O_u \quad (2)$$

$$\underline{N}^T \underline{E} \underline{D} \underline{u} = \underline{\bar{q}} \quad \text{auf } O_q.$$

Dabei bezeichnet \underline{L} einen positiv definiten Differentialoperator \underline{E} die Hookesche Matrix, \underline{D} die Differentialmatrix, $\underline{\bar{p}}$ den Vektor der Volumenkräfte und $\underline{\bar{q}}$ den Vektor der Oberflächenkräfte. Diskretisiert man das Lösungsgebiet in einzelne Elemente und macht für jedes Element einen Verschiebungsansatz

$$\underline{u} \approx \underline{\tilde{u}} = \underline{G} \underline{v}, \quad (3)$$

so läßt sich aus dem Verfahren von Galerkin oder über eine Variationsformulierung ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekanntenen Knotenverschiebungen \underline{v} ermitteln [6]:

$$\underline{K} \underline{v} = \underline{f} \quad (4)$$

Nach Lösung dieses Gleichungssystems liegt der Verschiebungszustand des Ausgangsproblems vor. Der Spannungszustand wird anschließend elementweise aus den Verschiebungen berechnet:

$$\underline{\sigma} \approx \underline{\tilde{\sigma}} = \underline{E} \underline{D} \underline{G} \underline{v} \quad (5)$$

Die so konstruierte Lösung stellt global die beste Näherungslösung dar, die mit den vorgegebenen Ansatzfunktionen und der Diskretisierung des Lösungsgebietes erreichbar ist. Betrachtet man jedoch einzelne Punkte oder Elemente im Lösungsgebiet, können noch erhebliche Abweichungen der Näherungslösung von der exakten Lösung auftreten. Die Fehlerfunktion in den Verschiebungen und Spannungen ergibt sich aus

$$\underline{e}_u = \underline{u} - \tilde{\underline{u}} \quad (6)$$

$$\underline{e}_\sigma = \underline{\sigma} - \tilde{\underline{\sigma}} \quad (7)$$

Um für die Größe der Fehlerfunktion in einem betrachteten Gebiet $\Omega^{(e)}$ ein Maß zu erhalten, werden die Funktionen über eine Norm gemessen. Besonders geeignet dafür sind die Energienorm $\|\underline{e}_u\|_E$ und die L_2 -Norm $\|\underline{e}_\sigma\|_{L_2}$:

$$\|\underline{e}_u\|_E = \left(\int_{\Omega^{(e)}} \underline{e}_u^T \underline{L} \underline{e}_u d\Omega^{(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

$$\|\underline{e}_\sigma\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega^{(e)}} \underline{e}_\sigma^T \underline{e}_\sigma d\Omega^{(e)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

Beide Normen unterscheiden sich lediglich durch die Gewichtsfunktion \underline{L} . Für positiv definite Differentialoperatoren läßt sich eine Beziehung zwischen beiden Normen herstellen (γ – positive Konstante):

$$\|\underline{e}_u\|_E^2 \geq \gamma^2 \|\underline{e}_\sigma\|_{L_2}^2 \quad (10)$$

Die Energienorm läßt sich physikalisch als Formänderungsenergie des Fehlers in den Verschiebungen auffassen und ist damit aufgrund der Interpretierbarkeit der Ergebnisse für eine Fehlerschätzung besonders geeignet.

Bei der Fehleranalyse wird zwischen Fehlerindikator und Fehlerestimator unterschieden. Ein Fehlerindikator λ_e ist ein Fehlermaß in einer geeigneten Norm, welches sich aus lokalen Eigenschaften einer FE-Lösung des Elementes e und seiner unmittelbaren Nachbarschaft berechnen läßt. Die Gesamtheit der Fehlerindikatoren ergibt einen Überblick über die Fehlerverteilung im Lösungsgebiet.

Ein Fehlerestimator ${}^\circ\|\underline{e}\|$ (in der Energienorm oder der L_2 -Norm) schätzt den Gesamtfehler der Näherungslösung und läßt sich aus den Fehlerindikatoren ermitteln:

$${}^\circ\|\underline{e}\|^2 = \sum_e \lambda_e^2 \quad (11)$$

Wenn bei Verfeinerung des Netzes der geschätzte Fehler ${}^\circ\|\underline{e}\|$ gegen den exakten Fehler $\|\underline{e}\|$ konvergiert, so heißt der Fehlerestimator asymptotisch exakt, und es gilt

$$\Theta = \frac{{}^\circ\|\underline{e}\|}{\|\underline{e}\|} \rightarrow 1 \quad (12)$$

Asymptotisch exakte Fehlerestimatoren erhält man, indem die Fehlerindikatoren λ_e mit entsprechenden Faktoren multipliziert werden.

Um verschiedene Normen miteinander zu vergleichen, wird ein relativer Fehlerestimator bestimmt

$$\eta = \frac{\|\underline{e}\|}{\|\underline{u}\|} \cdot 100\% \approx \left(\frac{{}^\circ\|\underline{e}\|^2}{\|\tilde{\underline{u}}\|^2 + {}^\circ\|\underline{e}\|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot 100\% \quad (13)$$

Die Größe η beschreibt damit den prozentualen Fehler der Gesamtlösung.

3. Fehlerindikatoren

Durch Einsetzen des Verschiebungsansatzes in die Differentialgleichung erhält man im Elementinnern $\Omega^{(e)}$ ein Residuum r . Die Übergangsbedingungen jedes Elementes in den Verschiebungen werden exakt erfüllt, in den Spannungen treten an den Elementrändern $\Gamma^{(e)}$ Sprünge auf (C^0 – Stetigkeit der Ansatzfunktionen). Sowohl das Residuum der Differentialgleichung als auch die Spannungssprünge am Elementrand sind ein Maß für den Fehler der Näherungslösung und können zu einem Fehlerindikator λ_{eR} zusammengefaßt werden:

$$\lambda_{eR}^2 = K_1 \int_{\Omega^{(e)}} r^T r d\Omega^{(e)} + K_2 \int_{\Gamma^{(e)}} \underline{J}^T(\underline{\sigma}) \underline{J}(\underline{\sigma}) ds^{(e)} \quad (14)$$

Die Konstanten K_1 und K_2 sind dabei so festzulegen, daß der Fehlerindikator asymptotisch exakt wird. In [3] wird vorgeschlagen:

$$K_1 = \frac{1-\nu}{24 E p^2} h_e^2 \quad K_2 = \frac{1-\nu}{24 E p^2} h_e \quad (15)$$

(p – Ordnung der Ansatzfunktionen, h_e – charakteristische Elementabmessungen, E – Elastizitätsmodul, ν – Querkontraktionszahl)

Zwei weitere Fehlerindikatoren ergeben sich aus der Gebietsintegration über die Fehlerfunktion \underline{e}_σ . An jedem Knoten liegt der Spannungsvektor aller angrenzenden Elemente vor. Bildet man komponentenweise einen Mittelwert, entstehen an jedem Knoten repräsentative Spannungswerte. Es liegt demnach am Knoten i in jeder Spannungskomponente ein Sprung der Element-

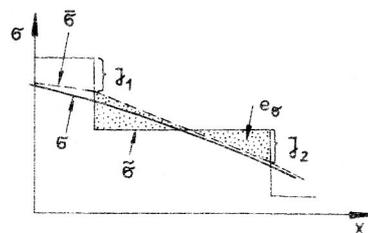


Bild 1
 σ – exakte Lösung, $\tilde{\sigma}$ – FE-Lösung, $\bar{\sigma}$ – aus Knotenmittelung
 approximierter Lösung, $J_1 = (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma})_1$, $J_2 = (\tilde{\sigma} - \bar{\sigma})_2$
 $e_\sigma = G_1 J_1 + G_2 J_2 = \underline{G} \underline{J}$

spannung $\tilde{\sigma}_i$ gegenüber dem Spannungsmittelwert $\bar{\sigma}_i$ aller an einem Knoten angrenzenden Elemente vor. Die Fehlerfunktion in den Spannungen ergibt sich, indem mit Hilfe der Spannungssprünge an den Knoten die Fehlerfunktion e_σ im Elementinnern durch die gleichen Ansatzfunktionen wie die Verschiebungen approximiert wird. Die beschriebene Vorgehensweise ist in Bild 1 für ein eindimensionales Beispiel bei Verwendung linearer Ansatzfunktionen dargestellt.

Die erhaltene Fehlerfunktion läßt sich in der L_2 -Norm oder der Energienorm messen. Für das Elastizitätsproblem ergeben sich damit aus den Gleichungen (8) und (9) zwei weitere Fehlerindikatoren [4]:

$$\lambda_{eL_2}^2 = \|e_\sigma\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega^{(e)}} e_\sigma^T e_\sigma d\Omega^{(e)} \quad (16)$$

$$\lambda_{eE}^2 = \|e_u\|_E^2 = \int_{\Omega^{(e)}} e_u^T E^{-1} e_u d\Omega^{(e)} \quad (17)$$

4. Testbeispiele

Die Fehlerindikatoren (14), (16) und (17) werden an Aufgaben der ebenen Elastizitätstheorie getestet. Im Anhang 1 und Anhang 2 sind die Testbeispiele und deren Vernetzungen dargestellt. Für eine Fehleranalyse in räumlichen Aufgaben ist ein analoges Vorgehen möglich, wobei sich der Aufwand zur Berechnung der Fehlerindikatoren wesentlich vergrößert. Auf die Besonderheiten einer Fehlerindikation bei anisotropem Materialverhalten und bei isoparametrischen Elementen wird in den Erläuterungen zum jeweiligen Fehlerindikator hingewiesen.

Zur Berechnung des Gebietsintegrals von λ_{eR} (14) benötigt man das Residuum der Differentialgleichung. Bei isotropem Materialverhalten gilt für den ebenen Spannungszustand:

$$r_x = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\underline{G} \underline{v}_x) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\underline{G} \underline{v}_x) + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\underline{G} \underline{v}_y) \right] + \bar{p}_x \quad (18)$$

$$r_y = \frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\underline{G} \underline{v}_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\underline{G} \underline{v}_y) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\underline{G} \underline{v}_y) \right] + \bar{p}_y$$

($\underline{v}_x, \underline{v}_y$ – Vektoren der Knotenverschiebungen in x- und y-Richtung)

Es werden in Gl. (18) die 2. Ableitungen der Ansatzfunktionen \underline{G} (in lokalen Koordinaten) nach den globalen Koordinaten benötigt. Bei Anwendung isoparametrischer Elemente sind die Transformationsbeziehungen zwischen lokalen und globalen Koordinaten i. a. nicht-

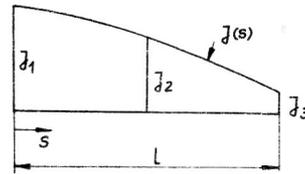


Bild 2

Spannungssprünge zum Nachbarlement entlang einer Elementseite

linear, so daß die Berechnung der 2. Ableitungen der Ansatzfunktionen numerisch durchgeführt werden muß. Die Ermittlung des Gebietsintegrals von λ_{eR} ist bei isoparametrischen Elementen deshalb aufwendig.

An jeder Elementkante liegen die Spannungssprünge zum Nachbarlement bei quadratischen Ansatzfunktionen in drei Knotenpunkten vor (Bild 2). Legt man durch diese Punkte eine Parabel und integriert entlang der Elementseite, erhält man für das Randintegral über die Spannungssprünge:

$$\int_0^l J^2(s) ds = \frac{l}{15} (2J_1^2 + 8J_2^2 + 2J_3^2 + 2J_1J_2 - J_1J_3 + 2J_2J_3) \quad (19)$$

Bei krummlinig begrenzten Elementen wird die Kantenlänge l durch die Bogenlänge der betrachteten Seite ersetzt. Über die Konstante K_2 nach Gl. (15) geht das Materialverhalten in die Berechnung des Fehlerindikators ein. Für isotropes Material ist diese Vorgehensweise zulässig. Anisotropes Material kann durch unterschiedliche Wichtung der Spannungskomponenten berücksichtigt werden.

Zur Berechnung der Fehlerindikatoren λ_{eL_2} und λ_{eE} wird die Fehlerfunktion im Elementinnern mit den Ansatzfunktionen approximiert:

$$e_\sigma = \tilde{\sigma} - \bar{\sigma} = [\underline{G} \bar{J}_x, \underline{G} \bar{J}_y, \underline{G} \bar{J}_{xy}]^T \quad (20)$$

In \bar{J} sind die Knotenspannungssprünge in der jeweiligen Spannungskomponente enthalten. Nach Einsetzen in (16) und (17) erhält man für isotropes Material:

$$\lambda_{eL_2}^2 = \|e_\sigma\|_{L_2}^2 = \bar{J}_x^T \underline{A} \bar{J}_x + \bar{J}_y^T \underline{A} \bar{J}_y + \bar{J}_{xy}^T \underline{A} \bar{J}_{xy} \quad (21)$$

$$\lambda_{eE}^2 = \|e_u\|_E^2 = \frac{1}{E} (\bar{J}_x^T \underline{A} \bar{J}_x + \bar{J}_y^T \underline{A} \bar{J}_y - 2\nu \bar{J}_x^T \underline{A} \bar{J}_y + 2(1+\nu) \bar{J}_{xy}^T \underline{A} \bar{J}_{xy}) \quad (22)$$

$$\underline{A} = \int_{\Omega^{(e)}} \underline{G}^T \underline{G} d\Omega^{(e)} \quad (23)$$

Verwendet man isoparametrische Elemente, wirkt sich dies nur auf die Berechnung der Matrix \underline{A} aus und bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Eine Fehlerindikation bei anisotropen Materialverhalten ist durch Einsetzen der entsprechenden Hooke'schen Matrix in (17) möglich.

Die Wirksamkeit der Fehlerindikatoren (14), (21) und (22) für eine a-posteriori Fehleranalyse in FE-Programmen wurde an Aufgaben der ebenen linearen Elastizitätstheorie getestet. Die Berechnung der Fehlerindikatoren erfolgte unter Verwendung der Daten- und Programmstruktur des Programmsystems COSAR und konnte mit vertretbarem Rechenaufwand durchgeführt werden. Alle drei Fehlerindikatoren spiegeln die Fehlerverteilung im Lösungsgebiet wider und sind damit prinzipiell für eine Steuerung adaptiver Netzverfeinerungen geeignet. An zwei Testbeispielen sollen einige Eigenschaften der Fehlerindikatoren diskutiert werden.

In Anlage 1 ist für das Testbeispiel 1 die Verteilung des Fehlerindikator λ_{eR} angegeben. Auf die Darstellung der Indikatoren λ_{eE} und λ_{eL_2} konnte verzichtet werden, da qualitativ gleichwertige Ergebnisse erhalten wurden. Der prozentuale Gesamtfehler ist für alle Fehlerindikatoren aus Tabelle 1 zu entnehmen.

Tabelle 1
Prozentualer Gesamtfehler mit und ohne Berücksichtigung der Umgebung der Singularität

	Netz 1 η	Netz 2 η	Netz 1 η_s	Netz 2 η_s
λ_{eR}	19,1 %	16,7 %	12,6 %	6,1 %
λ_{eE}	18,1 %	15,4 %	15,7 %	5,8 %
λ_{eL_2}	16,9 %	14,5 %	17,3 %	7,1 %

Aus der linearen Elastizitätstheorie ist bekannt, daß an der Kraftangriffsstelle ein singulärer Spannungsverlauf entsteht. Diskretisiert man das Lösungsgebiet, stellt man in der Umgebung der Kraftangriffsstelle den größten Fehler der Näherungslösung fest. Bei Netzverfeinerung konvergieren die Fehlerindikatoren im Lösungsgebiet gegen Null. Eine Ausnahme bildet das Element in der Umgebung der Kraftangriffsstelle. Obwohl auch hier das Netz wesentlich verfeinert wurde, nimmt der Fehlerindikator nicht dementsprechend ab. Da bei fortgesetzter Netzverfeinerung der Fehlerindikator in der Umgebung der Singularität gegenüber allen anderen Fehlerindikatoren signifikant wird, hat die Singularität einen wesentlichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten des prozentualen Gesamtfehlers. In Tabelle 1 ist deshalb auch

der prozentuale Gesamtfehler η_s bei Ausschluß der Umgebung der Singularität angegeben. Es zeigt sich jetzt ein deutliches Konvergenzverhalten bei Netzverfeinerung.

Auf die Probleme bei der Berechnung des Gebietsintegrals von λ_{eR} wurde bereits hingewiesen. In mehreren Veröffentlichungen ([1] bis [3]) wird das Gebietsintegral gegenüber dem Randintegral vernachlässigt. Um eine Fehlerindikation allein auf der Grundlage des Randintegrals durchführen zu können, muß bei fortgesetzter Netzverfeinerung das Gebietsintegral schneller gegen Null konvergieren als das Randintegral. Die Konvergenz beider Integrale kann abgeschätzt werden, wenn man die Fehlerindikatoren von jeweils vier Elementen des Netzes 2 zusammenfaßt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 2 dargestellt. Sie ergeben für das Gebietsintegral eine deutlich höhere Konvergenzgeschwindigkeit als für das Randintegral. Die aufwendige Berechnung des Gebietsintegrals kann damit entfallen.

Im zweiten Testbeispiel wird eine L-förmige Scheibe unter konstanter Streckenlast betrachtet (Anlage 2). Aus der linearen Elastizitätstheorie ist bekannt, daß die Spannungen an der einspringenden Ecke eine Singularität aufweisen. Diese a-priori-Aussage wird benutzt, um das Elementnetz bereits vor einer FE-Rechnung dem zu erwartenden Fehler anzugleichen. Die Verteilung der Fehlerindikatoren gibt daher einen relativ ausgeglichenen Fehlerverlauf an. Auch hier kann man sich auf die Darstellung eines Fehlerindikator beschränken, da die anderen Indikatoren qualitativ gleiche Aussagen liefern.

Um Fehlerabschätzungen auch in COSAR-Nutzer-Rechnungen durchführen zu können, sind noch eine Reihe theoretischer und praktischer Probleme zu lösen. Dazu zählt auch eine Verbesserung der Fehlerabschätzung an den Rändern des Lösungsgebietes. Für Fehleranalysen werden die Spannungssprünge eines Elementes zum Nachbar-element benötigt. An den Struktur-rändern liegen diese Spannungssprünge nicht vor. Es wurden deshalb an den Rändern des Lösungsgebietes Membranelemente [7] generiert, die eine verbesserte Spannungsberechnung an den Strukturrändern ermöglichen. Der Spannungssprung zwischen den Randelementen und den zusätzlich generierten Membranelementen wurde für die Fehlerabschätzung benutzt. In der Fehleranalyse an gelagerten Rändern treten noch Schwierigkeiten auf.

$\left(h_e^2 \int_{\Omega^{(e)}} r^T r d \Omega^{(e)} \right)$ Netz 2	$\left(h_e \int_{\Gamma^{(e)}} J^T J d s^{(e)} \right)$ Netz 2								
$\left(h_e^2 \int_{\Omega^{(e)}} r^T r d \Omega^{(e)} \right)$ Netz 1	$\left(h_e \int_{\Gamma^{(e)}} J^T J d s^{(e)} \right)$ Netz 1								
<table border="1"> <tr><td>0,96</td><td>0,03</td></tr> <tr><td>0,09</td><td>0,05</td></tr> </table>	0,96	0,03	0,09	0,05	<table border="1"> <tr><td>1,04</td><td>0,11</td></tr> <tr><td>0,36</td><td>0,15</td></tr> </table>	1,04	0,11	0,36	0,15
0,96	0,03								
0,09	0,05								
1,04	0,11								
0,36	0,15								

Tabelle 2
Konvergenz des Gebiets- und des Randintegrals bei Netzverfeinerung

Um die Vernetzung dem Fehlerverlauf optimal anzupassen, sind lokale Netzverfeinerungen notwendig. Es gibt dabei verschiedene Strategien. Dazu zählen die Verwendung spezieller Übergangselemente [7], unkonventionelle Elementverknüpfung durch eine Penalty-Zwangskopplung oder auch eine konventionelle Netzverfeinerung mit Hilfe von Dreieckselementen. Für eine Anwendung der Fehleranalyse bei der Steuerung adaptiver Lösungsverfahren muß auch die Fehlerabschätzung in solchen Gebieten mit lokaler Netzverfeinerung realisiert werden. Dazu sind noch eine Reihe offener Fragen zu klären.

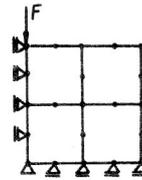
5. Zusammenfassung

Die im vorliegenden Beitrag dargestellten Ergebnisse sind ein erster Schritt zur Realisierung eines adaptiven Lösungsalgorithmus im Programmsystem COSAR. Vom jetzigen Standpunkt aus lassen sich folgende Aussagen festhalten:

- A-posteriori Fehlerabschätzungen von FE-Lösungen sind mit Hilfe von Fehlerindikatoren möglich.
- Es gibt verschiedene Fehlerindikatoren, die eine Abschätzung der Fehlerfunktion in unterschiedlichen Normen ermöglichen. Aus theoretischen Überlegungen sind Fehleranalysen in der Energienorm zu bevorzugen. Die praktischen Ergebnisse zeigen aber, daß auch eine Fehlerabschätzung in der L_2 -Norm möglich ist.
- Die untersuchten Fehlerindikatoren lassen sich mit vertretbarem Aufwand berechnen. Alle drei Fehlerindikatoren lieferten in den durchgeführten Testrechnungen qualitativ gleichwertige Ergebnisse.
- Die untersuchten Fehlerindikatoren sind mit den genannten Einschränkungen auch für Fehleranalysen bei 3D-Problemen, bei allgemeinen isoparametrischen Elementen und bei anisotropem Materialverhalten einsetzbar.

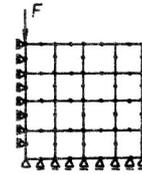
Die Fehlerabschätzung von FE-Lösungen beschränkt sich bisher auf Aufgabenklassen, die mit positiv definiten Differentialoperatoren beschrieben werden. In praktischen Ingenieurberechnungen spielt aber immer mehr die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte eine Rolle. Die Fehlerindikatoren der linearen Elastizitätstheorie wurden aus dem Residuum der Differentialgleichung und den Spannungssprüngen zwischen den Elementen berechnet. Diese Fehlergrößen treten auch bei nichtlinearen Problemen auf. Die dargestellten Fehlerindikatoren lassen sich damit prinzipiell auch für die Steuerung adaptiver Netzverfeinerungen in nichtlinearen Aufgaben einsetzen. Eine physikalische Interpretation des Feldes als Energiegröße ist jetzt aber nicht mehr möglich.

Anlagen



0,37 E 0	0,73 E-1
0,11 E 0	0,49 E-1

Netz 1
Freiheitsgrad 42



0,35 E 0	0,64 E-1	0,14 E-1	0,49 E-2
0,66 E-1	0,34 E-1	0,95 E-2	0,36 E-2
0,19 E-1	0,12 E-1	0,28 E-2	0,11 E-2
0,49 E-1	0,32 E-1	0,18 E-1	0,52 E-2

Netz 2
Freiheitsgrad 130

	$\ e_U\ _R^2$	$\ \tilde{U}\ _E^2$	η_R
Netz 1	0,16	4,22	19,1%
Netz 2	0,14	4,90	16,7%

$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

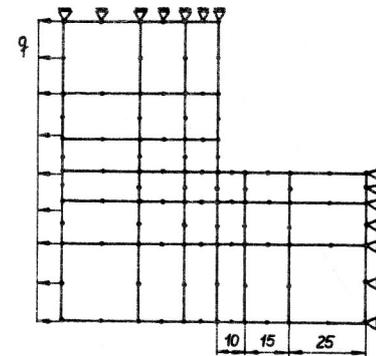
$$\nu = 0,3$$

$$F = 500 \text{ N}$$

$$\text{Quadrat: } 100 \times 100$$

Anlage 1

Ergebnisse der Fehleranalyse des Fehlerindicators λ_{eR}



$$E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$$

$$\nu = 0,3$$

$$q = 1 \text{ N/mm}$$

Freiheitsgrad 212

1,06 E-2	4,55 E-3	9,06 E-3			
3,98 E-3	1,24 E-3	1,20 E-3			
3,10 E-3	2,44 E-3	5,95 E-3			
2,88 E-3	1,15 E-3	5,78 E-3	7,46 E-3	2,22 E-3	1,13 E-2
3,51 E-3	7,50 E-4	1,44 E-3	1,14 E-3	9,77 E-4	1,01 E-2
4,65 E-3	7,24 E-4	4,81 E-4	6,39 E-4	3,51 E-4	5,08 E-3

λ_e	λ_{eR}	λ_{eE}	λ_{eL_2}
η	6,5 %	6,7 %	7,3 %

Anlage 2

Verteilung des Fehlers im Lösungsgebiet (Fehlerindikator λ_{eE}) und prozentualer Gesamtfehler

LITERATUR

- [1] A-posteriori Fehlerabschätzungen und adaptive Netzverfeinerung für Finite-Element- und Randintegral-element-Methoden. Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen der TU München, 1985.
- [2] Zienkiewicz, Kelly, Gago, Babuska: Hierarchical finite element approaches, error estimates and adaptive refinement. In: Whiteman: The mathematics of finite elements and applications IV. Mafelap, Academic Press, 1982, S. 313 – 346.
- [3] Babuska, Kelly, Gago, Zienkiewicz: A-posteriori error analysis and adaptive processes in the Finite Element Method. Part I: Error analysis, Part II: Adaptive processes. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 19 (1983), S. 1593 – 1656.
- [4] Zienkiewicz, Zhu: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24 (1987), S. 337 – 357.
- [5] Roberti, Melkanoff: Self-adaptive stress analysis based on stress convergence. In: International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 24 (1987), S. 1973 – 1992.
- [6] Altenbach, Sacharov: Die Methode der finiten Elemente in der Festkörpermechanik. Fachbuchverlag Leipzig, 1982.
- [7] Altenbach, Gabbert: Das universelle Finite-Elemente-Programmsystem COSAR – Gegenwärtiger Stand und Entwicklungstendenzen. Technische Mechanik 9 (1988) Heft 1, S. 7 – 21.

Anschrift der Verfasser:

Prof. Dr. sc. techn. Johannes Altenbach,
Dipl.-Ing. Roland Mücke
Technische Universität „Otto von Guericke“
Sektion Maschinenbau
PSF 124
Magdeburg
3010